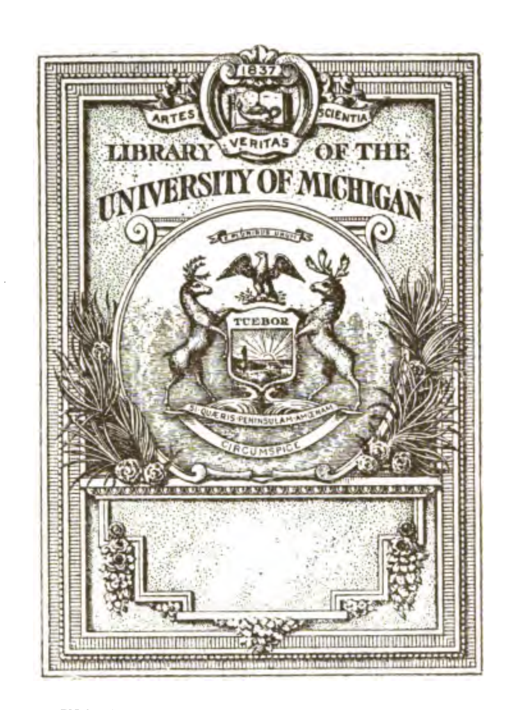
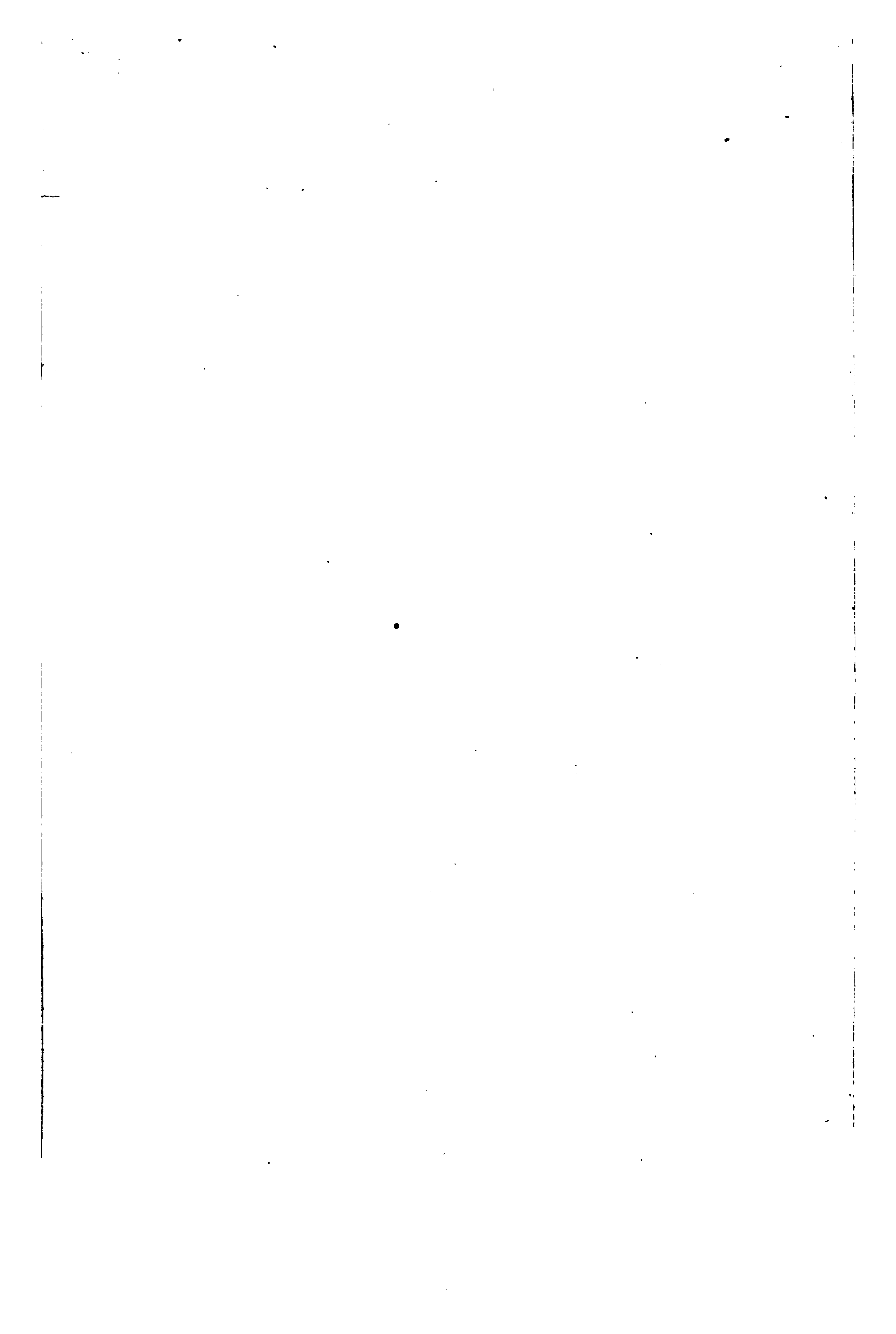

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



GRUNDZÜGE

DER

ELEMENTAR-MECHANIK.

Gemäfs den Anforderungen der philosophischen Propädeutik

als Einführung

in

die physikalischen und die technischen Wissenschaften

für den Unterricht bearbeitet

von

Dr. ALEX. WERNICKE,

Docent der Mathematik und Philosophie a. d. herzogl. technischen Hochschule,
zgl. am herzogl. Gymnasium zu Braunschweig.

Theoria mechanices analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur. Jacobi, Prom. Thes. V.
13. 8. 1825.

Mit 85 Holzschnitt-Illustrationen.

Braunschweig,

C. A. Schwetschke und Sohn
(M. Bruhn).

1883.

Bei der Ausstattung ist auf die Anforderungen der modernen Schul-Hygiene besondere Rücksicht genommen.

Seinem lieben Vater

Adolf Wernicke,

dem Direktor der königl. Ober-Realschule
zu Gleiwitz O./S.

in dankbarer Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

Zur Frage nach der Bedeutung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes.

(Als Vorwort).

> Der Unterricht an den höheren Schulen darf nicht die Tradition eines Inhalts bewahren, welchen die wissenschaftliche Forschung beseitigt hat.
> Cirkular-Verf. des königl. preufs. Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten. 31. 3. 1882.

1.

So wenig man einerseits den Wert der atomistischen Welt-Anschauung für die Entwicklung unseres wissenschaftlichen Lebens leugnen kann, so wenig kann man sich andrerseits der Thatsache verschliefsen, dafs die Rolle derselben bereits ausgespielt ist.

Jene Anschauung gestattete, vermöge ihrer grofsartigen Einseitigkeit, die Gesetzmäfsigkeit, welche hie und da im Verlaufe des Geschehens beobachtet wurde, überall vorauszusetzen, so dafs ihre Vertreter wohl geeignet waren, unbekümmert um die Bedürfnisse der grofsen Menge, für die Anerkennung des Princips der Gesetzmäfsigkeit zu kämpfen[1].

Da man heute kaum mehr zu leugnen geneigt ist, dafs die Voraussetzung einer unbeschränkten Gesetzmäfsigkeit die erste Bedingung wissenschaftlichen Arbeitens ist, so hat der Atomismus seine kulturgeschichtliche Mission erfüllt, und darum ist es an der Zeit, mit seiner metaphysischen Voraussetzung ein für alle Male zu brechen.

Die zeitgenössische Philosophie hat bei ihrem „Rückgange auf Kant“ gelernt, dafs der Kriticismus in seiner Ausgestaltung die erkenntnistheoretische Grundlage unserer Welt-Anschauung bilden mufs, und dafs infolgedessen atomistische Formeln höchstens noch als eine Zeichen-Sprache[2] aufgefafst werden können, welche gewisse Erscheinungs-Gebiete mit leidlichem Glücke zu beschreiben gestattet[3].

Wenn der Atomismus aber nur noch als ein Schema für die Darstellung haltbar ist, so liegt es nahe, zu untersuchen, ob es nicht noch andere solche Schemata giebt, welche einen gleichen oder vielleicht auch einen gröfseren Nutzen gewähren und welche aufserdem frei sind von der gefährlichen Verwandtschaft mit dem Materialismus.

Solche Fragen werden unter den Vertretern der Natur-Wissenschaften allen denen am Herzen liegen, welche mit ganzer Kraft für den Idealismus einzustehen bereit sind, mag er nun in dieser oder jener Gewandung auftreten.

---

1) Vergl. meine einschlägigen Arbeiten auf philosophischem Gebiete, besonders in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie 1882 und vergl. ferner die Braunschweiger Anzeigen vom 31. December 1881, 24. Juni 1882 und 12. Mai 1883.

2) O. Liebmann nennt (Zur Analysis der Wirklichkeit. Strafsburg 1876) die Atome sehr passend „Rechenmarken der Theorie“.

3) In diesem Sinne kämpft Kurd Lasswitz (Gotha) in seiner trefflichen Schrift „Atomistik und Kriticismus“, Braunschweig 1878, für die kinetische Atomistik, die natürlich nur Geltung hat auf „phänomenalem Gebiete“.

Wer im besondern an einer Akademie oder an einer Schule naturwissenschaftliche Fächer zu vertreten hat, deren Behandlung ihn des öftern an die Grenzen der menschlichen Erkenntnis führt, der wird bei der grofsen Verantwortlichkeit seiner Stellung nicht umhin können, jenen allgemeineren Problemen philosophischer Natur[1]) näher zu treten, aus deren Specialisierung die oben erwähnte Frage hervorgeht.

Gleichgültigkeit wird hier in unsern Tagen um so weniger vorhanden sein können, als grade die Mechanik, in welcher die Natur-Wissenschaften, so weit dieselben nach den Principien des Atomismus durchgeführt werden können, von jeher ihre Stütze suchen mufsten, in den letzten Decennien jene Umbildung vollendet hat, auf welche ihre Entwicklung schon seit geraumer Zeit hindrängte.

In dem grofsen wissenschaftlichen Gebiet, welches man bald als Ganzes, bald in diesem oder jenem Teile als Mechanik zu bezeichnen pflegte, hat sich nach und nach ein Teil abgegrenzt, welches durchaus den Charakter einer apriorischen Wissenschaft besitzt.

Wenn man für dieses Teil-Gebiet, wie es hier geschehen soll, den Namen Mechanik reserviert, so kann man sagen, dafs sich diese nach und nach zu dem Range einer mathematischen Wissenschaft erhoben hat.

In welchem Sinne diese Worte zu nehmen sind, das wird am besten zu Tage treten, wenn wir die bereits angedeutete Umgestaltung jenes Gebietes in grofsen Zügen skizzieren.

2.

Christian Wolff führt[2]) die Mechanik in seinem „Auszug aus den Anfangs-Gründen aller mathematischen Wissenschaften" ein als „Bewegungs-Kunst", sie ist ihm „eine Wissenschaft, entweder mit Vorteil der Kraft, oder der Zeit etwas zu bewegen, das ist, eine gröfsere oder geschwindere Bewegung hervorzubringen, als sonst der gegebenen Kraft vor sich möglich wäre". Dieser Erklärung folgt die Bemerkung, dafs die Bewegungs-Kunst (Mechanik) zwar eigentlich von **allen Gesetzen der Bewegung** handle, wie auch Einige dieselbe in ihren mechanischen Schriften zu erklären sich bemühen, dafs man aber insgemein in der Mechanik nur von den **Maschinen** rede, dadurch die bewegende Kraft entweder vermögender gemacht wird, eine gröfsere Last als sonst zu bewegen oder die Bewegung geschwinder als sonst zu verrichten.

Durch diese Bemerkung wird auf eine zweifache Bedeutung des Wortes Mechanik hingewiesen, es handelt sich das eine Mal darum, die Gesetze der Bewegungen festzustellen, das andre Mal darum, die Erkenntnis dieser Gesetze für die Technik nutzbar zu machen.

Hundert Jahre später[3]) sagt Stern in seinen Zusätzen zu Poissons Lehrbuch der Mechanik: „Es giebt zwei sehr verschiedene Wege die Mechanik darzustellen". „Nach der einen Methode, die noch sehr wenig ausgebildet ist, ist die **Mechanik eine rein mathematische Wissenschaft**, und

---

1) Dafs ernste philosophische Studien mit vager Spekulation nichts gemein haben, wird in unserer Zeit mehr und mehr eingesehen. Vergl. die treffliche Abhandlung von Fehrs im Programm (1883) des Gymnasiums zu Wetzlar . . . . . . hoffentlich teilt dieselbe nicht das gewöhnliche Schicksal der Programm-Abhandlungen.

Ein Berliner Akademiker von philosophischer Schulung, der nicht mehr unter den Lebenden weilt, machte mir gelegentlich die treffende Bemerkung „es giebt nichts gräfslicheres als einen Mathematiker, der zu spekulieren anfängt".

2) Das citierte Buch erschien (5. Auflage) zu Frankfurt und Leipzig. 1737.

3) Lehrbuch der Mechanik von Poisson. Nach der 2. Auflage übersetzt von M. A. Stern. Berlin 1835.

unterscheidet sich von der Geometrie dadurch, dafs sie neben dem Begriffe des Raumes, auf welchem diese beruht, auch noch den Begriff der Zeit zur Grundlage ihrer Betrachtungen macht". „Nach der zweiten Methode dagegen, deren sich grade die gröfsten Mathematiker bedient haben, ist die Mechanik eine blofse **Erfahrungs-Wissenschaft.** Sie behandelt alsdann nicht die hypothetisch gedachte Bewegung geometrischer Gröfsen, sondern vielmehr die wirklich sichtbaren Bewegungen der in der Natur vorkommenden Körper".

Diese Einteilung Sterns weist im Verein mit der Bemerkung Wolffs auf eine dreifache Bedeutung des Wortes Mechanik hin:

I. Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde.
II. Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der physischen Körper.
III. Die Mechanik ist die Lehre von der Lösung bestimmter Probleme der Technik.

Es werden damit in der That drei verschiedene Wissens-Gebiete bezeichnet, von denen immer das folgende in dem vorangestellten seine Stütze suchen mufs: es handelt sich einmal darum, alle möglichen (d. h. alle nur denkbaren) Bewegungen zu untersuchen, es handelt sich dann darum, aus dieser unendlichen Anzahl diejenigen auszuscheiden, welche den Bewegungen in der Körper-Welt entsprechen, es handelt sich endlich darum, die Kenntnis dieser ausgeschiedenen Bewegungen für die Technik nutzbar zu machen.

Es ist kein Zufall, dafs grade die abstrakte Bedeutung des Wortes Mechanik am wenigsten übereinstimmt mit dem, was man ursprünglich darunter verstand. Die Wissenschaften haben sich Schritt für Schritt mit den Bedürfnissen des Lebens entwickelt und mufsten infolgedessen von ganz konkreten Problemen ihren Ausgang nehmen. Die Verallgemeinerung und Vertiefung der gestellten Aufgaben führte mit der Zeit zum Abstrakten und damit wurde die Wissenschaft selbst Bedürfnis. Die Namengebung stammt natürlich aus jener allerersten Epoche, wo es sich noch um durchaus konkrete Probleme handelte, also in specie eine Bewegungs-Lehre der reinen Anschauung noch nicht in Frage kommen konnte.

Die Veränderungen, welchen die Bedeutung des Wortes Mechanik mit der Zeit unterworfen wurde, beleuchten die Beziehungen, welche zwischen dem Differenzierungs-Procefs der Begriffe und der Entwicklung ihrer sprachlichen Bilder statt haben: ein Wort, das ursprünglich die Erkennungs-Marke eines bestimmten Begriffes ist, wird mit der Zeit vieldeutig, weil die geistige Entwicklung rascher vorwärts schreitet als die Fortbildung der Bezeichnungen.

Die Arbeiten, welche in den letzten 50 Jahren auf dem Gebiete der Mechanik angestellt wurden, haben nun einerseits den oben[1]) angedeuteten Differenzierungs-Procefs in aller Schärfe durchgeführt und haben auch andrerseits die dabei auftretenden Nomenklatur-Fragen[2]) so ziemlich erledigt[3]).

---

1) Mit Absicht wurde grade das Säculum 1734 bis 1835 herausgegriffen: Die Herrschaft der Wolffschen Schul-Philosophie, welche alles more geometrico bewies, bezeichnet den Anfang, das Ende bezeichnet der Sturz des deutschen Apriorismus (Vergl. Lange, Geschichte des Materialismus II, 85) und das Erwachen der exakten Forschung, welcher die letzten fünfzig Jahre entschieden gehörten.

2) Die sich natürlich nicht auf die Bezeichnung des Ganzen beschränken.

3) Es hat ein gewisses Interesse, den Procefs, welcher bei der Entwicklung der Mechanik skizziert wurde, auch für die Geometrie nachzuweisen. Im Hinblick auf die Drei-Teilung der Mechanik gelangt man zu folgender Scheidung:

I. Die Geometrie ist die Lehre von den (möglichen) Raum-Gebilden.
II. Die Geometrie ist die Lehre von den Raum-Gebilden, welche der physischen Körperwelt entsprechen.
III. Die Geometrie ist die Lehre von der Lösung bestimmter Probleme der Technik.

Die Lehre von den möglichen Raum-Gebilden spaltet sich beim XI. Axiom Euklids in 3 Zweige, deren mittlerer (die Winkel-Summe des Dreiecks be-

Wenn es nun im allgemeinen wahr ist, dafs uns das Verständnis der Gegenwart nur durch das Studium der Vergangenheit erschlossen wird, und dafs nur ein solches, historisch begründetes, Verstäntnis unsrer Zeit einen Teil der Zukunft zu kalkulieren gestattet, so müssen im besondern in jener geschichtlichen Entwicklung, die wir soeben in grofsen Zügen skizziert haben, die Momente zu finden sein, welche eine bestimmte Auffassung der Mechanik beglaubigen, und damit darthun, dafs dieselbe nicht einer ephemeren Laune dieses oder jenes Kopfes entsprungen ist.

In dem Folgenden soll nun der Versuch gemacht werden, eine solche historisch geforderte Darstellung des fraglichen Gebietes zu liefern: Diese Darstellung, welche sich in erster Linie auf die Arbeiten von G. Kirchhoff und W. Schell zu stützen sucht, ersetzt den Schematismus der Atome durch ein anderes Schema und ist insofern eine Antwort auf die im Eingange gestellte Frage, welche sich uns in Bezug auf die kulturhistorische Mission des Atomismus aufgedrängt hatte.

3.

In Bezug auf die Ausführung des Gedankenganges konnten sehr verschiedene Gesichtspunkte mafsgebend sein.

Wenn sich die Untersuchung auf jenes Minimum von mathematischen Voraussetzungen stützen liefs, welches in den oberen Klassen unserer höheren Schulen nach und nach erworben wird, so mufste eine Bearbeitung für den Unterricht in mehrfacher Hinsicht nützlich erscheinen, zumal dadurch aufserdem für die Behandlung der philosophischen Propädeutik gewisse Fragen in Flufs gerathen können, deren Diskussion die Stellung, welche der mathematisch-naturwissenschaftliche Lehrer als Fachlehrer im Kollegium einnimmt, unter neuen Gesichtspunkten erscheinen läfst.

In der Cirkular-Verfügung des königl. preufs. Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten vom 31. März 1882, durch welche auf den höheren Schulen Preufsens revidierte Lehrpläne eingeführt werden, findet sich folgender Passus:

„Die philosophische Propädeutik ist nicht als besonderer obligatorischer Gegenstand im Lehrplane bezeichnet. Es wird dabei nicht verkannt, dafs es von hohem Werte ist, die Gymnasialschüler von der Notwendigkeit des philosophischen Studiums für jedes Fachstudium zu überzeugen, ferner, dafs es den Bildungsgang der obersten Klasse nicht überschreitet, insbesondere Hauptpunkte der Logik und der empirischen Psychologie zu diesem Zwecke zu verwenden endlich, dafs die philosophische Propädeutik aus andern Lehrgegenständen der Schule zwar Unterstützung findet, aber durch sie nicht ersetzt wird. Aber die Befähigung zu einem, das Nachdenken der Schüler weckenden, sie nicht verwirrenden oder überspannenden oder ermüdenden philosophischen Unterrichte ist verhältnismäfsig so selten, dafs sich nicht verlangen oder erreichen läfst, sie in jedem Lehrerkollegium eines Gymnasiums vertreten zu finden. Daher wird die Aufnahme dieses Lehrgegenstandes der Erwägung des einzelnen Direktors mit den dazu geneigten und durch ihre Studien vorbereiteten Lehrern zu überlassen sein, wobei dem königl. Provinzial-Schulkollegium sein ordnungsmäfsiger Einflufs durch die ihm obliegende Prüfung und Genehmigung des Lehrplans gesichert ist[1])“.

---

trägt 2 R) zu den Raum-Gebilden führt, welche der physischen Körperwelt entsprechen; der letzte Teil ist die sogenannte praktische Geometrie, mit deren Problemen die geometrische Entwicklung der Menschheit einst begonnen hat.

Dafs sich auch die Arithmetik in zwei Äste (Weierstrafs, Vorlesungen) spaltet, von denen nur der eine für die Darstellung der Sinnenwelt brauchbar ist, mag noch kurz bemerkt werden.

1) Dieser Passus findet sich bei Abgrenzung des Lehrzieles für den deutschen Unterricht eingeschoben und zwar unter folgender Motivierung:

Wenn man diesen praktischen Schwierigkeiten noch das theoretische Bedenken hinzufügt, dafs die Philosophie seit dem Antritte der lange vergessenen Kantischen Erbschaft (1866) eine tiefgreifende Umwandlung durchzumachen hat, aus welcher sich dieselbe jetzt endlich zu dem Range einer Wissenschaft[1]) zu erheben scheint, und dafs eine solche Umwandlung, bei der die erkenntnistheoretischen Fragen zunächst in dem Vordergrund standen, auch die Grundfesten der philosophischen Propädeutik erschüttern mufs, so wird man vielleicht zu der Ansicht kommen, dafs die Behandlung dieses Gebietes, vorläufig wenigstens, von der Schule fern zu halten sei, in der das Werdende der Wissenschaft mit Recht keinen Platz zu beanspruchen hat.

Diesen theoretischen Bedenken gegenüber dürfte die Bemerkung am Platze sein, dafs dem Takte des einzelnen Lehrers bei der Verantwortlichkeit seiner Stellung ohnedies so viel überlassen werden mufs, dafs auch in der Heranziehung der philosophischen Propädeutik an und für sich keine Gefahr liegen kann.

Hier ist der Umstand in Erwägung zu ziehen, dafs jeder Lehrer in gewissem Sinne eine Doppel-Stellung hat, insofern er sein Fach zwar in erster Linie innerhalb der Schule, andererseits aber auch der wissenschaftlichen Welt gegenüber zu vertreten hat: in erster Hinsicht mufs er sich von vornherein darüber klar sein, dafs innerhalb eines fest gefügten Schul-Organismus nicht Meinungen zur Äufserung kommen dürfen, welche dessen einheitliches Gefüge irgendwie stören könnten, in zweiter Hinsicht darf der Lehrer mit Recht die vollste Freiheit der Diskussion beanspruchen.

Diese Grenzen scheinen uns scharf genug bestimmt zu sein, so dafs sie weder von der einen Seite unbewufst überschritten, noch von der andern Seite (zu Ungunsten einzelner) bewufstermafsen verwischt werden können.

Was aber die praktischen Schwierigkeiten betrifft, so dürfte ein Teil derselben gehoben werden können, wenn man die Lehrer der philosophischen Propädeutik in der Reihe der Mathematiker[2]) sucht, beziehungsweise die Studenten der Mathematik von vornherein darauf aufmerksam macht, dafs für sie das Studium der Philosophie von ganz besonderer Tragweite ist.

Wenn der Lehrer des mathematisch-naturwissenschaftlichen Faches zugleich die philosophische Propädeutik zu vertreten hat, so dürften sich auch gewisse Bedenken abschwächen, welche ich unter sehr verschiedenen Verhältnissen von äufserst mafsgebender Seite aussprechen hörte, Bedenken, welchen die Annahme zu Grunde liegt, dafs die Position des Mathematikers als eines Fachlehrers von vornherein in mehr als einer Beziehung (z. B. den Schülern gegenüber) schwächer sei als die Position jedes andern Lehrers.

4.

Wenn ich nun der Ansicht bin, dafs die vorliegende Arbeit geeignet ist in den oberen Klassen unserer höheren Schulen dem Unterrichte als Grundlage

---

„Erwähnt wird der Gegenstand an dieser Stelle, weil am häufigsten und natürlichsten der Lehrer des Deutschen in den obersten Klassen diesen Gegenstand übernehmen wird; im Interesse sowohl des Deutschen als des philosophisch-propädeutischen Unterrichts ist es wünschenswert, dafs Lehrer des Deutschen die Befähigung für den letzteren Unterricht erwerben. Jedoch ist die Aufnahme der philosophischen Propädeutik in den Lehrplan des Gymnasiums selbstverständlich nicht dadurch bedingt, dafs die Befähigung zu diesem Unterrichte grade bei dem Lehrer des Deutschen in Prima sich finde.

1) Vergl. A. Riehl, Über wissenschaftliche und nichtwissenschaftliche Philosophie. 1883.

2) Dafs in den letzten Jahren gerade vor der königl. wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission in Berlin relativ viele Mathematiker die facultas für philosophische Propädeutik zu erwerben gesucht haben, mag hier ohne Untersuchung der bezüglichen Gründe einfach erwähnt werden.

zu dienen, so verhehle ich mir doch andererseits nicht, daſs diese Ansicht auf bestimmten Voraussetzungen beruht, welche nicht überall erfüllt sind.

Wenn man die Teilgebiete des mathematischen Pensums von vornherein atomistisch neben einander lagert, anstatt sie zu einem einheitlichen Organismus [1]) zu verbinden, so kann man dem Ganzen auch nicht den Abschluſs geben, der hier erreicht werden soll.

In welchem Sinne diese Bemerkungen zu fassen sind, kann hier nur kurz angedeutet werden.

So müſste z. B. meiner Ansicht nach, sobald als möglich, in geeigneter Form betont werden, daſs es einerseits eine graphische Darstellung arithmetischer Beziehungen (Zahlen-Grade und Zahlen-Ebene) und daſs es andererseits eine numerische Darstellung geometrischer Gebilde (z. B. schon bei den diophantischen Gleichungen I. Grades mit 2 Unbekannten) giebt, daſs also ein **Übertragungs-Princip** [2]) existiert, welches Arithmetik und Geometrie eng mit einander verkettet. Ferner muſs auf diesen beiden Gebieten schon früh die Verwendung des **Infinitesimal-Principes** [3]) gezeigt werden, damit der Grenz-Übergang möglichst früh in die Reihe der geläufigen Operationen eintritt [4]).

Wenn es einerseits mit Recht als ein pädagogischer Fehler gilt, sich innerhalb der Schule in Abstraktionen zu bewegen, so scheint es mir doch andrerseits notwendig, daſs man bei der Behandlung des Speciellen stets das Allgemeinere andeutet und von vornherein auf gewisse Entwicklungen aufmerksam macht, welche auſserhalb des zu behandelnden Gebietes liegen [5]).

Damit hängt eng zusammen, daſs ich schon beim ersten Unterrichte eine Erweiterung der arithmetischen und geometrischen Anschauungen [6]) für äuſserst fruchtbar halte, zumal grade die Ausbildung der Anschauung (beziehungsweise die Fähigkeit zu beobachten) überhaupt bei unserem Unterrichten nur allzu leicht in den Hintergrund tritt.

Auſserdem halte ich es für äuſserst wichtig, den Gegensatz von Apriorischem und Empirischem von Anfang an in geeigneter Form mit aller Strenge zu betonen und es im besonderen zu vermeiden, Identitäten, wie es oft geschieht, als Ausflüsse tiefster Weisheit hinzustellen.

---

1) Vergl. die preuſs. Cirkular-Verfügung S. 24: der elementare Rechnenunterricht in den unteren Klassen ist so zu erteilen, daſs er mit dem darauf folgenden arithmetischen Unterrichte nicht nur im Einklange steht, sondern denselben einzuleiten und zu unterstützen geeignet ist.

2) Es handelt sich nicht etwa darum (vergl. die preuſs. Cirkular-Verfügung S. 25) tief in die analytische Geometrie hineinzugehen, es handelt sich aber darum, die erwähnten Beziehungen soweit klar zu stellen, daſs ein Abiturient, z. B. die Konstruktion von statistischen Kurven oder von Wetterkarten zu übersehen imstande ist.

3) Vergl. meine Arbeit in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, 1882, S. 392.

4) Als Beispiel erwähne ich folgende Betrachtung, welche von mir in dem ersten geometrischen Unterrichte bei der Einteilung der Linien eingeführt wird. „Wenn man auf einer gegebenen Kurve eine Reihe von Teilpunkten annimmt und je zwei benachbarte durch eine Strecke verbindet, so resultiert ein Polygon, welches die gegebene Kurve mit einem gewissen Grade der Annäherung darstellt: der Fehler dieser Darstellung wird um so geringer, je mehr man die Anzahl der Teilpunkte vergröſsert, d. h. man darf jede Kurve als ein Polygon aus sehr vielen Seiten von sehr kleiner Länge ansehen“.

Damit ist die dem Schüler so naheliegende Frage nach der Ersetzbarkeit krummer Linien durch grade Linien in hinreichender Schärfe beantwortet.

5) Wenn ein Schüler, wie es oft geschieht, jedes Kurven-Stück als einen Kreisbogen zu bezeichnen bereit ist, so hat z. B. dem geometrischen Unterrichte jener Hinweis auf das Allgemeine gefehlt.

6) Diese Erweiterung ist eventuell (vergl. die preuſs. Cirkular-Verfügung, S. 25) durch geometrisches Zeichnen einzuleiten.

Um ein Beispiel anzuführen, will ich erwähnen, daſs ein Schüler schon

Wenn man den Begriff der funktionellen Abhängigkeit durch die Einführung von Indices vorbereitet, so kann man dieselben sehr bald mit grofsem Vorteile verwenden, ohne doch über das für die Schule abgegrenzte Gebiet hinauszugehen.

Zum Schlusse will ich noch erwähnen, dafs die oft geforderte Reichhaltigkeit des zur Behandlung kommenden Aufgaben-Gebietes mir wenig zu nützen scheint, wenn die Vorwürfe, an denen der Schüler seine Kraft erproben soll, des Interesses ermangeln.

Wenn ich meine Lehrstunden, deren Charakterisierung an dieser Stelle nur sehr allgemein [1]) geschehen konnte, in ziemlich eigenartiger Weise zu gestalten suche, so bin ich mir wohl bewufst, dafs isolierte Kenntnisse auch auf anderm Wege erlangt werden können, während ich allerdings nicht einsehe, wie die allgemeine Bedeutung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Faches zur vollen Geltung kommen kann, wenn man nicht sorgfältig die Berührungspunkte aufsucht, welche diese Disciplin mit anderen Disciplinen gemein hat.

Für die Erkenntnis dieser allgemeinen Bedeutung unseres Faches ist mein Werk geschrieben . . . . . . und zwar als ein **Hülfsbuch für den Abschlufs des gesamten [2]) mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes.**

Erst am Schlusse gestatte ich mir die Bemerkung, dafs die Gesichtspunkte, welche vornehmlich in meiner Studie: „Die Philosophie als deskriptive Wissenschaft“ zur Geltung gekommen sind, in diesem Werke ihre praktische Bewährung finden sollen.

Man kann ein System [3]) auf doppelte Weise verteidigen und zwar entweder durch direkte Diskussion über die zu Grunde gelegten Principien oder durch den Nachweis der Fruchtbarkeit ihrer Verwendung: der erste Weg verliert sich nur allzu oft auf den schwindligen Höhen der Spekulation, der zweite Weg bleibt stets in dem fruchtbaren Bathos einer gesicherten Erfahrung [4]).

Welcher Weg hier vorzuziehen ist, das zu entscheiden dürfte nicht schwer sein für eine Epoche, in der die Romane der Denker, um mit Sophie Germain zu reden, ihre Geltung mehr und mehr verlieren, weil die Philosophie sich endlich zum Range einer Wissenschaft zu erheben scheint.

Eine der Thesen, welche ich seiner Zeit im Anschlufs an meine Dissertation vor der philosophischen Fakultät der Berliner Universität zu verteidigen hatte, lautet: Die Physik kann und mufs der Vorstellung von Molekülen und Atomen entbehren.

Zu den Notizen, welche ich für die Apologie dieses Satzes gesammelt hatte, kam nach und nach neues Material, ohne dafs doch zunächst eine Bearbeitung des Ganzen behufs einer Veröffentlichung in Aussicht genommen wurde.

Zwei Gründe bestimmten mich hauptsächlich zur Ausführung des vorliegenden Werkes, dessen Eigenartigkeit naturgemäfs mehr in der systematischen

---

ziemlich früh imstande sein mufs, mit Sicherheit die Formen der verschiedenen Kegelschnitte zu erkennen oder eine gemeine Schrauben-Linie in seiner Weise zu beschreiben.

1) Diesen Fragen hoffe ich in nicht allzu langer Frist in einer kleineren Abhandlung näher treten zu können.

2) Die mathematischen Partieen des Buches sind eventuell in den mathematischen Lehrstunden durchzunehmen.

3) Wenn für die systematische Grundlage meiner philosophischen Arbeiten ein Namen gefunden werden sollte, so würde mir dafür die Wort-Verbindung „Genetischer Kriticismus“ geeignet erscheinen, insofern als der philosophische Kriticismus in ihnen vollkommen zur Geltung kommt, aber doch durch den Begriff der Entwicklung interpretiert wird.

4) Vgl. Kant, Anhang zu den Prolegomena.

Durchbildung eines hinlänglich erforschten Gebietes als in einer Reihe von neuen Detail-Untersuchungen liegen muſs.

Einerseits wurde ich durch die Anerkennung, welche man meiner pädagogischen Thätigkeit an maſsgebender Stelle stets in äuſserst wohlwollender Weise gezollt hatte, darauf hingewiesen, mich Arbeiten zu widmen, welche in erster Linie einen pädagogischen Zweck verfolgen, während mich andererseits die Beurteilung[1]), welche ein Teil meiner wissenschaftlichen Abhandlungen (aus dem Gebiete der Philosophie) gefunden hatte, wohl dazu bestimmen konnte, die Veröffentlichung verwandter Arbeiten zunächst[2]) zurückzuhalten, um dafür das oben bezeichnete Material zu ergänzen.

Ob ein Werk, wie das vorliegende, darauf Anspruch machen darf, in unserer pädagogischen Litteratur thatsächlich eine Lücke auszufüllen, das konnte natürlich nur nach eingehender Prüfung des einschlägigen Materials entschieden werden: die Gebiete der speciellen Physik scheinen mir in vielen Lehrbüchern ausreichend und zum Teil sogar sehr gut bearbeitet zu sein, während ich mich in Bezug auf die grundlegenden Kapitel nicht zu einer gleichen Beurteilung hinneigen kann. Da diese Ansicht, soweit ich es ermitteln konnte, von meinem Fach-Kollegen vielfach geteilt wird, so trug ich kein Bedenken, die Bedürfnisfrage schlieſslich zu bejahen, obwohl ich dabei im Hinblick auf Buddes ausgezeichnetes Lehrbuch[3]) (Berlin 1879) für einen Augenblick schwankend wurde.

In Bezug auf die Quellen des vorliegenden Werkes bleibt mir an dieser Stelle nur noch übrig, dankbar einer Reihe von Werken zu erwähnen, welche mir vor Jahren bei der Klärung meiner physikalischen Anschauungen ausgezeichnete Dienste geleistet haben: neben den Arbeiten[4]) meines Vaters (Gleiwitz i. O. S.) sind hier Schellbach, „Neue Elemente der Mechanik" und v. Waltenhofen, „Grundriſs der allgemeinen mechanischen Physik" vor allem zu nennen.

Auſserdem ist hier auch der einschlägigen Arbeiten von G. Kirchhoff und W. Schell, denen man wohl zum groſsen Teil die Durchbildung der Mechanik im Geiste der Jakobischen These (vergl. das Motto dieses Werkes) verdankt, ausdrücklich zu gedenken.

Endlich darf nicht unerwähnt bleiben, daſs ich meinen beiden Studienfreunden, den Gymnasiallehrern H. Geitel und J. Elster in Wolfenbüttel, mit denen ich während des Druckes fast Bogen für Bogen besprochen habe, die schärfere Fassung dieses oder jenes Satzes verdanke.

Von eigenen Arbeiten citiere ich bezüglich unter W. 1, W. 2, W. 3, W. 4, W. 5 Folgendes:

---

1) Von den vielen Recensionen, mit denen man mein philosophisches Erstlingswerk beehrt hat, bringen höchstens zehn (z. B. Nuova Rivista Internazionale 1880, Litterarisches Centralblatt 1881, Schlesische Zeitung 1881, Österreichischer Protestant 1882, Revue philosophique, Paris 1882) mehr oder weniger Belehrung, während die anderen im wesentlichen zwischen den Extremen eines unberechtigten Lobes und eines kritiklosen Tadels hin und her schwanken.

2) Um hier eine Klärung anzubahnen, schrieb ich unter andern eine Studie: „Die Philosophie als deskriptive Wissenschaft", welche 1882 veröffentlicht wurde. Dieselbe hat ihren Zweck insofern erfüllt, als Kreise, welche als Gegner meiner Arbeiten aufgetreten waren, denselben nunmehr eine gewisse Anerkennung zollten und darauf hin zum Teil sogar ihre Urteile über meine früheren Arbeiten modificierten . . . . . . ich will hier nur der Theolog. Litteratur-Zeitung (1882) und der Schlesischen Zeitung (1882) gedenken.

Diejenigen deutschen Recensenten, welche diese Studie für äuſserst schwer geschrieben halten, erlaube ich mir beiläufig darauf aufmerksam zu machen, daſs Mr. Jules Soury in der Pariser Revue philosophique (1882) den Gedankengang derselben in ganz ausgezeichneter Weise wiedergegeben hat.

3) Warum ich mich doch entschlossen habe, diesem Buche, dem ich selbst die Anerkennung am wenigsten versagen kann, ein anderes an die Seite zu stellen, dürfte leicht gefunden werden.

4) Lehrbuch der Mechanik, 2. Bd. Braunschweig bei Vieweg u. Sohn.

1. Über eine Analogie des Chromoxyds mit den Oxyden der Ceritmetalle (Poggendorff, Annalen 1876).
2. Arbeiten aus dem mathematisch-physikalischen Seminare [1]) der Universität Heidelberg 1875/76.
3. Über Gleichgewichtslagen schwimmender Körper und Schwerpunktsflächen. Dissertation, Berlin 1879.
4. Die Entwicklung der endlichen Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Roemer. Cantor-Schlömilchs Zeitschrift 1880.
5. Die Philosophie als deskriptive Wissenschaft. Braunschweig 1882.

* * *

Für die Ausstattung des Werkes wurde auf Grund einer Reihe von Satzproben durch Verleger und Autor eine Form gewählt, welche den Forderungen der modernen Schul-Hygiene, soweit es aus praktischen Gründen möglich erschien, in ausgedehnter Weise Rechnung trägt.

In Bezug auf diesen Punkt möchten wir auf die Arbeiten (Naturforscher-Versammlung in Danzig 1880) von Herrn Professor Dr. Hermann Cohn (Breslau) und auf eine Abhandlung (Deutsche Vierteljahrsschrift für öffentliche Gesundheitspflege 1882) des Herrn Docenten Stabsarzt Dr. R. Blasius (Braunschweig) hinweisen.

Wesentlich zu empfehlen dürfte vor allem der vollständige Ersatz des Petit-Druckes sein, für welchen hier im Gegensatz zum Korpus-Antiqua-Texte des Hauptdruckes durchweg Korpus-Kursiv eingeführt wurde.

Das übliche Paragraphen-Schema, bei welchem ganz heterogene Dinge in eine Linie gestellt werden, haben wir durch eine bestimmte Gliederung des Textes zu ersetzen gesucht.

Der so gegebenen Form der Ausstattung suchte ich auch den Charakter der Figuren anzupassen, welche durchweg nach meinen Zeichnungen und unter meiner Kontrolle geschnitten wurden.

* * *

In anerkannt guten Büchern habe ich so viel des Verbesserungs-Bedürftigen gefunden, dafs ich mein Werk in dieser Hinsicht selbst dann nicht überschätzen würde, wenn es mir vergönnt gewesen wäre, in gröfserer Mufse zu arbeiten, als es die Doppelstellung an Hochschule und Gymnasium und die Vertretung zweier akademischer Fächer gestattet.

Ich richte daher an meine Herren Kollegen die ergebenste Bitte, mich auf Mängel meiner Arbeit aufmerksam machen zu wollen, wie ich es selbst Andern gegenüber bald freiwillig, bald infolge einer Aufforderung des öfteren gethan habe . . . . nur durch gemeinsame Arbeit kann relativ Vollendetes erreicht werden.

Im besonderen möchte ich zur Diskussion stellen, ob gewisse Partieen des Buches in der Folge reduciert, beziehungsweise gestrichen werden könnten, da der Umfang des Buches bei der gewählten **Ausstattung** gröfser geworden ist, als es selbst dann wünschenswert erscheinen dürfte, wenn man berücksichtigt, dafs dies Werk dem **formalen Abschlusse des gesamten mathematisch-naturwissenschaftlichen Schul-Unterrichtes** dienen soll und dafs die Anlage des Ganzen eine relativ leichte und zugleich relativ kurze Behandlung der Gebiete der speciellen Physik gestattet.

---

1) Dieselben wurden seiner Zeit angefertigt unter Leitung des Herrn Professor Dr. Quincke, dem meine oben erwähnten Studienfreunde gleich mir äufserst reichhaltige Anregungen verdanken.

Braunschweig, Ende April 1882.

Alexander Wernicke.

Inhaltsverzeichnis.

A. Die Mechanik als Grundlage der Physik.

B. Physikalische Mechanik.

A. Die Mechanik als Grundlage der Physik.

I. Die Mechanik.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde [1]).

Es handelt sich darum die Veränderungen räumlicher Objekte zu untersuchen und die Ergebnisse dieser Untersuchungen systematisch anzuordnen.

Um das eigentümliche Gefüge jener mathematischen Wissenschaft, welche durch die eben aufgestellte Definition eingeführt wird, vollständig zu übersehen, hat man von der Betrachtung der **Raum-Gebilde** zu einer Untersuchung ihrer **Bewegungen** überzugehen und nach den dabei gewonnenen Gesichtspunkten die Aufgabe der **Mechanik** im einzelnen festzustellen.

Die Gestaltung der in Rede stehenden Wissenschaft soll also aus der gegebenen Definition entwickelt werden.

Die **Raum-Gebilde** werden hier durchweg als **Punkt-Systeme** betrachtet, für deren Charakterisierung einerseits die **Anordnung** und andererseits die **Wertigkeit** der zusammentretenden Punkte maſsgebend ist.

Auch die Geometrie, welche im allgemeinen nur den Specialfall der Gleichwertigkeit von Punkten behandelt, fordert in letzter Hinsicht für die Unterscheidung einzelner Punkte die Einführung von Wert-Koëfficienten.

Die **Bewegung der Raum-Gebilde** wird auf die Lagen-Änderung **unveränderlicher** Punkt-Systeme zurückgeführt.

*Dieselben dürfen als **Elemente** des in Bewegung befindlichen Raum-Gebildes bezeichnet werden und charakterisieren sich dadurch, daſs sie stets sich selbst kongruent bleiben.*

---

1) Vgl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. I, Einl. und Litter. in Kap. V, ferner die Schriften von Möbius und Sterns Anmerk. zu seiner Übersetzung (1835) von Poisson, Traité de Mécanique. 2. éd. 1833.

Die **Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde** hat zunächst schlechthin die Lagen-Änderungen der Elemente in Betracht zu ziehen und ist in dieser Hinsicht als **Phoronomie** zu bezeichnen.

Die Frage nach der gegenseitigen Beeinflussung elementarer Bewegungen führt zu einer Erweiterung der Aufgabe, so daſs der Phoronomie eine **Dynamik** zur Seite zu stellen ist, innerhalb welcher etwa vorhandene Förderungen und Hemmungen verschiedener Bewegungen zur Sprache kommen.

Es mag schon hier bemerkt werden, daſs die althergebrachte Einteilung der Mechanik in Statik und Dynamik, welche dem Gegensatze von Ruhe und Bewegung entspricht, kaum noch aufrecht zu erhalten sein dürfte.

1. Die Raum-Gebilde.

Die grundlegende Einteilung der geometrischen Objekte pflegt im Eingange der Raumlehre auf doppelte Weise abgeleitet zu werden, nämlich entweder durch eine zergliedernde Beschreibung des Gegebenen (Analyse) oder durch eine daraus entsprungene Erzeugung (Synthese) von Abbildern des Gegebenen.

In ersterem Falle geht man davon aus, daſs unsern Sinnen eine dreifache ausgedehnte Körper-Welt gegeben ist, deren Glieder durch Flächen gegen einander abgegrenzt werden.

Dabei wird der Punkt als Grenze der Linie, die Linie als Grenze der Fläche, die Fläche als Grenze des Körpers eingeführt.

In letzterem Falle sucht man den Weg, welchen die Analyse eingeschlagen, rückwärts zu verfolgen und vom Punkte zur Linie, von der Linie zur Fläche, von der Fläche zum Körper fortzuschreiten.

Dabei gelangt man zu Bildern des Gegebenen, zu Ideal-Gestaltungen, welche gegenüber den Unregelmäſsigkeiten des Gegegeben in gewisser Hinsicht vollkommen genannt werden dürfen.

Man geht hier vom Gebiete der empirischen Anschauung aus in das Gebiet der reinen Anschauung[1]).

Bei der Synthese pflegt man die Linie durch Bewegung des Punktes, die Fläche durch Bewegung der Linie, den Körper durch Bewegung der Fläche entstanden zu denken.

Damit führt man eine Betrachtung ein, welche der Geometrie als solcher durchaus fremd ist, weil dieselbe nicht in die Theorie der Raum-Gebilde, sondern in die Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde hineingehört.

---

1) Vgl. Kant, Kritik der reinen Vernunft (Trans. Aesth.) und neben anderen auch Mill, System der deduktiven und induktiven Logik.

Eine genauere Untersuchung dieser Vorstellung gestattet aber hier das Fremdartige völlig abzustreifen, so dafs es möglich wird auch bei der Synthese durchaus innerhalb rein geometrischer Anschauungen stehn zu bleiben.

Wenn ein Punkt P durch seine Bewegung die Linie AB erzeugt, so durchläuft derselbe eine unendliche Reihe von Punkten, A . . . . B, welche in bestimmter Weise angeordnet sind, die also z. B. ein Stück einer Graden oder ein Stück eines Kreises darstellen. Diese Punkt-Reihe A . . . . B, welche durch die Bewegung von P vor ihrer Umgebung ausgezeichnet und gewissermafsen aus derselben herausgelöst wird, enthält unendlich viele Individuen, deren Gesamtheit so beschaffen ist, dafs man von einem jeden Individuum zu jedem andern gelangen kann ohne Punkte zu berühren, welche nicht zu den ausgeschiedenen (definierten) gehören (Stetigkeit).

Teilt man eine endliche Strecke in n gleiche Teile, so kann man von jedem der n + 1 Begrenzungs-Punkte zu jedem andern unter denselben nur vermittelst eines Übergangs durch nicht definierte Zwischen-Punkte gelangen, falls n eine endliche Gröfse ist (Unstetigkeit).

Diese Anschauungsweise gestattet die Linien als einfach ausgedehnte Gruppen von unendlich vielen Punkten anzusehen, welche so beschaffen sind, dafs man von jedem Punkt der Gruppe zu jedem andern Punkte der Gruppe gelangen kann ohne Punkte zu berühren, welche der Gruppe nicht angehören.

Die Fruchtbarkeit dieser Anschauungsweise liegt darin, dafs dieselbe nicht blofs vom Punkt zur Linie, sondern auch von der Linie zur Fläche und von der Fläche zum Körper führt und so in letzter Hinsicht den **Punkt** als **Element eines jeden Raum-Gebildes** einzuführen gestattet.

Bedenken gegen diese Auffassung, welche in letzter Hinsicht doch wiederum auf die allgemein anerkannten Vorstellungen zurückweist, mögen für unser Gebiet zunächst durch die Autorität Schells niedergeschlagen werden[1]*.*

Sodann mag die Bemerkung einfliefsen, dafs dieselbe in genauem Zusammenhange steht mit der Anschauungsweise, welche in der modernen Funktionen-Theorie mehr und mehr zur Geltung kommt. Überall, wo man vom Gebiete der Zahlen ausgehend zu stetigen Anordnungen zu gelangen sucht, sind ähnliche Überlegungen in Geltung, weil hier die Reihe der positiven ganzen Zahlen, bei welcher man stets zu beginnen hat, ein unstetiges Gebilde ist.

Die bekannte Abbildung der reellen Zahlen, bei welcher jedem Individuum ein und nur ein Punkt einer graden Linie zugeordnet wird, während auch andererseits jedem Punkte der Graden eine und nur eine Zahl des reellen Gebietes entspricht, stellt den einfachsten Übergang vom Unstetigen zum Stetigen dar.

1) Vgl. Theorie I, 2.

Die Forderungen, welche durch die vier Grundoperationen in Bezug auf die ursprünglich gegebene Reihe der ganzen positiven Zahlen gestellt werden, führen zu einer Erweiterung des Zahlen-Gebietes, indem sie die Schöpfung des rationalen Zahl-Körpers [1]) *veranlassen.*

Versucht man das System der rationalen Zahlen auf einer Graden abzubilden, so macht man die Erfahrung, dafs eine grade Linie unendlich viel reicher an Punkt-Individuen ist, als das Gebiet der rationalen Zahlen an Zahl-Individuen [2]). *Will man von einem Punkte, welcher einer Rational-Zahl entspricht, zu einem andern Punkte gleicher Art übergehen, so hat man Punkte zu passieren, denen keine Rational-Zahlen entsprechen, d. h. der rationale Zahl-Körper zeigt im Gegensatze zu der abbildenden Graden eine gewisse Lückenhaftigkeit (Stetigkeit und Unstetigkeit). Die Korrespondenz läfst sich nur durch eine Schöpfung neuer Zahlen herstellen, indem man in die unendliche Reihe der Rational-Zahlen noch unendlich viele Zahlen anderen Charakters (Irrational-Zahlen) einschaltet, so dafs aus dem unstetigen Gebiete ein stetiges Gebiet wird.*

Wie diese Neuschöpfung zu begründen ist, soll hier nicht erörtert werden [3]), *wo es nur darauf ankam zu zeigen, dafs der Übergang von unstetigen Punkt-Reihen zu Linien durch Einschaltung von Zwischen-Punkten bewirkt werden kann und dafs ein solcher Übergang durchaus nichts Fremdartiges an sich hat. Das Verfahren, welches von der unstetigen Reihe der ganzen positiven Zahlen zur stetigen Reihe der reellen Zahlen führt, beglaubigt die Anschauung, welche in der Linie eine Gruppe von unendlich vielen Punkten sieht, deren Anordnung in dem oben bezeichneten Sinne zu charakterisieren ist.*

Die hier gegebene Anschauungsweise gestattet jedes Raum-Gebilde, welches nicht selbst **ein** Punkt ist, als ein **Punkt-System** einzuführen.

Die gemeinhin im Eingange der Geometrie gegebene Erläuterung, dafs die Teile von Körpern, Flächen, Linien wiederum Körper,

---

1) Vgl. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl. §. 159.

2) Vgl. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. S. 16.

3) Man vgl. Dedekind a. a. O. 16 ff. Diese kleine Schrift, welche für die strenge Begründung der Infinitesimal-Rechnung von hoher Bedeutung ist, regt eine Reihe von Aufgaben an, welche bereits zum Teil von Weierstrass in den einleitenden Vorlesungen zur Funktionen-Theorie gelöst worden sind. Die ausführliche Untersuchung von Pasch (Einleitung in die Differenzial- und Integralrechnung, 1882), welche auf der von Dedekind geschaffenen Basis das Weierstrassische Material wenigstens teilweise verwendet, kommt auch dem Bedürfnisse der Schule in vieler Hinsicht entgegen, besonders da die Arbeiten von U. Dini, welche ähnliche Zwecke verfolgen, in Deutschland noch nicht ausreichend benutzt werden.

Es wäre sehr erfreulich, wenn Pasch seine Untersuchungen auf das komplexe Gebiet ausdehnte.

Flächen, Linien sind, bleibt nur für endliche Einteilungen ohne Ausnahme in Geltung.

Innerhalb jedes **Systems von Punkten** grenzen sich **stetige** oder **unstetige** Gruppen ab, welche **Punkt-Folgen** genannt werden mögen.

Es ist als ein Specialfall zu bezeichnen, wenn ein ganzes System als eine einzige Punkt-Folge aufgefafst werden mufs.

Die **stetigen Punkt-Folgen** heifsen **Punkt-Kontinua.**

Das Charakteristicum derselben ist, dafs man von **irgend** *einem Punkte der Folge zu* **jedem** *anderen Punkte der Folge gelangen kann ohne Punkte zu berühren, welche der Folge nicht angehören. Die Anzahl der Punkte, welche zu einem Kontinuum zusammentreten, ist unendlich grofs.*

Man unterscheidet einfach-, zweifach- und dreifach-ausgedehnte Punkt-Kontinua, d. h. Linien, Flächen und Körper.

Die **unstetigen Punkt-Folgen** heifsen **Punkt-Aggregate.**

Das Charakteristicum derselben ist, dafs man von **irgend** *einem Punkte der Folge zu* **keinem** *andern Punkte der Folge gelangen kann ohne Punkte zu berühren, welche der Folge nicht angehören.*

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Punkte, welche zu einem Aggregate zusammentreten, kann man von endlichen und unendlichen Punkt-Aggregaten sprechen.

Man unterscheidet einfach-, zweifach- und dreifach-ausgedehnte Punkt-Aggregate, d. h. Punkt-Reihen, Punkt-Netze und Punkt-Körper [1]).

Durch Einschaltung von unendlich vielen Zwischen-Punkten kann man aus der Punkt-Reihe die Linie, durch Ausschaltung von unendlich vielen Zwischen-Punkten kann man aus der Linie die Punkt-Reihe hergestellt [2]) denken. Ähnliche Beziehungen gelten zwischen Flächen und Punkt-Netzen einerseits und zwischen Körpern und Punkt-Körpern andererseits.

Die Punkt-Kontinua, welche in einem System enthalten sind, heben sich im allgemeinen in scharfer gegenseitiger Abgrenzung heraus, während in Bezug auf die Punkt-Aggregate ein Gleiches nicht behauptet werden kann.

Die Zusammenfassung von unstetig angeordneten Punkten zu einzelnen Aggregaten ist stets einer gewissen Willkür unterworfen, sie wird erst bestimmt, wenn man Punkt-Kontinua fixiert, aus denen man die Aggregate entstanden denken will [3]). Diese Un-

---

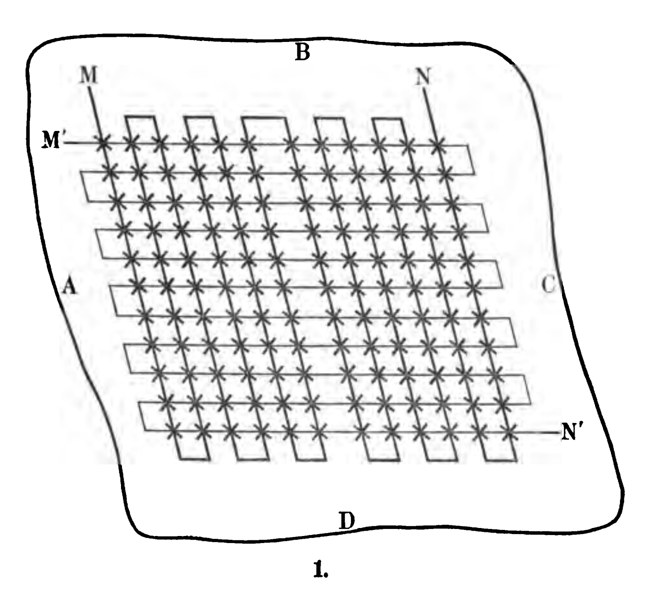
1) Für die dreifach-ausgedehnten Punkt-Aggregate besteht noch keine konventionelle Bezeichnung.

2) Das weist auf jenes Verfahren hin, welches im Hinblick auf die Beziehungen zwischen Irrational-Zahlen und Rational-Zahlen besprochen wurde.

3) Die Begründung dieser Eigentümlichkeit folgt aus dem später zu er-

bestimmtheit erstreckt sich sogar auf die Frage nach der Dimension eines Punkt-Aggregates[1].

So kann man z. B. das durch Figur 1 skizzierte Punkt-Aggregat einerseits als zweifach-ausgedehnt ansehen, indem man es aus dem Ebenen-Stücke A B C D ausgeschieden denkt; man kann dasselbe



1.

andererseits als einfach-ausgedehnt ansehen, indem man es aus dem Linien-Stücke M N oder aus dem Linien-Stücke M' N' etc. ausgeschieden denkt.

Wenn sich ein Punkt-System auf verschiedene Arten in Punkt-Folgen zerlegen läfst, so bestimmt jede **Zerlegungsart** ein gewisses **Gefüge** des Systems, z. B. eine gewisse Schichtung, Faserung etc.

So kann z. B. das in Figur 1 dargestellte Aggregat als ein Netz aufgefafst werden, in welchem die Linien M N, M' N' etc. je eine gewisse Schichtung bestimmen.

Neben der **Anordnung** der zusammentretenden Punkte kann noch ein anderer Umstand für die Charakteristik eines Raum-Gebildes mafsgebend werden: die **Wertigkeit** der zusammentretenden Punkte.

---

wähnenden Umstande, dafs sich die Aggregate im Hinblick auf die Wertigkeit der Punkte in die Reihe der Kontinua einschalten lassen.

1) In wiefern dieselbe auch in Bezug auf Punkt-Kontinua vorhanden ist, mag man aus den Arbeiten von G. Cantor (Crelles Journal Bd. 84) und E. Netto (Crelles Journal Bd. 86) entnehmen.

Man pflegt in der Elementar-Geometrie alle Punkte ohne weiteres als völlig gleichwertig anzusehen, während man sonst in der Mathematik die Gleichwertigkeit zweier oder mehrerer Gröſsen stets als einen Spezialfall zu betrachten gewohnt ist. Die allgemeinere Auffassung, wonach jedem Punkt ein bestimmter Zahlen-Koëfficient zukommt und nur in besonderen Fällen eine Gleichwertigkeit dieser Koëfficienten eintreten kann, stellt sich als ein Bedürfnis der Mechanik heraus, sie wird aber auch durch einzelne geometrische Untersuchungen gefordert. So können sich z. B. n grade Linien höchstens in $\frac{n(n-1)}{2}$ *Punkten schneiden. Wenn dieser Maximalfall, bei welchem die n Graden in einer Ebene liegen, eintritt, so wird jeder Schnittpunkt durch je zwei Linien gebildet. In anderen Fällen — die Graden mögen auch hier in einer Ebene liegen — gehen drei, vier, fünf etc. Linien durch einen Schnittpunkt. Ein durch 3, 4, 5 etc. Linien gebildeter Schnittpunkt vereinigt in sich* $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$, *etc. gewöhnliche Schnittpunkte und ist demnach als ein 3-, 6-, 10- etc. facher Punkt zu rechnen, wenn man den gewöhnlichen Schnittpunkt als einfachen Punkt rechnet. Im allgemeinen schneiden sich also n grade Linien der Ebene in einer veränderlichen Anzahl 1-, 3-, 6-, 10-, 15-, etc. facher Schnittpunkte, für welche die Summe der einzelnen Wert-Koëfficienten stets dieselbe und zwar* $\frac{n(n-1)}{2}$ *ist.*

Analoges gilt stets beim Zusammenfallen verschiedener Raum-Gebilde. So läſst z. B. die oben durchgeführte Betrachtung folgende Umkehrung zu: Durch n Punkte in der Ebene werden höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ *grade Linien bestimmt. Wenn dieser Maximalfall eintritt, so wird jede Verbindungs-Linie durch je zwei Punkte gegeben. In anderen Fällen liegen auf einzelnen Verbindungs-Linien drei, vier, fünf etc. Punkte. Eine durch 3, 4, 5, etc. Punkte bestimmte Grade vereinigt in sich* $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$ *etc. gewöhnliche Verbindungs-Linien und ist demnach als eine 3-, 6-, 10- etc. fache Grade zu rechnen, wenn man die gewöhnliche Verbindungs-Linie als einfache Grade rechnet. Im allgemeinen bestimmen also n Punkte in der Ebene eine veränderliche Anzahl von 1-, 3-, 6-, 10-, 15- etc. fachen Graden, für welche die Summe der einzelnen Wert-Koëfficienten stets dieselbe und zwar* $\frac{n(n-1)}{2}$ *ist.*

Die Graden sind hier Punkt-Kontinua, deren Elemente verschiedene Werte haben und zwar sind die Elemente einer und derselben Graden gleichwertig, während die Elemente verschiedener Graden im allgemeinen nicht gleichwertig sind.

Weitere Beispiele lassen sich in der Elementar-Geometrie leicht

auffinden. So mufs z. B. der Berührungs-Punkt einer Kreis-Tangente als doppelter Schnittpunkt gelten, während die Tangente selbst als Doppel-Linie [1]) *aufzufassen ist.*

Wenn man jeden Punkt eines Raum-Gebildes mit einem bestimmten Zahlen-Koëfficienten behaftet denkt, so kann man auch die Aggregate in die Schar der Kontinua einschalten, indem man die fehlenden Zwischen-Punkte als Punkte mit dem Koëfficienten „Null“ einführt.

Diese Anschauungsweise entspricht der Thatsache, dafs uns innerhalb der ***Geometrie*** *das* ***Stetige*** *immer als* ***Ursprüngliches****, das* ***Unstetige*** *als* ***Abgeleitetes*** *erscheint, während innerhalb der* ***Arithmetik*** *das* ***Umgekehrte*** *stattfindet. Wenn man mit einem Bleistifte auf Papier eine Punkt-Reihe zeichnet, so beschreibt man in der Luft einen* ***kontinuierlichen*** *Zug und* ***markiert einzelne Punkte*** *desselben durch die Fixation auf dem Papier, d. h. man giebt einzelnen Punkten* ***andere*** *Wert-Koëfficienten als ihrer Umgebung. Wenn man eine vorgezeichnete Punkt-Reihe betrachtet, so läfst man einen Punkt nach dem andern in den Blick-Punkt des Auges fallen, indem man mit diesem einen kontinuierlichen Zug beschreibt etc.*

Wenn Raum-Gebilde aus lauter Punkten mit gleichen Koëfficienten bestehen, so sollen dieselben **homogen** genannt werden, während alle andern Raum-Gebilde **heterogen** heifsen mögen.

Diejenige Geometrie, welche von der Wertigkeit der Punkte überhaupt nicht spricht, untersucht daher in genauer Bezeichnung die homogenen Raum-Gebilde, während sie von der Betrachtung heterogener Punkt-Systeme absieht.

Wenn es sich nun um einen einzelnen Punkt handelt, so tritt der Zahlen-Koëfficient desselben natürlich nicht in Rechnung, weil alle Zahlen-Bestimmungen auf Verhältnisse zurückweisen und zwei Dinge notwendig sind, um ein Verhältnis zu begründen. Jeder Gröfsenbegriff ist ja, was nur zu oft vergessen wird, ein relativer Begriff.

2. Die Bewegung der Raum-Gebilde.

Die Bewegung der Raum-Gebilde besteht in der Lagen-Änderung ihrer Elemente [2]**).**

Als **Elemente** eines Raum-Gebildes sind stets diejenigen Teile desselben anzusehen, welche während der Bewegung sich selbst **kongruent** bleiben.

---

1) Man kann ja von einem Punkte an einen Kreis im allgemeinen zwei Tangenten ziehen.

2) Handelt es sich um einen einzelnen Punkt, so ist der Ausdruck dieses Satzes und der folgenden Sätze entsprechend zu modifizieren.

Die Zerlegung in Elemente, welche in letzter Instanz bis auf die einzelnen (sich stets kongruenten) Punkte des Raum-Gebildes zurückgehen kann, hängt hier also von der Natur der Bewegung ab.

Bleibt ein **Raum-Gebilde** bei der Bewegung stets **sich selbst kongruent,** so darf man von der Lagen-Änderung des ganzen Raum-Gebildes sprechen, es handelt sich dann um die Bewegung eines **unveränderlichen** Systems.

In jedem andern Falle liegt die Bewegung eines **veränderlichen** Systems vor, welche auf die Bewegung **unveränderlicher Elemente** zurückgeführt werden mufs.

In einzelnen Fällen gelingt es auch die Bewegung eines veränderlichen Systems schliefslich ohne Rücksicht auf die Bewegung seiner Elemente darzustellen.

Das tritt z. B. ein, wenn ein System bei der Bewegung stets sich selbst ähnlich bleibt.

Die **Lage** eines Raum-Gebildes kann nur **in Bezug auf** ein anderes Raum-Gebilde bestimmt werden.

‚Lage' ist (ebenso wie Gröfse) ein relativer Begriff, d. h. das Wort ‚Lage' hat überhaupt nur Sinn, wenn es sich mindestens um **zwei** *Dinge handelt: man darf, streng genommen, nur von der Lage zweier Raum-Gebilde gegen einander sprechen. Ebenso aber, wie man schlechthin von der Gröfse* **einer** *graden Linie zu sprechen pflegt, indem man dieselbe auf irgend eine andere, zum Mafsstab genommene, grade Linie bezogen denkt, so ist es auch gestattet von der Lage* **eines** *Raum-Gebildes zu sprechen, indem man dasselbe auf irgend ein anderes, ein für alle Mal fixiertes, Raum-Gebilde bezogen denkt. Der Sprachgebrauch erlaubt eben von der wiederholten Erwähnung eines durchaus notwendigen und deshalb stets stillschweigend gemachten Voraussetzung abzusehen.*

Jede Lagen-Bestimmung eines Raum-Gebildes kann unmittelbar oder mittelbar durch **Längen-Messungen** ausgeführt werden und zwar reicht man dabei unter allen Umständen mit einer **Einheits-Graden** (Mafsstab) und einem **Einheits-Kreise** (Transporteur) aus.

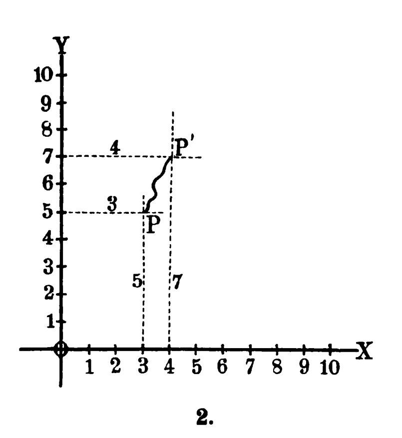
Die Geometrie des Euklides, auf welcher unsere Schulbücher fast durchweg fufsen, ist im wesentlichen eine Geometrie des Mafses und fordert deshalb zu ihrer weiteren Ausbildung, dafs alle Lagen-Bestimmungen auf Mafs-Bestimmungen zurückgeführt werden.

Im Gegensatz dazu ist eine Geometrie der Lage [1]) *ausgebildet worden, in welcher Mafs-Bestimmungen überhaupt keine Stelle haben.*

---

1) Dieselbe liefse sich bei passender Bearbeitung dem ersten Unterrichte in der Geometrie vielleicht ebenso gut zu Grunde legen, wie die Geometrie des Mafses. Die allgemeine bildende Kraft dieser Disciplin dürfte zudem bei weitem gröfser sein, während der unmittelbar gegebene praktische Nutzen allerdings viel-

Die **Längen,** welche durch ihre **Mafse** die **Lage** eines Raum-Gebildes charakterisieren sollen, müssen so ausgewählt werden, dafs die Beziehungen zwischen der Lage des Raum-Gebildes und dem zugehörigen Mafs-Zahlen-Systeme eine durchaus **eindeutige** ist.



2.

Die Vermittelung soll eindeutig sein, d. h. einer und derselben Lage soll ein und dasselbe Mafs-Zahlen-System und einem und demselben Mafs-Zahlen-System soll ein und dieselbe Lage entsprechen. So wird z. B. in der Figur 2 die Lage des Punktes P im Winkel-Raume Y O X durch die Mafs-Zahlen der Parallelen aus P eindeutig bestimmt.

Bei eindeutiger Vermittelung werden zwei verschiedene Lagen eines Raum-Gebildes durch verschiedene Mafs-Zahlen-Systeme dargestellt,. während auch umgekehrt verschiedenen Mafs-Zahlen-Systemen verschiedene Lagen entsprechen.

Die graphische Darstellung des Zahlen-Gebietes dient hier zur Erläuterung.

Der **Übergang** von einer Lage in eine andere, d. h. die **Lagen-Änderung** wird durch eine **Reihe** von Systemen verschiedener Mafs-Zahlen dargestellt, welche sich **stetig** an einander anschliefsen.

Geht z. B. (in Figur 2) der Punkt P in die durch P' bezeichnete Lage über, welche durch die Mafs-Zahlen der Parallelen aus P' charakterisiert wird, so entspricht diesem Übergange einerseits eine stetige Reihe von Mafs-Zahlen, als deren Anfangs-Glied die eine Mafs-Zahl (3) von P und als deren End-Glied die entsprechende Mafs-Zahl (4) von P' auftritt, und andererseits eine stetige Reihe von Mafs-Zahlen, als deren Anfangs-Glied die andere Mafs-Zahl (5) von P und als deren End-Glied wiederum die entsprechende Mafs-Zahl (7) von P' auftritt.

Nennt man die beiden Mafs-Zahlen, welche die Lage von P eindeutig bestimmen, M_x *und* M_y, *so läfst sich die Lage von P darstellen durch das Zeichen* $(M_x;\ M_y)$.

---

leicht geringer wäre. Aufser den Arbeiten von Steiner, Poncelet, v. Staudt, Chasles u. a. würde für eine solche elementare Verwendung dieser Disciplin besonders Reye, Geometrie der Lage, in erster Linie zu benutzen sein. Dafs die Wort-Verbindung **Geometrie** der **Lage** auf ein Oxymoron hinweist, mag wenigstens erwähnt werden.

Wenn in der ersten Lage $M_x = 3$ und $M_y = 5$ und in der zweiten Lage $M_x = 4$ und $M_y = 7$ ist, so wird die Lagen-Änderung $P \ldots P'$ dargestellt durch die Änderung $(3; 5) \ldots . (4; 7)$ des Mafs-Zahlen-Systems $(M_x; M_y)$, welches dabei eine Reihe stetig anschliefsender Werte von $(3; 5)$ bis $(4; 7)$ nach einander annimmt.

Die Bewegung eines Raum-Gebildes wird zurückgeführt auf die Lagen-Änderung der elementaren Raum-Gebilde, welche bei der Bewegung sich selbst kongruent bleiben, während wiederum solche Lagen-Änderungen durch Reihen bestimmter Mafs-Zahlen-Systeme darstellbar sind.

Die **Bewegung eines Raum-Gebildes** ist gegeben, wenn die **Lagen seiner Elemente in jedem Zeit-Momente** bekannt sind, d. h. wenn die entsprechenden **Systeme von Mafs-Zahlen** für **jeden Zeit-Moment** ermittelt werden können.

Jede Mafs-Zahl mufs dabei als ein Rechnungs-Ausdruck erscheinen, welcher eine Gröfse t, die ***Zeit-Dauer***, *enthält. Ist z. B. das oben erwähnte $M_x = \frac{4t^3 - 6t + 5}{2}$, während $M_y = 8t + 5$ ist, so hat man für $t = 1$ das Wert-Paar $M_x = 1{,}5$ und $M_y = 13$ und für $t = 2$ das Wert-Paar $M_x = 12{,}5$ und $M_y = 21$ gegeben. Während also die Zeit-Dauer $1 \ldots 2$ d. h. z. B. eine bestimmte Stunde verfliefst, bewegt sich P von der durch $(M_x; M_y) = (1{,}5; 13)$ bezeichneten Stelle nach der durch $(M_x; M_y) = (12{,}5; 21)$ bezeichneten Stelle hin. Dabei lassen sich alle Zwischen-Stellen aus den gegebenen Ausdrücken berechnen; für $t = \frac{3}{2}$ findet man z. B.*

$$(M_x; M_y) = (4{,}75; 17).$$

Zwischen M_x und t einerseits und zwischen M_y und t andererseits besteht je eine ***diophantische Gleichung***[1].

Die **Bewegung eines Raum-Gebildes darstellen** heifst dieselbe **mit dem Flusse der Zeit vergleichen**, welcher das Mafs[2] aller Bewegung ist.

Indem man die Mafs-Zahlen-Systeme, welche die Lagen-Bestimmung vermitteln, für jeden Zeit-Moment darstellt, ordnet man einer Reihe auf einander folgender Zeit-Momente Reihen auf einander folgender Mafs-Zahlen zu und vergleicht dadurch die aus der Bewegung folgenden Änderungen dieser Zahlen mit der gleichmäfsigen

---

1) Die Lösung derselben wird hier **nicht** auf das Gebiet der **ganzen** Zahlen beschränkt.

2) Dasselbe ist in unserer Anlage begründet und deshalb sind Versuche, welche das Dehnungs-Mafs der Zeit variabel setzen, von vornherein abzuweisen. Die Wahl einer gleichförmig fliefsenden Zeit als Grundlage für die Beurteilung der Bewegungen ist **nicht** Sache der Konvention. Wollte man den Ur-Variablen ein ungleichförmiges Wachstum vorschreiben, so würde man dieselbe stillschweigend auf eine andere gleichförmig wachsende Ur-Variable beziehen, d. h. ihr den Charakter der unabhängigen Variablen nehmen. Vgl. dagegen Schell, Theorie I, 7.

Änderung der Zeit-Dauer. Der Zusammenhang je zweier solcher Änderungen wird stets durch einen Rechnungsausdruck (diophantische Gleichung) dargestellt, in welchem irgend eine Mafs-Zahl M und die Zeit-Dauer t vorkommt .... als Beispiel wurde bereits $M_x = \frac{4t^3 - 6t + 5}{2}$ *und* $M_y = 8t + 5$ *angeführt.*

Diejenige Bewegung eines Raum-Gebildes, bei welcher die **Mafs-Zahlen** der Lagen-Bestimmung **stets dieselben** bleiben, heifst **Ruhe.**
Es scheint nicht überflüssig zu betonen, dafs die Ruhe als Spezialfall der Bewegung gleichfalls ein relativer Begriff ist, dafs man also, streng genommen, nur von der Ruhe eines Gebildes in Bezug auf ein anderes sprechen darf. Ein Gebilde, das in Bezug auf ein anderes Gebilde ruht, kann trotzdem in Bezug auf ein drittes in Bewegung sein. Wenn eine Strecke in einem ebenen Winkel-Raume Bewegungen ausführt, bei denen sie stets sich selbst kongruent bleibt, so herrscht unter den Punkten der Strecke gegenseitige Ruhe, während sich dieselben gegen die Grenz-Linien des Winkel-Raumes in Bewegung befinden.

Eine Person, die in einem im Gange befindlichen Wagen still sitzt, bewegt sich in Bezug auf die Strafse und ruht in Bezug auf den Wagen.

Gegenstände, die in Bezug auf die Erde ruhen, drehen sich doch einerseits mit dieser um die Polar-Achse und bewegen sich anderseits auch mit ihr um die Sonne.

Es verdient erwähnt zu werden, dafs ein Zusammenfallen zweier kongruenter Gebilde deren gegenseitige Ruhe nicht durchaus bedingt, weil hier Lagen-Änderungen möglich sind, welche die Kongruenz nicht stören.

Als ein Beispiel für solche relativ seltenen Fälle diene eine um ihren Mittelpunkt rotierende Kugel, welche mit einer ihr kongruenten, fest gedachten, Kugel stets zusammenfällt.

Grade, Kreisperipherie, Schraubenlinie, Cylinder, Kegel, Schraubenfläche, Kreisring etc. sind weitere Beispiele.

Um die Bewegung der Raum-Gebilde durch Mafs-Zahlen darzustellen, welche, mit der Zeit veränderlich, eine eindeutige Lagen-Bestimmung gestatten, pflegt man besonders einfache Raum-Gebilde einzuführen. Solche **Hülfs-Konstruktionen**, in Bezug auf welche man alle Lagen-Bestimmungen und damit auch alle Lagen-Änderungen (d. h. Bewegungen) zurückführt, nennt man **Koordinaten-Systeme** [1]).
Der Fufsboden und zwei aneinander stofsende Wände eines parallelepipedischen Zimmers weisen z. B. auf ein sehr einfaches Koordinaten-System hin. Die Lage eines Punktes im Raume des Zimmers ist bestimmt, wenn man seine Entfernungen von den

---

1) D. h. Systeme für koordinierte (d. s. zusammengehörige) Bestimmungs-Stücke der Lage.

drei genannten Oberflächen, die als Ebenen vorausgesetzt werden müssen, kennt.

3. Die Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde.

Die Mechanik hat die Aufgabe die **Gesetze der Veränderungen räumlicher Objekte** zu untersuchen.

Auch wenn es sich um die Bewegung eines unveränderlichen Systems handelt, ist eine Veränderung des räumlichen Objektes vorhanden. Dasselbe besteht hier aus dem unveränderlichen Systeme ***und*** *aus dem Koordinaten-Systeme. Es ist stets zu betonen, dafs ‚Bewegung' ein relativer Begriff ist.*

Die **Mechanik** ist eine **mathematische Wissenschaft** und gehört als solche zu dem kleinen Gebiete der **Wissenschaften a priori**, innerhalb dessen die zahlreichen **Wissenschaften a posteriori** (Erfahrungs-Wissenschaften) ihre Begründung suchen und finden müssen.

Die ***Wissenschaften a priori*** [1]) *entwickeln das System ihrer Urteile ohne der Bestätigung durch die Erfahrung zu bedürfen. Ihr Gebiet zerfällt in* ***Logik*** [2]) *und* ***Mathematik.***

Die ***Logik*** *bestimmt das wissenschaftliche Verfahren als solches und ist infolge dessen die* ***Grundlage jeder Wissenschaft.*** *Die* ***Mathematik*** *beschäftigt sich teils mit dem Studium der Raum-Gebilde, teils mit dem Studium der Zahlen: ihre Untersuchungen erstrecken sich einerseits auf die Beschaffenheit dieser Objekte und andererseits auf die Gesetze ihrer Veränderungen.*

Demnach ergiebt sich die folgende Vierteilung der Mathematik:

A. ***Raum-Lehre.***
- *I. Die* ***Geometrie*** *untersucht (als die Lehre von den Raum-Gebilden) die Beschaffenheit der räumlichen Objekte.*
- *II. Die* ***Mechanik*** *untersucht (als die Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde) die Gesetze der Veränderung räumlicher Objekte.*

B. ***Zahlen-Lehre.***
- *I. Die* ***Arithmetik*** *untersucht (als die Lehre von den Zahlen) die Beschaffenheit der numerischen Objekte.*
- *II. Die* ***Funktionen-Theorie*** *untersucht (als die Lehre von der Bewegung der Zahlen) die Gesetze der Veränderung numerischer Objekte.*

---

1) Will man dieselben, wie es neuerdings geschehen ist, auch als Erfahrungswissenschaften hinstellen, so läfst sich dagegen zunächst nichts sagen. — Namen müssen sich fügen. Man würde aber sofort gezwungen sein Erfahrungswissenschaft erster und zweiter Ordnung zu unterscheiden, was schliefslich in der Sache auf die alte Einteilung hinausläuft. Den fundamentalen Unterschied der beiden Gebiete wird man nicht wegläugnen können.

2) Genauer „Erkenntnis-theoretische Logik".

Als **mathematische Wissenschaft** hat die Mechanik die Aufgabe bei der Wahl und Behandlung ihrer Probleme die **gröfstmögliche Verallgemeinerung** anzustreben, d. h. also einerseits bei ihren Voraussetzungen über die Objekte und andererseits bei ihren Annahmen über die Veränderung derselben alle Möglichkeiten durchzugehen und dieselben, wenn es irgend angeht, zu erschöpfen.

Dabei tritt der Charakter einer Wissenschaft a priori klar zu Tage. Weil eine solche in jedem Falle alle nur möglichen Annahmen zu machen und jede einzelne zu verfolgen hat, so ist sie im Stande, ihren Ergebnissen diejenige Allgemeingültigkeit und Notwendigkeit zu wahren, welche Erfahrungswissenschaften nur in der Anlehnung an apriorische Grundlagen erreichen können.

Wenn die Elementar-Geometrie zum XI. Axiom des Euklides gelangt, welches nicht beweisbar ist, so hat dieselbe zu erwägen, welche Annahmen hier überhaupt möglich sind. So gelangt sie zu drei verschiedenen Voraussetzungen für die weitere Behandlung und jeder Voraussetzung entspricht ein eigenes System von Folgerungen: Die Geometrie, in welcher die Summe der Dreiecks-Winkel konstant und zwar gleich zwei Rechten ist, scheidet sich zunächst von der Geometrie, in welcher jene Summe veränderlich ist und diese nicht-euklidische Geometrie zerfällt wieder in zwei Formen, je nachdem jene Winkel-Summe beständig gröfser oder beständig kleiner als zwei Rechte ist.

Die allgemeinste Annahme, welche man hier machen kann, ist nun offenbar die, dafs verschiedene Bewegungen, welche gleichzeitig zu Stande kommen, auf einander irgend welchen Einflufs ausüben [1]), dafs sie sich gegenseitig fördern und hemmen und dafs also das Ganze der Raum-Gebilde, welches bei einem Probleme zu behandeln ist, in seinen Veränderungen von den gegenseitigen Einwirkungen der einzelnen Teile abhängig ist.

Als Specialfall dieser allgemeinen Annahme, bei welcher die gegenseitige Einwirkung in der Gestalt von irgend welchen Mafs-Zahlen in die Rechnung eingehen wird, ist dann die Voraussetzung zu betrachten, dafs keine gegenseitige Beeinflussung der Bewegungen stattfindet .... jene Mafs-Zahlen werden hier den Special-Wert Null annehmen.

Im Hinblick auf diese allgemeinste Annahme können nun die Veränderungen räumlicher Objekte einerseits schlechthin als Lagen-

1) Solche Beeinflussungen sind zunächst nicht kausal, sondern koncessiv zu erklären, es handelt sich um Bedingendes und Bedingtes. Vgl. W. 5. S. 23. So sagt auch Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Mafse S. 19: Wenn man die physikalischen Erscheinungen ausschliefslich als Bewegungserscheinungen auffafst, so ist .... die Ursache einer Bewegung, um überhaupt dieses wenig bestimmte Wort zu gebrauchen, ... eine vorangegangene Bewegung.

Änderungen aufgefaſst, sie können aber auch andererseits auf die gegenseitige Störung und Förderung von Teil-Bewegungen zurückgeführt werden.

Im ersten Falle richtet man sein Augenmerk sozusagen nur auf das Bewegungs-Bild, indem man entweder ein gegebenes zu analysieren oder ein gefordertes herzustellen bestrebt ist, im zweiten Falle berücksichtigt man auſserdem **alle** *Bedingungen, unter denen überhaupt Veränderungen eines Raum-Gebildes denkbar sind, indem man die Annahme einer gegenseitigen Beeinflussung der Teil-Bewegungen macht.*

Die Mechanik wird demnach mit einer **Theorie der Lagen-Änderungen** beginnen: dieselbe mag **Phoronomie** heiſsen.

Dieser Teil umfaſst analytische und synthetische Probleme: man hat entweder gegebene Bewegungen auf elementare Beziehungen zurückzuführen oder man hat aus solchen elementaren Beziehungen geforderte Bewegungen herzustellen. Im ersten Falle handelt es sich darum eine gegebene Bewegung (Κινημα) *zu betrachten, also Kinematik zu treiben, im zweiten Falle darum zu einer geforderten Bewegung* (Κινησις) *zu gelangen, also Kinetik zu treiben. Man könnte daher die Phoronomie in Kinematik und Kinetik einteilen*[1]. *Diese Einteilung bietet bei elementarer Behandlung der Probleme keinen Vorteil und ist hier überdies schwer durchzuführen.*

Der zweite Teil der Mechanik, welcher sich mit der **gegenseitigen Störung und Förderung der Bewegungen** beschäftigt, mag **Dynamik** heiſsen.

Diese Nomenklatur entspricht der alten Einteilung in Statik und Dynamik durchaus nicht, sie trägt den Umbildungen Rechnung, welche die Mechanik in den letzten Decennien durchgemacht hat und welche die alte Teilung der Probleme in statische und dynamische als zu wenig durchgreifend erscheinen läſst.

Die Theorie der Lagen-Änderung zerfällt naturgemäſs in die **Phoronomie des Punktes** und in die **Phoronomie der Punkt-Systeme.**

Es handelt sich stets um die Lagen-Änderung der Elemente eines Raum-Gebildes d. h. der Teile desselben, welche bei der Bewegung sich selbst kongruent bleiben. Als solche Teile stellen sich in letzter Instanz die einzelnen Punkte dar, so daſs die Bewegung eines Raum-Gebildes unter allen Umständen auf die Lagen-Änderung der konstituierenden Punkte zurückgeführt werden kann. Zudem weist jede Lagen-Bestimmung auf die Lagen-Bestimmung von Punkten zurück, so daſs auch die Bewegungen unveränderlicher Systeme der Gesetze über die Lagen-Änderung eines Punktes behufs ihrer Darstellung bedürfen.

---

1) Vgl. Schell, Theorie I, Einl.

In der **Phoronomie des Punktes** werden die grundlegenden Methoden für die Vergleichung der Bewegung eines Punktes mit dem Flusse der Zeit entwickelt, in der **Phoronomie der Punkt-Systeme** werden diese Methoden auf einzelne Punkt-Systeme angewendet.

Durch diese Bemerkungen bestimmt sich die weitere Einteilung der beiden Disciplinen, die einerseits nach der Art der Methoden und andererseits aufserdem nach der Art der Punkt-Systeme vorgenommen werden mufs.

Eine bedeutende Rolle spielt das unveränderliche System. Die festen Körper der Natur dürfen innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung als unveränderliche Systeme betrachtet werden.

Die Einteilung der **Dynamik** wird durch die Voraussetzungen, welche man über die gegenseitige Hemmung und Förderung der Bewegungen macht, in erster Linie bestimmt. Darnach wird die Dynamik in verschiedene Gebiete zerfallen und innerhalb jedes derselben wird die Art der zu behandelnden Punkt-Systeme als Einteilungs-Moment gelten dürfen.

Eine Dynamik des Punktes kann nicht existieren, da es sich stets um gegenseitige Hemmungen und Förderungen handelt, also mindestens ein Aggregat von zwei Punkten in Frage kommt.

Die so bestimmte Gliederung der Mechanik bedarf noch einer **Ergänzung**. Die Theorie der Lagen-Änderung setzt eine Theorie der Lagen-Bestimmung voraus. Da dieser Teil der Geometrie in den Schulbüchern nicht behandelt wird, so mufs den Grundzügen der Elementar-Mechanik ein Abschnitt vorausgeschickt werden, in welchem einerseits das Notwendigste über **Lagen-Bestimmungen** gegeben wird und in welchem andrerseits überhaupt die Fühlung mit dem bereits aufgenommenen Lehrstoff herzustellen ist.

Es handelt sich darum einerseits den Begriff der Lage, dem gewöhnlich wenig Sorgfalt zugewandt wird, zu klären und aufserdem einiges hinzuzufügen, was bei seiner Verwendung in der Mechanik vorausgesetzt werden mufs.

Damit ist der Grundrifs für die Einteilung und Behandlung der Elementar-Mechanik gegeben.

Dieser Grundrifs wurde hergeleitet — das ist zu betonen — aus der Forderung, welche in der Definition der Mechanik ausgesprochen ist, und zwar geschah diese Herleitung unter Berücksichtigung der, bei unserer jetzigen Schulorganisation, gegebenen Verhältnisse.

Die Ausführung folgt **zunächst** dem **Schema:**

I. Die geometrische Grundlage der Mechanik.
II. Phoronomie.
  1. Der Punkt.
  2. Die Punkt-Systeme.
III. Dynamik.

Des **Näheren** bestimmt wird die Ausführung hier durch das deutlich begrenzte **Ziel** die Grundzüge der Elementar-Mechanik als Einleitung in die Physik darzustellen.

Es handelt sich darum aus dem grofsen Gebiete der Mechanik dasjenige herauszugreifen, was der Physik zu Grunde zu legen ist, d. h. aus dem Ganzen aller möglichen Bewegungen diejenigen auszuwählen, welche den Bewegungen der Naturkörper entsprechen.

Ebenso wie die Geometrie, welche auf der Schule gelehrt wird, nur ein bestimmter Zweig der Geometrie ist und zwar derjenige Zweig, welchen man von jeher mit Erfolg zur Lösung der in der Natur gegebenen geometrischen Aufgaben (z. B. Landes-Vermessung) verwendet hat, so wird auch bei den durch die Bedürfnisse der Schule geforderten Beschränkungen in der Mechanik zunächst nur ein bestimmter Zweig zur Behandlung kommen können. Es wird zweckmäfsig sein, auch hier denjenigen Teil auszuwählen, welchen man mit Erfolg zur Lösung der in der Natur gegebenen Bewegungs-Probleme verwenden kann. Die so geforderte Beschränkung wird schon in der Phoronomie (bei der Auswahl der Punkt-Systeme, welche zur Behandlung kommen) von Einflufs sein, sie wird aber vor allem die Voraussetzung der Dynamik in ganz bestimmter Weise begrenzen, es wird sich darum handeln, die Annahme über die gegenseitige Hemmung und Förderung der Bewegungen nicht völlig willkürlich zu machen, sondern dieselben so zu gestalten, dafs eine Verwendung derselben bei der Behandlung der physischen Bewegungen von vornherein gesichert erscheint.

Eine solche Abgrenzung des mechanischen Gebietes kann nur mit Hülfe der Erfahrung durchgeführt werden.

Die Erfolge der versuchten Verwendung einer speziellen Annahme entscheiden in letzter Instanz für die Brauchbarkeit derselben, sie lösen dieselbe aus dem grofsen Gebiete aller möglichen Annahmen und stellen sie als diejenige hin, welche dem Wirklichen entspricht.

Es kommt hier zur Geltung, dafs jede Erfahrungswissenschaft einer apriorischen Grundlage bedarf, welche in dem Gebiete einer Wissenschaft a priori abzugrenzen ist und dafs diese Abgrenzung nur durch Erfahrung geschehen kann.

So bildet auch die Mechanik die Grundlage für eine Reihe von Erfahrungswissenschaften.

Durch Vermittelung der **Physik**, welche sich unmittelbar auf die Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde stützt, treten eine grofse Anzahl **physikalischer und technischer Wissenschaften** (z. B. die Astronomie oder die Maschinen-Lehre) in enge Beziehung zur Mechanik.

In allen diesen kommt eine Form der Mechanik zur Geltung, deren Verwendbarkeit durch die Physik gesichert ist.

Ebenso wie zu untersuchen ist, welche Form der Geometrie und welche Form der Arithmetik bei den in der Natur gegebenen Verhältnissen verwendbar ist, ebenso mufs untersucht werden, welche Form der Mechanik für die Behandlung der in der Natur gegebenen Bewegungen pafst. Ist man gezwungen bei dieser Spezial-Form der Mechanik stehen zu bleiben, so wird doch bei der Darstellung derselben stets hervortreten müssen, dafs nicht das Allgemeine gegeben wird.

Wie die so bestimmte Spezialform der Mechanik abzugrenzen ist, das ergiebt sich aus der Aufgabe der Physik, zu deren Erörterung nun übergegangen werden soll.

II. Die Physik.

Um jene bestimmte **Form der Mechanik**, welche den **physischen Bewegungen** zu Grunde zu legen ist, abgrenzen zu können, mufs man einerseits ein allgemeines Verfahren kennen, welches derartige Abgrenzungen gestattet, während man andrerseits im besonderen die in der Natur gegebenen Bewegungen sorgfältig zu studieren hat.

Es handelt sich also einmal um eine bestimmte **Methode**, welche aus dem Gebiete aller möglichen (denkbaren) Formen einer Wissenschaft a priori (Mechanik) diejenige Form herausschält, welche einer bestimmten Erfahrungswissenschaft (Physik) zur Stütze dienen soll.

*Dabei wird es hauptsächlich darauf ankommen, den wissenschaftlichen **Charakter** der Physik des Näheren festzustellen.*

Andererseits handelt es sich um eine genaue **Durchmusterung** des hier in Rede stehenden Erscheinungsgebietes, dessen Eigentümlichkeit gegenüber andern Gruppen von Erfahrungsthatsachen deutlich hervorzuheben ist.

*Dazu wird auch die Begründung einer sachgemäfsen **Klassifikation** des ganzen Gebiets gehören.*

Die Betrachtungen führen dazu, dem **Mafs-System** der Physik eine besondere Wichtigkeit zuzusprechen und von Anfang an zu betonen, dafs alle Mafse dieses Gebietes auf **drei** und zwar auf **Länge, Masse** und **Zeit** zurückgeführt werden können.

1. Der Charakter der Physik.

Die **Physik** ist eine **Natur-Wissenschaft** auf **mathematischer** Grundlage.

Als solche gehört dieselbe zu dem grofsen Gebiete der

Erfahrungswissenschaften und zwar zu derjenigen Gruppe derselben, welche in der Mathematik ihre Begründung suchen müssen.

Als **Erfahrungswissenschaft** bedarf die Physik der unmittelbaren und der mittelbaren **Beobachtung**, als **Erfahrungswissenschaft** auf mathematischer Grundlage [1]) bedarf sie aufserdem der **Messung** und der **Rechnung**. Die unmittelbare Beobachtung der Naturerscheinungen führt einerseits zu einer vorläufigen Orientierung, sie dient andererseits dazu, die Mittel zu bestimmen, welche in diesem oder jenem Falle für eine mittelbare Beobachtung anzuwenden sind.

Die Mannigfaltigkeit der Bedingungen, unter denen die physikalischen Erscheinungen eintreten, erschwert hier die Aufgabe der Wissenschaft, nämlich **Gesetze** festzustellen, in hohem Mafse. Man mufs daher einerseits Gruppen von Erscheinungen trennen, um dieselben einzeln der Beobachtung zu unterwerfen und mufs andererseits die mutmafslichen Bedingungen ihres Eintretens ändern, um die wirklichen Bedingungen desselben zu fixieren.

Die **Beobachtungsmittel,** welche diesen Bestrebungen dienen, heifsen **wissenschaftliche Apparate.**

Indem man so in den Gang der Natur-Ereignisse eingreift und denselben auf diese oder jene Weise verändert, gelangt man einerseits zu einer genauen Beobachtung von Erscheinungen, welche auch ohne unser Zuthun mehr oder minder deutlich hervorgetreten wären, während man andrerseits auf neue Erscheinungen stöfst, welche sich sonst nicht entwickelt hätten oder doch unbeachtet geblieben wären.

So war schon dem Altertum bekannt, dafs geriebener Bernstein leichte Körperchen anzieht, während es einer grofsen Reihe von unmittelbaren und mittelbaren Beobachtungen bedurfte, um aus dieser Thatsache das Gewitter zu erklären oder um dieselbe in der Konstruktion der Elektrisier-Maschine nutzbar zu machen.

Ein schwer abzugrenzendes Gebiet von mittelbaren Beobachtungen pflegt man **wissenschaftliche Versuche** zu nennen. Hierher gehört jedes Verfahren, bei welchem es sich nicht sowohl um eine mehr oder minder vereinfachte Beobachtung gegebener Erscheinungen, sondern um die Beobachtung selbst veranlafster Ereignisse handelt.

Die Grenzen sind natürlich fliefsend. Bei jedem noch so geringen Eingriffe durch irgend welche Apparate wirkt man auf den Verlauf der gegebenen Erscheinungen ein und erzeugt Veränderungen derselben, d. h. neue Erscheinungen, während man andererseits durch keinen noch so grofsen Aufwand von Apparaten wirklich neues erzeugen kann . . . . . man mufs stets bei der Änderung von Bedingungen stehen bleiben. Wenn man z. B. die Hand zu

---

1) D. h. als **exakte** Wissenschaft.

einer Röhre schliefst, um durch dieselbe entfernte Gegenstände ungestört beobachten zu können oder um sich von der Zerlegung des weifsen Lichtes zu überzeugen, so läfst man ebensowohl einen Teil der gegebenen Erscheinungen bestehen, während man einen andern aufhebt, als wenn man mit Fizeaus künstlichem Mechanismus die Geschwindigkeit des Lichtes zu konstatieren (ganz abgesehen von einer Messung) sucht. Eine gebräuchliche Definition nennt jede, zur Bestätigung einer bestimmten wissenschaftlichen Anschauung gemachte, mittelbare Beobachtung einen Versuch. Auch diese Definition hat nur scheinbar die gewünschte Schärfe.

Macht man etwa kein Experiment, wenn man Natrium auf Wasser wirft, um die dabei auftretenden Erscheinungen zu studieren ohne doch über deren Beschaffenheit irgend etwas vorauszusetzen oder entbehrt andererseits irgend eine wissenschaftliche Beobachtung jeder Idee? Mit Recht sagt[1]) Liebig: „Das Experiment ist nur Hülfsmittel für den Denkprocefs, ähnlich wie die Rechnung; der Gedanke mufs ihm in allen Fällen und mit Notwendigkeit vorausgehen, wenn es irgend eine Bedeutung haben soll".

Es scheint im Hinblick auf diese Schwierigkeit der Abgrenzung nicht unberechtigt in der Wissenschaft jede mittelbare Beobachtung einen wissenschaftlichen Versuch zu nennen.

Beim **Messen** handelt es sich um die **Feststellung** von **Zahlen-Werten**, d. h. um die numerische Vergleichung zweier oder mehrerer Dinge.

Jede Gröfsen-Angabe ist das Ergebnis einer ausgeführten oder ausgeführt gedachten Messung, d. h. eine Vergleichung. Der Begriff Gröfse ist durchaus relativ.

Um eine **Reihe von Objekten**, welche in **bestimmter** Beziehung **gleichartig** sind, **messen** zu können, wählt man **irgend** eins derselben zur **Einheit** und sucht zu bestimmen, **wie vielmal** die Einheit in jedem der andern Objekte enthalten ist.

Soll z. B. die Entfernung zweier Bäume gemessen werden, so spannt man eine Schnur zwischen denselben aus, wählt irgend eine Strecke (markiert z. B. durch Einschnitte auf einem prismatischen Stabe oder durch ein gespanntes Stück Schnur etc.) zur Einheit und trägt dieselbe in bekannter Weise auf der zu messenden Schnur so oft als möglich ab. Läfst sich die Einheit 12mal abtragen, so enthält die Schnur 12mal die gewählte Einheit.

Im allgemeinen wird das zu messende Objekt nicht ein ganzes Vielfaches der Einheit sein. Um Bruchteile der Einheit messen zu können, mufs man dieselbe in kleinere Einheiten auflösen, indem man sie in gleiche Teile zerlegt.

Die Zerlegung einer graden Linie in n gleiche Teile wird bekanntlich dadurch vermittelt, dafs man auf einer beliebigen Graden n beliebige Teile aufträgt und diese Teilung durch

---

1) Rede über Baco v. Verulam.

ein System von Parallellinien auf die zu teilende Grade überträgt. Das Charakteristische dabei ist, dafs man eine durch Zusammensetzung von gleichen Stücken konstruierte Teilung, welche man stets herstellen kann, benutzt, um eine geforderte Zerlegung auszuführen. Ähnliches tritt bei allen Messungen ein.

Hat man z. B. die beliebig gewählte Einheit des oben gegebenen Beispiels in 10 Teile zerlegt, so wird man nun das etwa übrig bleibende Stück der Schnur, welches kleiner als die Einheit ist, in Zehnteln der Einheit ausdrücken können und zwar genau bis auf einen Bruchteil, der kleiner ist als ein Zehntel.

Um genauer messen zu können, mufs man eine weitere Zerlegung der abgeleiteten Einheit (Zehntel) eintreten lassen, indem man diese weiter (z. B. wiederum in Zehntel) einteilt.

Dieses Verfahren führt entweder bei Kommensurabilität des Gegenstandes und der Einheit (resp. eines aliquoten Teiles der Einheit) zu einem genauen Mafse oder es führt bei Inkommensurabilität des Gegenstandes und der Einheit (resp. eines aliquoten Teils der Einheit) zu einer beliebig weit hinausgeschobenen Annäherung, für welche die Grenze der Genauigkeit (z. B. bis auf 0,0001 der Einheit) jederzeit angebbar ist.

Da die Festsetzung der Einheit innerhalb einer Gruppe von Objekten, die in bestimmter Beziehung gleichartig sind, der Willkür unterworfen ist, während andrerseits nach Fixierung der Einheit jede Messung bestimmt ist, so müssen verschiedene Einheiten mit einander verglichen werden, wenn damit abgeleitete Zahlen in Beziehung gesetzt werden sollen. Ein solches vergleichendes Verfahren nennt man die Reduktion einer Einheit auf eine andere.

Die Vergleichung zweier Einheiten kann auf doppelte Weise geschehen, indem man entweder die erste auf die zweite oder die zweite auf die erste reduciert. In jedem Falle handelt es sich darum, die eine Einheit durch die andere zu messen und dabei ist das Verfahren mafsgebend, das überhaupt beim Messen in Frage kommt.

Solche Reduktions-Gleichungen sind z. B. 5 frcs. = 4 Mk. oder 1 Meter = 3,186199 Fufs rhein. oder 1 Liter = 0,2201 Gallon. engl.

Eine Messung, welche für eine Länge 0,5 Meter ergeben hat, ist für Jemanden, welcher mit rhein. Fufsen rechnen will, brauchbar, sobald er die Reduktions-Gleichung zwischen Meter und rhein. Fufs kennt: er findet für dieselbe Länge 1,5930995 Fufs rhein.

Die Apparate, welche zur Bestimmung **numerischer** Werte dienen, werden im Gegensatz zu den nur der Beobachtung gewidmeten Instrumenten, **Mefs-Apparate** genannt.

Beobachtungs-Apparate sind z. B. Fernrohr, Mikroskop, Luftpumpe, Magnetnadel etc.

Als Meſs-Apparate mögen genannt werden: Gradlinige und kreisförmige Skala (Maſs-Stab und Kreis-Teilung), Hebel- und Feder-Wage, Uhr, Barometer, Sirene und Thermometer.

Viele Beobachtungs-Apparate können mit Hülfe einer Skala, Uhr etc. in Meſs-Apparate umgewandelt werden. So kann ein gewöhnliches Mikroskop z. B. in Verein mit einer Gitter-Skala aus Glas (Mikrometer) zur Messung dienen.

Jeder Meſs-Apparat ist mit einer Teilung versehen, welche für eine bestimmte Einheit konstruiert ist. Auf einem Thermometer ist z. B. eine gradlinige Längenteilung aufgetragen, zu einer Hebel-Wage gehört ein wohlgegliederter Gewichtssatz, eine Sirene ist mit Kränzen von äquidistanten Löchern oder Ausfräsungen versehen.

Wenn schon die Ergebnisse bloſser Beobachtungen durch Wiederholung und Abänderung von Versuchen geprüft und berichtigt werden müssen, so gilt das in noch höherem Maſse von den Resultaten der Messungen.

Jede Messung ist wegen der Unvollkommenheit der Apparate und wegen der Ungenauigkeit der Beobachtung innerhalb gewisser Grenzen fehlerhaft. Wiederholte Messungen gestatten einerseits die gemachten Fehler zu verringern und andererseits Grenzen für deren Gröſsen abzuleiten.

Miſst man z. B. unter sonst gleichen Umständen mit einer Skala eine bestimmte Länge mehrere Male, so findet man nicht genau übereinstimmende Werte. In dem arithmetischen Mittel der einzelnen Werte erhält man denjenigen Ausdruck der gesuchten Gröſse, welcher am wahrscheinlichsten ist. Die Annäherung dieses, durch die Beobachtungen gefundenen, Mittel-Wertes an den gesuchten wahren Wert läſst sich berechnen, indem man die Quadrate der mittleren Fehler (Abweichungen der Einzel-Werte vom Mittel-Werte) benutzt[1].

Handelt es sich **nicht** *um den Wert* **einer** *Gröſse, welche unmittelbar mehrere Male gemessen wird, sondern um verwickeltere Fälle, d. h. im allgemeinen um die Berechnung von Gröſsen und Messungen verschiedener anderer Gröſsen, so versagt die Methode des arithmetischen Mittels. Dieselbe ist nur ein specieller Fall einer sehr allgemeinen Fehler-Rechnung, welche die* ***Methode der kleinsten Quadrate*** *heiſst, weil sie für die gesuchten Gröſsen aus den Beobachtungen Mittel-Werte ableitet, welche der Rechnung zu Grunde gelegt, die Summe der Quadrate der Abweichungen von den Beobachtungen möglichst klein machen*[1].

Neben der Verkleinerung und Bestimmung der **Beobachtungsfehler** ist bei genaueren Messungen noch die Berücksichtigung von sogenannten **Korrektionen** erforderlich. Der Wert

---

1) Einfache Beispiele findet man bei Kohlrausch in der Einleitung zu seinem Leitfaden der praktischen Physik.

der beobachtenden Gröfsen hängt oft von einer Reihe von Bedingungen ab, die man zunächst vielleicht gar nicht oder doch nur unvollkommen in Rechnung ziehen konnte. Infolge dessen werden bei genaueren Bestimmungen einerseits Korrekturen der gewonnenen Zahlen und andererseits wiederum Betrachtungen über den Einflufs dieser Korrekturen nötig. Im allgemeinen müssen solche Verbesserungen des Resultates berücksichtigt werden, so lange der Betrag derselben gröfser ist als der Fehler, mit dem die Messung infolge der Ungenauigkeit der Beobachtung und der Unvollkommenheit der Apparate so wie so behaftet ist.

Eine solche Korrektion, welche fast bei allen Messungen angebracht werden mufs, entspringt z. B. aus der Thatsache, dafs ein Naturkörper bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Volumina hat. Man darf daher hier streng genommen, nur von dem Volumen bei bestimmter Temperatur, nicht aber schlechthin vom Volumen sprechen. Da aber andererseits die Änderung des Volumens bei wechselnder Temperatur gewisse Grenzen nicht übersteigt (die Längen-Einheit eines Messing-Körpers vergröfsert sich z. B. für 1 Grad um 0,000019), so giebt eine beliebige Volumen-Messung einen Wert, der unter gewissen Umständen genau genug ist und unter andern Umständen der Korrektur bedarf.

So wird z. B. ein Tischler bei seinen Abmessungen auf die Volumen-Änderung von Material und Mafsstab nur selten Rücksicht zu nehmen haben, während ein Mechaniker die Ausdehnung durch die Wärme bei seinen Arbeiten sehr oft zu beachten hat.

Beobachtungen und **Messungen** bilden das Material für eine **Erfahrungswissenschaft auf mathematischer Grundlage**, die nicht blofs die **qualitativen** Beziehungen ihrer Objekte festzustellen sucht, sondern auch bemüht ist, die quantitativen Verhältnisse derselben zu bestimmen. Im Gegensatz zu andern Erfahrungswissenschaften, welche den Zusammenhang von Bedingendem und Bedingtem ohne Messungen vermitteln, bedient sich eine solche **mathematisch begründete** Wissenschaft vor allem der **Rechnung** um ihre **Gesetze** herzuleiten und dieselben scharf zu formulieren, sie drückt dieselben in **Gleichungen** aus und zwar in Gleichungen, deren Seiten stets **homogen** sind [1]).

Die Homogeneität der beiden Seiten einer Gleichung kann nicht scharf genug hervorgehoben werden. Wenn z. B. die Einheit der linken Seite eine Länge oder ein Gewicht oder eine Zeit-Dauer ist, so ist auch die Einheit der rechten Seite eine Länge oder ein Gewicht oder eine Zeit-Dauer. Scheinbare Abweichungen treten ein, wenn die Einheit der einen oder der anderen Seite in irgend welcher Verhüllung erscheint und erst durch Umformungen auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht werden mufs.

---

1) Es ist ein grofses pädagogisches Verdienst von Schellbach, diesem bereits von Poisson angedeuteten Umstand seine volle Aufmerksamkeit (Neue Elemente der Mechanik 1860) geschenkt zu haben.

Da alle Messungen nur innerhalb gewisser Grenzen, d. h. mit einem bestimmten Grade der Annäherung richtig sind, so kann die Rechnung, welche die Ergebnisse derselben benutzt, des Öfteren beträchtlich abgekürzt werden. Es ist zwecklos die Rechnung weiter auszudehnen, als es die vorgeschriebene (d. h. durch die Grenzen der Beobachtungsfehler bedingte) Genauigkeit einerseits fordert und andererseits zuläſst.

Eine **Erfahrungswissenschaft** verarbeitet ihr Material nach **induktiv-deduktiver** Methode.

Unter Induktion versteht man ein Verfahren, welches von der einzelnen Beobachtung (resp. Messung) aus zu allgemeinen und immer allgemeineren Beziehungen aufsteigt und so aus dem Bedingten auf die näheren und entfernteren Bedingungen schlieſst, während die Deduktion umgekehrt verfährt.

Die Deduktion, deren Wert lange überschätzt worden ist, dient im wesentlichen zur Prüfung und Berichtigung der auf induktivem Wege gewonnenen Ergebnisse und ist deshalb ein durchaus notwendiges Hülfsmittel der Erfahrungswissenschaften.

Wenn z. B. ein Philologe über den Gebrauch der Präposition cum aus den verschiedensten lateinischen Schriftstellern Material gesammelt und aus diesem gewisse Regeln abgeleitet hat, so kann die Prüfung dieser Regeln nur dadurch geschehen, daſs man die (deduktiv gewonnenen) Folgerungen derselben wiederum mit der Erfahrung vergleicht.

Eine rein induktive Methode giebt es nicht, wohl aber eine induktiv-deduktive, d. h. eine Methode, bei welcher die Induktion in erster Linie zur Geltung kommt, ohne doch der Deduktion entbehren zu können.

Man hat lange Zeit hindurch die Naturwissenschaften rein deduktiv zu behandeln versucht, indem man es unternahm, die Erscheinungen aus Bedingungen zu erklären, die man selbst mit mehr oder weniger Willkür konstruiert hatte. Der Erfolg war durchaus negativ; man gelangte zu keinen Erklärungen, so lange man es verschmähte, die Bedingungen der Erscheinungen aus diesen selbst herzuleiten.

Das Verfahren der Mathematik und jeder anderen Wissenschaft a priori muſs dagegen mit Recht als deduktiv bezeichnet werden. Hier handelt es sich nicht darum, Gesetze aus der Erfahrung abzuleiten, sondern darum, aus wohl formulierten Bedingungen Folgerungen zu ziehen.

Eine **Erfahrungswissenschaft** geht von den **beobachteten** (resp. auſserdem gemessenen) **Beziehungen** der einzelnen Erscheinungen aus und prüft den Zusammenhang von Bedingendem und Bedingtem, welcher sich so im einzelnen dargestellt hat, zunächst immer und immer wieder an der Erfahrung. Wenn die Control-Beobachtungen (resp. Messungen) die mutmaſslichen Beziehungen mehr und mehr bestätigen, so gelten dieselben als **Thatsachen.**

Es ist nicht ausgeschlossen, dafs eine neue Beobachtungsmethode oder (namentlich durch Vervollkommnung der Instrumente ermöglichte) genauere Beobachtungen die Ergebnisse früherer Beobachtungen, welche für festgestellt galten, berichtigt und also den Ausdruck für bestimmte Thatsachen mehr oder minder abzuändern zwingt.

Als Beispiel mag die Untersuchung über eine etwa vorhandene endliche Geschwindigkeit des Lichtes dienen.[1]). Descartes fand aus seinen Beobachtungen keinen Wert für eine solche und blieb daher bei der damals herrschenden Ansicht, dafs das Licht keine Zeit gebrauche, um sich fortzupflanzen. Olaf Roemer wies später auf anderem Wege nach, dafs die Geschwindigkeit des Lichtes eine endliche sei.

Wo eigene Beobachtung unmöglich ist und man also auf Angaben Anderer angewiesen ist (z. B. bei geschichtlichen Arbeiten), mufs man in der Anerkennung von Thatsachen äufserst vorsichtig sein; es giebt besondere Regeln für die wissenschaftliche Prüfung fremder Aussagen[2]).

Es handelt sich dann darum, aus den **einzelnen Thatsachen** ein **systematisch angeordnetes Ganzes** zu machen.

Neben die Beobachtung resp. Messung tritt die Verarbeitung des Materials durch Schlüsse und die Prüfung der Schlüsse am Material. Dabei darf das Ziel eines einheitlichen Abschlusses nie völlig aufser Acht gelassen werden, obwohl auch Fälle denkbar sind, in welchen die Beziehung auf den endlichen Abschlufs zurücktreten mufs. Die Voraussetzung für solches Arbeiten ist, dafs die Thatsachen selbst ein einheitlich-organisiertes Gebiet bilden . . . . sonst wäre die Forderung, das Wissen von denselben zu einem systematisch angeordneten Ganzen zu machen, eine sinnlose.

Den **Zusammenhang der Thatsachen** stellt man zunächst in einzelnen **Gesetzen** dar. Jedes Gesetz ist ein Ausdruck für eine bestimmte **Gleichförmigkeit des Geschehens,** d. h. für eine bestimmte Beziehung bedingender und bedingter Thatsachen, welche mittelbar durch Beobachtungen gefunden wurde und als allgemeingültig vorausgesetzt wird.

*Es verdient betont zu werden, dafs man eine **hie und da** beobachtete Gleichförmigkeit des Geschehens, gegen welche keine widersprechenden Thatsachen ins Feld geführt werden können, als eine **allgemeingültige** voraussetzt. Diese Voraussetzung hat ihre Berechtigung erlangt durch die Fruchtbarkeit ihrer Verwendungen, sie stützt sich auf das **Axiom von der Begreiflichkeit** der Welt gemäfs deren gesetzlicher Organisation[3]).*

---

1) Vgl. W. 4. S. 2.
2) Vgl. Zeller, Logik (Univ.-Vorles.).
3) Vgl. Helmholtz, die Thatsachen in der Wahrnehmung. Schluss.

Eine **Reihe** von **einzelnen Gesetzen** verbindet man in einer **Theorie** zu einem einheitlichen Ganzen.

Da keine Erfahrungswissenschaft abgeschlossen ist, so wird es jederzeit notwendig, Lücken im Zuhammenhange der einzelnen Thatsachen und der verbindenden Gesetze durch Annahmen auszufüllen, für welche zunächst nur die negative Bedingung gilt, dafs sie selbst und die aus ihnen gezogenen Folgerungen keiner Thatsache und keinem Gesetze widersprechen. Solche Annahmen nennt man ***Hypothesen****. Wenn schon erfahrungsmäfsig festgestellte Gesetze und Theorieen durch die Deduktion ihrer Folgerungen und die Prüfung dieser Folgerungen an der Erfahrung bestätigt werden müssen, so gilt das in noch höherem Mafse von allen hypothetischen Ausfüllungen der Lücken unseres Wissens. Je fruchtbarer sich eine durch Hypothesen gestützte Theorie erweist, um so wahrscheinlicher ist dieselbe. Die Aufstellung glücklich gewählter Hypothesen hat des Öfteren dazu geführt, neue Erscheinungen zu entdecken und neue Gesetze aufzufinden. Ein schlagendes Beispiel dafür ist die Gallesche Entdeckung (1846) des Planeten Neptun, dessen Existenz und Stellung auf Grund von Leverriers Beobachtungen und Rechnungen erschlossen werden konnte: die Entdeckung wurde möglich durch die hypothetische Verallgemeinerung der Fall-Gesetze, welche in Newtons Satz niedergelegt worden war.*

Andere Beispiele bietet die moderne Chemie, welche neue Verbindungen erst hypothetisch konstruiert und dann durch Versuche hergestellt hat, in grofser Fülle.

Das Ziel einer Erfahrungswissenschaft ist erreicht, wenn sie **alle** Thatsachen ihres Gebietes durch Vermittelung der beherrschenden Gesetze in **einer** Theorie zusammengefafst hat, von welcher man auf deduktivem Wege zu den einzelnen Thatsachen zurückzukehren im Stande ist.

Die Deduktion schreitet vom allgemeinen zum besonderen fort, entweder um aus anerkannten Sätzen logisch notwendige Folgerungen abzuleiten oder um die Folgerungen bestrittener Sätze an Thatsachen zu prüfen und damit über die Berechtigung der problematischen Thesen zu entscheiden (direkter und indirekter Beweis). Innerhalb der Erfahrungswissenschaften sind die allgemeinen Sätze, von denen die Deduktion ausgeht, stets durch Induktion gewonnen. Bei mathematisch begründeten Erfahrungswissenschaften wird im speciellen auch mathematische Deduktion (z. B. Rechnung) auftreten, wenn es sich darum handelt, einzelne Gesetze oder ganze Theorieen an der Erfahrung zu prüfen. In wie weit es in einer Wissenschaft möglich ist, den geforderten Abschlufs zu erreichen, das kann im allgemeinen nicht bestimmt werden.

Als klassisches Beispiel für die induktiv-deduktive Methode der Erfahrungswissenschaften können die Kepler-Newtonschen Arbeiten über die Bewegung der Himmelskörper dienen.

Die alexandrinische Schule hatte dem ptolemäischen Weltsystem

zur Herrschaft verholfen, in welchem die Erde die centrale Stellung einnimmt, welche der Sonne zukommt. Im Jahre 1543 erschien das Buch von den ‚Bahnen der Himmelskörper‘ von Nikolaus Kopernikus, in welchem die Doppelbewegung der Erde (um ihre Achse und um die Sonne) gelehrt wurde. Damit war zunächst der älteren Hypothese, welche jene Epoche beherrschte, eine neue [1]) Hypothese entgegengestellt und nun handelte es sich darum, zu entscheiden, welcher von beiden der Sieg gebühre. Während einerseits Galilei durch die Entdeckung der Jupiter-Trabanten auf eine ‚Welt im Kleinen‘ hinwies, an welcher man die Annahmen des grofsen Astronomen von Thorn prüfen konnte [2]), unternahm es andererseits Kepler, durch Beobachtung eines bestimmten Planeten (Mars) Zahlen abzuleiten, welche über die fraglichen Bewegungsverhältnisse Auskunft geben konnten. Aus diesen Messungen folgte, dafs der Mittelpunkt des Mars eine bestimmte, geschlossene, ebene Kurve und zwar eine Ellipse beschreibt und dafs der Mittelpunkt der Sonne in dem durch die Planeten-Bahn begrenzten Ebenen-Stücke seine feste Stellung hat. Aus den Messungen folgte ferner, dafs die Verbindungs-Linie vom Sonnen-Mittelpunkt und Mars-Mittelpunkt in gleichen Zeiten gleiche Ebenen-Stücke beschreibt.

Diesen beiden Gesetzen (1609) konnte Kepler später (1618) noch ein drittes hinzufügen, welches den Zusammenhang zwischen der Zeit eines Umlaufes des Planeten und der Gestalt seiner Bahn aufdeckte.

Die Messungen Keplers schienen zunächst auf eine elliptische Bahn des Planeten-Centrums hinzuweisen, so dafs die Existenz einer so bestimmten Bahn vorläufig als Thatsache hingestellt werden durfte. Aus dieser Thatsache folgten durch Rechnung bestimmte Angaben über die Stellung der Planeten und diese durch mathematische Deduktion gewonnenen Folgerungen mufsten wiederum an der Erfahrung geprüft werden etc.

Indem man die für das Verhältnis von Sonne und Mars gewonnenen Gesetze auf alle Planeten des Sonnensystems ausdehnte, machte man eine Hypothese, welche wiederum an der Erfahrung geprüft werden mufste. Als dann Newton nachwies, dafs sich alle diese Gesetze in einer Theorie vereinigen liefsen, welche die einzelnen Thatsachen deduktiv zu ermitteln gestattete, da war ein grofses Gebiet von Erscheinungen einheitlich aufgefafst worden: die Bewegungen der Himmelskörper gehen so vor sich, als wenn sie sich direkt proportional ihren Massen und umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Central-Entfernung anzögen.

Ob man nun wirklich Anziehungs-Kräfte anzunehmen hat oder ob sich diese Kräfte noch weiter auflösen lassen oder ob man den

---

1) welche allerdings einzelne Vorläufer hatte.
2) Vgl. W. 4. S. 2.

Begriff der Kraft ganz entbehren kann, das sind Fragen, deren Beantwortung zwar für die Deutung der Theorie nicht gleichgültig ist, welche aber den erfahrungsmäfsig festgestellten Zusammenhang der Erscheinungen durchaus nicht anzutasten vermögen.

Das induktiv-deduktive Verfahren der „Wissenschaften a posteriori“ steht und fällt mit der Voraussetzung, dafs die Gebiete derselben in sich gesetzmäfsig organisiert sind. Das Axiom von der Begreiflichkeit der Erscheinungen [1]) ist aber überhaupt der Grundpfeiler der modernen Wissenschaft . . . man kann denselben nicht umstürzen, ohne zugleich die Wissenschaft selbst zu vernichten.

2. Das Gebiet der Physik.

Die **Physik** [2]) hat einerseits die Aufgabe, **die mechanische Grundlage für die in der Natur gegebenen Bewegungen festzustellen** und hat andererseits die Aufgabe, die **Empfindungen, welche diesen Bewegungen entsprechen, in systematischem Zusammenhange zu beschreiben.**

Aus dem relativ grofsen Gebiete aller möglichen Bewegungen hat die Physik den relativ-kleinen Teil auszuscheiden, welcher wirklichen Bewegungen entspricht. Die Mechanik wird z. B. untersuchen dürfen, welche Bewegungen in einem Systeme von Kugeln vor sich gehen, wenn sich dieselben direkt proportional der 1ten, 2ten, 3ten etc. Potenz ihrer Central-Entfernungen anziehen, während es der Physik obliegt nachzuweisen, ob solche Bewegungen in der Natur vorkommen und unter welchen Umständen sie dort etwa auftreten. Andererseits steht erfahrungsmäfsig fest, dafs gewissen Bewegungen stets nur Licht-Empfindungen, anderen aber immer nur Schall-Empfindungen, noch anderen wiederum nur Wärme-Empfindungen entsprechen etc. Diese Korrespondenzen im einzelnen festzustellen und nachzuweisen, in welcher Art Gruppen von Bewegungen und Gruppen von Empfindungen zusammenhängen, das ist der andere Teil der Aufgabe, welche der Physik obliegt.

Das **Bewegliche** ist für die **Mechanik** schlechthin ein **Raum-Gebilde,** d. h. ein Punkt oder irgend ein Punkt-System, während die **physischen Bewegungen** von vornherein als **Bewegungen von Körpern,** d. h. von dreifach ausgedehnten Gebilden, aufgefafst werden müssen. Es fragt sich nun, welche Punkt-Systeme für die Darstellung physischer Körper geeignet erscheinen, d. h. welche Anordnung und welche Beschaffenheit von Punkten vorausgesetzt

1) Im Sinne Kants. Vgl. W. 5. S. 17.

2) Herwig, Physikalische Begriffe, sagt: Die Naturerscheinungen, deren Erklärung der Physik obliegt, sind Bewegungserscheinungen. Vgl. auch Buff, Lehrbuch der physikalischen Mechanik, I, 1: „Bewegung ist der natürliche Zustand der ganzen Körperwelt“ etc.

werden mufs, wenn man zu möglichst genauen Abbildern der Naturkörper gelangen will.

Bei dieser Frage scheint es sich zunächst noch gar nicht um Bewegungsverhältnisse irgend welcher Art zu handeln. Man gelangt hier zu dem Hauptproblem einer eigenen Wissenschaft, welche Physische Geometrie genannt (Helmholtz) werden kann [1]. *Teile derselben sind bisher wohl nur in einzelnen Kapiteln der Mechanik dargestellt worden, obgleich jede Messung, bei welcher man mathematische Vorstellungen für die Praxis verwendet, die Anwendung gewisser Sätze der physischen Geometrie voraussetzt. Es fehlt hier noch an geschlossenen Darstellungen des Ganzen und an scharfer Begrenzung der einzelnen Teile.*

Auf die Frage, was ein physischer Körper sei, giebt es nur eine Antwort: **Alles, was wir mit unsern Sinnen wahrnehmen, gestaltet sich uns zu einem räumlich-ausgedehnten Ganzen, dessen einzelne Teile Körper genannt werden** [2].

Es verdient bemerkt zu werden, dafs auch unser ***eigener*** *Körper in diesem Ganzen seine Stelle hat, wie jeder andere Körper. Für das schauende Auge ist der Gipfel eines fernen Berges ebensowohl Aufsenwelt, wie irgend ein Glied des zugehörigen Körpers, für den tastenden Finger ist der benachbarte Finger ebensowohl Aufsenwelt, wie die Wölbung eines nahen Thürbogens etc.*

Obwohl die **einzelnen** Teile gegen einander eine gewisse, **gesetzmäfsig** bestimmte, **Selbständigkeit** zeigen, so **können** wir einen **physischen Körper** doch nur **in unsern eigenen Empfindungen** beschreiben.

Diese Bemerkung folgt unmittelbar aus dem oben Gesagten, wenn man sich erinnert, dafs die Elemente des von den Sinnen Dargebotenen, insofern sich dasselbe räumlich anordnet, Empfindungen genannt werden. Diese Verhältnisse sind zum ersten Male von Arthur Collier (1703) und George Berkeley (1709) klar übersehen worden. Letzterer sagt (1710) in seinen Abhandlungen über die Principien des menschlichen Erkennens: „Der Geruchssinn verschafft uns Gerüche, der Geschmackssinn Geschmacksempfindungen, der Sinn des Gehörs führt dem Geiste Schallempfindungen zu in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit nach Ton und Zusammensetzung. Da nun beobachtet wird, dafs einige von diesen Empfindungen einander begleiten, so geschieht es, dafs sie mit einem Namen bezeichnet und infolge dessen als ein Ding betrachtet werden. Ist z. B. beobachtet worden, dafs eine gewisse Farbe, Geschmacksempfindung, Geruchsempfindung, Gestalt und Festigkeit vereint auftreten, so werden sie für ein bestimmtes Ding gehalten, welches durch den Namen Apfel bezeichnet wird.

---

1) Vgl. das Vorwort.

2) Vgl. auch Buff, Lehrbuch I, 38: Stoff ist alles sinnlich Wahrnehmbare.

Andere Gruppen bilden einen Stein, einen Baum, ein Buch und ähnliche sinnliche Dinge“. Es ist in der That die Zusammengehörigkeit bestimmter Empfindungen, nicht mehr und nicht weniger, welche uns veranlaſst, die einzelnen Körper in dem Ganzen unserer Empfindungen von einander abzugrenzen.

Ein bestimmter Körper wird, so weit er uns sinnlich bekannt ist, durch eine bestimmte Gruppe zusammengehöriger Empfindungen gebildet, für welche im übrigen die räumliche Anordnung charakteristisch ist: derselbe läſst sich definieren als ein unbekanntes Etwas im Raume, welches unter diesen Bedingungen diese, unter jenen Bedingungen jene Empfindungen in uns hervorruft [1].

Da sich die Beschaffenheit eines bestimmten physischen Körpers nur durch eine bestimmte Gruppe von Empfindungen darstellen läſst, so wird man das **Charakteristische** des **physischen Körpers** überhaupt nur durch die **Analyse** von **Empfindungs-Gruppen** ermitteln können.

Dabei spielen die Sinnesgebiete des Tastens und des Sehens eine ganz hervorragende Rolle. Gruppen von Gesichts-Empfindungen und vor allem Gruppen von Tast-Empfindungen [2] *bilden gewissermaſsen die Skelette der Körper, welche andern Empfindungen Halt gewähren. Es kann kein physischer Körper vorgestellt werden, welcher nicht unter gewissen Bedingungen getastet oder gesehen werden könnte, während man sich durchaus nicht alle Körper immer tönend oder immer warm oder immer riechend vorzustellen pflegt. Daſs in letzter Instanz für alle Sinnes-Gebiete kongruente Beziehungen gelten und daſs scheinbare Abweichungen auf eine ungleiche Ausbildung der Sprache etc. zurückzuführen sind, soll hier wenigstens erwähnt werden.*

Einer bestimmten **Empfindungs-Gruppe** läſst sich stets eine bestimmte **Gruppe von Bewegungen** zuordnen, welche für dieselbe durchaus **charakteristisch** ist.

Hier ist von vornherein jeder Ansicht, welche Empfindungen auf Bewegungen zurückzuführen versucht, mit aller Schärfe entgegenzutreten. Man kann nur feststellen, daſs einer Empfindung, z. B. dem Blau der Kornblume eine bestimmte Bewegung zugeordnet werden kann, welche von einer andern Bewegung, die vielleicht dem Tone a entspricht, völlig verschieden ist.

Man hat demnach jeden **physischen Körper** als **ein in steter Bewegung befindliches Etwas** anzusehen, dessen einzelnen **Bewegungen**, insofern dieselben wahrgenommen werden, ganz bestimmten **Empfindungen** entsprechen.

---

1) Auf die Verschiedenheit der beiden Definitionen braucht wohl kaum hingewiesen zu werden. Die erste entsteht aus der zweiten durch Elimination des unbekannten Etwas, mit dem die Wissenschaft doch nichts anfangen kann.

2) Bei Lähmung aller andern Sinnesgebiete (Laura Bridgeman) genügt der Tastsinn zur Ausbildung der Vorstellungen von der räumlich angeordneten Körper-Welt. Vgl. Wundt, Phys. Psych. II, 13.

In Erinnerung an die Relativität des Begriffes „Bewegung“ kann man die Bewegungen eines physischen Körpers als gegenseitige Lagen-Änderungen seiner Elemente präcisieren, wobei mit dem Wort „Element“ nur der oben erläuterte Sinn zu verbinden ist. ***Was*** *schliefslich das in Bewegung befindliche* ***Etwas*** *ist, bleibt völlig dunkel* [1].

Die **Empfindungen** sind nach **Qualität** und **Intensität** bestimmt, d. h. sie haben eine bestimmte Beschaffenheit und eine bestimmte Stärke.

Qualitäten sind z. B. blau, süfs, wohlriechend, schrill, kalt, rauh etc.

Hier mag daran erinnert werden, dafs Zustände der ***Lust*** *und* ***Unlust*** *in der Wissenschaft als* ***Gefühle*** *von den* ***Empfindungen*** *streng zu scheiden sind, während der Gebrauch des gemeinen Lebens Fühlen und Empfinden beständig durch einander mengt. Das Empfundene ist stets irgendwo im Raume, das Gefühl kann erst durch Beziehung auf Empfundenes lokalisiert werden* [2].

Demnach wird man auch die **physischen Bewegungen** in **zweifacher** Hinsicht bestimmt denken müssen. Gemäfs der Qualität der entsprechenden Empfindungen wird eine Klassifikation der Bewegungen eintreten können, während das allen Empfindungen gemeinsame Moment „eine gewisse Stärke zu haben“ auf eine allen Bewegungen gemeinsame Bestimmung hinweist.

Diese Korrespondenzen zu begründen ist Sache der modernen Psychologie, welche sich am besten als ***physiologische*** *Psychologie charakterisieren läfst.*

Nach der **Beschaffenheit** zerfällt das Ganze der menschlichen Empfindungen in **sechs** Qualitäten-Kreise [3], welche den Sinnesgebieten des Menschen, wie sie Anatomie und Physiologie abgrenzen, völlig entsprechen.

Jedem Sinnesgebiet korrespondiert ein bestimmtes körperliches Organ, das in enger Verbindung mit dem Central-Nerven-Systeme steht. Die einzelnen Organe sind nicht in gleichem Grade ausgebildet. Am besten entwickelt sind Auge und Ohr mit ihrem Zubehör, am wenigsten entwickelt ist das System der Nerven-Endigungen, welches für die Aufnahme von Tast- und Wärme-

---

1) Ein Körper ist schliefslich für die Physik eine Gruppe von Bewegungen. Nennt man das Bewegliche „Stoff“, so bezeichnet man das Unbekannte mit einem Namen und macht es dadurch scheinbar bekannt. Es liegt gar kein Grund vor, in irgend einer Hinsicht über die Bewegung selbst zum Beweglichen fortzugehen, welcher sich schliefslich nur als ein Erbstück aus den Zeiten des scholastischen Realismus entpuppt.

2) Vgl. die Literaturangabe in W. 5. I.

3) Das Wort stammt von J. G. Fichte. Im Anschlufs an Helmholtz sprechen einzelne Forscher von den sechs Modalitäten der Empfindung und von den Qualitäts-Unterschieden bei gleicher Modalität. Vgl. Helmholtz, die Thatsachen, S. 9.

Empfindungen gemacht ist. Dafs trotzdem eine äufserst feine Ausbildung des Tastsinnes vorhanden ist, liegt daran, dafs die Beweglichkeit der tastenden Glieder eine relativ grofse ist.

Die sechs Qualitäten-Kreise entsprechen den Tast-, Wärme-, Geruchs-, Geschmacks-, Licht- und Ton-Empfindungen.

Man vergifst oft, dafs es ohne ein sehendes Auge ebensowenig Licht giebt, wie es ohne schmeckende Gaumpapillen einen Geschmack oder ohne geruchvermittelnde Nervenenden Gerüche giebt. Die Sprache ist eben in diesem Gebiete nicht gleichmäfsig ausgebildet.

Die Unterschiede innerhalb **eines** Qualitäten-Kreises treten gegen die Unterschiede verschiedener Qualitäten-Kreise um ein Bedeutendes zurück, sie sind in gewissem Sinne vergleichbar.

Eine Vergleichung zwischen „blau“ und „süfs“ ist unmöglich, nicht aber eine solche zwischen zwei Tönen oder zwischen zwei Gerüchen.

Die moderne Psychologie hat den äufserst wichtigen Satz gefunden, dafs die **Qualität der Empfindungen** stets mit der **Form der Bewegungen** korrespondiert, welche denselben entsprechen.

Unter der Form einer Bewegung ist die Gesamtheit der Bahnen (Wege) zu verstehen, welche die an der Bewegung beteiligten Punkte durchlaufen. So sind z. B. grade Linie, Kreis, Ellipse, Schraubenlinie etc. bestimmte Formen der Bewegung eines Punktes, Strahlenbüschel, Kreisscharen, Ellipsenbündel, Systeme von Schraubenlinien etc. bestimmte Formen der Bewegung eines Punkt-Aggregates etc.

Einem bestimmten **Qualitäten-Kreise der Empfindungen** entspricht eine bestimmte **Klasse materieller Bewegungen.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Korrespondenz von Empfindungs-Qualität und Bewegungs-Form.

Demnach hat man zu unterscheiden:

1. Bewegungen, denen Tast-Empfindungen entsprechen,
2. Bewegungen, denen Wärme-Empfindungen entsprechen,
3. Bewegungen, denen Geruchs-Empfindungen entsprechen,
4. Bewegungen, denen Geschmacks-Empfindungen entsprechen,
5. Bewegungen, denen Ton-Empfindungen entsprechen und
6. Bewegungen, denen Licht-Empfindungen entsprechen.

Ein physischer Körper, welcher sich als eine bestimmte Gruppe von Bewegungen darstellt, ist uns zunächst als eine bestimmte Gruppe von Empfindungen gegeben, welche durchaus nicht einem ***einzigen*** *Kreise zu entstammen brauchen.*

Ein in Brand befindlicher Feuerwerks-Körper, z. B. ein Feuerrad, ruft in uns gleichzeitig gewisse Licht-, Ton-, Geruchs-Empfindungen etc. hervor.

Was nun das gemeinsame Moment aller physischen Bewegungen anbelangt, so wurde bereits bemerkt, dafs den Empfindungen **aller**

Qualitäten-Kreise eine bestimmte **Intensität** zukommt und dafs aus diesem Umstande wiederum auf eine gewisse Korrespondenz zwischen Bewegung und Empfindung geschlossen werden darf

In der That findet sich eine solche allgemeine Eigenschaft. Es ist wiederum ein äufserst wichtiger Satz der modernen Psychologie, dafs die **Intensität der Empfindungen** stets mit der **Energie der Bewegungen** korrespondiert, welche denselben entsprechen.

Unter der Energie einer physischen Bewegung ist jenes eigentümliche Moment derselben zu verstehen, welches man im gemeinen Leben bald Wirksamkeit, bald Stärke, bald Wucht, Gewalt etc. nennt [1]).

Die Energie der Bewegung ist verschieden für eine geworfene und für eine abgeschossene Büchsenkugel, sie ist wiederum eine andere für den seine Bahn durcheilenden Planeten.

Um das Korrespondenzgesetz zu specialisieren, mag bemerkt werden, dafs z. B. die Stärke einer Ton-Empfindung in bestimmter Beziehung zu der Energie der entsprechenden Luft-Bewegung steht: das leise Säuseln entspricht einer gelinden, der laute Knall einer äufserst starken Erschütterung der Luft.

Der Begriff der **Energie** als eines **Mafses** für die **Wirksamkeit** der **physischen Bewegungen** bildet den Mittelpunkt der modernen Physik.

Die Energie der Bewegungen bestimmt die Gröfse ihrer gegenseitigen Hemmungen und Förderungen. Auf den Begriff der Energie gründet sich diejenige Spezialform der Dynamik, welche der Physik als Basis dient, d. h. diejenige Form, deren Verwendbarkeit für die Lösung der in der Natur gegebenen Probleme durch den Erfolg erwiesen wurde.

Da die Intensität der Empfindungen im allgemeinen **mit** der Energie der entsprechenden Bewegungen **wächst** [2]), so hat man in der **unmittelbar** gegebenen Abschätzung der Empfindungs-Stärke zugleich ein Mafs für die korrespondierende Energie.

*Diese Abschätzung der Empfindungs-Stärke beruht auf dem Verhältnisse, in welchem die äufsern Bewegungen zu den durch sie im Nerven-Systeme hervorgerufenen, Gegenbewegungen (Innervationsbewegungen) stehen. Dafs **keine** Empfindung **ohne** Innervation zu Stande kommt, ist wiederum ein wichtiger Satz der modernen Psychologie, welcher übrigens noch etwas allgemeiner* [3]) *gefafst werden kann.*

Man sollte nie vergessen, dafs wir stets unmittelbar oder

1) Statt der Definition hat überall der Hinweis auf die Thatsache einzutreten, sobald es sich um etwas handelt, das man nicht definieren kann. Vgl. W. 5. S. V.

2) Die Art dieser Abhängigkeit (Webersches Gesetz) ist augenblicklich Gegenstand lebhafter Diskussionen.

3) Kein Bewufstsein ohne Willensthätigkeit. Vgl. Wundt, Physiologische Psychologie II, 4 und W. 5. S. 6.

mittelbar ***aus*** *der* ***Stärke*** *unserer Empfindungen auf die Energie von Bewegungen* ***schliefsen***, *ja dafs wir eine solche überhaupt nur annehmen, weil wir das Ganze der Erscheinungen, welches einer Empfindung korrespondiert, in einen geistigen* [1]) *und in einen körperlichen Teil zerlegen und beide Teilvorgänge einander genau entsprechen lassen, also im besonderen aus der Stärke der Empfindung auf eine bestimmte Stärke der korrespondierenden Bewegung schliefsen.*

Das Geistige ist stets das unmittelbar Gegebene, das Körperliche das Erschlossene, also mittelbar Gegebene.

Weil wir die Energie dieser oder jener Bewegung (z. B. bei einem, auf unsern Fufs geworfenen, Stein oder bei unserem, gegen einen Balken gestofsenen, Kopfe etc.) an der Stärke der entsprechenden Empfindung kennen gelernt haben, deshalb schreiben wir auch bei einer vorüberfliegenden Kugel der Bewegung eine bestimmte Energie zu, obwohl dieselbe ja auch ganz energielos sein könnte.

Jede *Bewegung von* ***bestimmter*** *Energie zu denken, wird schliefslich nur durch das Ergebnis einer Reihe von Induktionsschlüssen gefordert, welche in letzter Instanz auf die Erfahrung zurückgreifen, dafs einzelne Bewegungen ihre Energie durch die Intensität entsprechender Empfindungen kund gegeben haben.*

Im Hinblick auf die verschiedene **Qualität** der **Empfindungen** hat man verschiedene **Formen** der Energie zu unterscheiden.

Die Energie einer Bewegung, welcher Licht-Empfindungen entsprechen, steht z. B. der Energie einer Bewegung, welcher Ton-Empfindungen entsprechen, entgegen: Energie der Licht-Bewegung und Energie der Ton-Bewegung sind zwei verschiedene Formen der Energie.

Durch die hier eingeführte Bezeichnung (Form der Energie), welche übrigens allgemein eingebürgert ist, hebt man das gemeinsame Moment aller physischen Bewegungen nachdrücklich hervor, ohne doch die Verschiedenartigkeit der Bewegungsgruppen aufser Acht zu lassen, welche durch die Qualität der entsprechenden Empfindungen bestimmt wird.

Es ist ein wichtiger **Erfahrungssatz**, dafs sich Bewegungen der verschiedenen Gruppen in einander verwandeln können, dafs also **eine Form der Energie** in eine **andere Form der Energie übergehen** kann.

Dieses Theorem heifst der Satz von der **Transformation** der **Energie.**

In der hier gegebenen Darstellung verschwindet das Mystische

---

1) Dieser geistige Teil ist die Empfindung und ihr Geleitgefühl und aufserdem fremde und eigene Thätigkeit — der körperliche Teil ist Aktions-Bewegung, Reaktions-Bewegung und Deformation. Der Empfindung und dem Gefühle entspricht die Deformation etc. Vgl. W. 5. S. 6 fg.

dieser Beziehungen. Es scheint von vornherein klar, dafs verschiedene Bewegungs-Formen in einander übergehen können und dafs dabei natürlich die der Bewegungs Form entsprechende Qualität der Empfindung bez. einem Wechsel unterliegt.

Wenn also z. B. statt einer Licht-Bewegung eine Wärme-Bewegung auftritt, so hat man anzunehmen, dafs die Bewegungs-Form, welcher Licht-Empfindungen entsprechen, übergegangen ist in eine Bewegungs-Form, welcher Wärme-Empfindungen entsprechen. Ein solcher Fall tritt ein, wenn die Sonne einen Körper bescheint. Die Licht-Bewegung, welche von der Sonne ausgeht, erregt in dem beleuchteten Körper einerseits Licht-Bewegungen und andererseits Wärme-Bewegungen. Die Licht-Bewegungen sind vorhanden, denn wir sehen den Körper; die Wärme-Bewegungen sind vorhanden, denn wir empfinden die Wärme des beleuchteten Körpers. Im ersten Falle hat eine Erregung von Bewegungen derselben Form, d. h. eine Übertragung derselben Bewegungs-Form, im zweiten Falle hat ein Übergang von einer Form zur andern, d. h. eine Transformation statt gefunden.

Energie kann als **Mafs** für die **Wirksamkeit** der physischen Bewegungen ebensowenig unabhängig von der Erfahrung definiert werden, wie etwa **Länge** oder **Zeit-Dauer.**

Alle Versuche, die Energie auf andere Art klar zu machen als durch den Hinweis auf die Thatsache, sind fehlgeschlagen, weil sie sich durchaus in Zirkeln bewegen müssen. Man kann auch niemandem begreiflich machen, was grün ist, wenn er es nicht selbst empfindet oder es doch einmal selbst empfunden hat.

Eine Analyse des Begriffes **Energie** gestattet, denselben auf die bekannten Begriffe von **Länge** und **Dauer** und aufserdem auf den noch unbekannten Begriff der **Masse** zurückzuführen, so dafs die **Einheit** der **Energie** auf **Einheiten** der **Länge, Dauer** und **Masse** zurückweist.

Die Energie einer Bewegung ist das unmittelbar Gegebene, die Masse einer Bewegung das mittelbar Gegebene. Es zeigt sich aber, dafs man bei gegebener Masse unter Bezugnahme auf Längen- und Zeit-Einheiten stets einen Ausdruck für die Energie finden kann.

Diese Zurückführung ist von hoher Bedeutung, weil die **Energie** eines bewegten Körpers unter verschiedenen Umständen **verschieden** ist, während die **Masse** desselben unter allen Umständen **konstant** ist.

Schleudert man dieselbe Büchsenkugel einmal mit der Hand, während man dieselbe ein anderes Mal aus einem Gewehre abschiefst, so ist die Energie der Bewegung im ersten Falle bei weitem kleiner als im zweiten, während die Masse in beiden Fällen dieselbe ist.

Es ist ein **Erfahrungssatz**, dafs es für **jeden** Körper einen

bestimmten **Zahlen-Koëfficient seiner Wirksamkeit** giebt, welcher bei jeder Bewegung desselben für den Wert der Energie mafsgebend ist. Diesen **Zahlen-Koëfficient** nennt man die **Mafs-Zahl der Masse** des Körpers.

Das so bestimmte Theorem heifst der Satz von der **Konstanz der Masse.**

Was die Masse selbst ist, bleibt völlig dunkel [1]. *Wenn man dieselbe als „Menge der Materie“, als „das, was Widerstand leistet“, als das „Träge“ etc. definiert, so umschreibt man nur mehr oder weniger geschickt, dafs man es hier mit einem Etwas zu thun hat, das unserem Ich als etwas Fremdes (als ein Nicht-Ich) entgegentritt. Die Grund-Thatsache bleibt, dafs wir uns selbst bei jeder Empfindung als das Empfindende von dem Fremden als dem Empfundenen unterscheiden und dessen Wirksamkeit in Bezug auf unsere eigene Wirksamkeit der Stärke nach in der Empfindungs-Intensität abschätzen. Diese psychische Grund-Thatsache kann im Hinblick auf den Erfahrungssatz, dafs es möglich ist, für jeden Körper eine Konstante der Wirksamkeit abzusondern, auf verschiedene Weise interpretiert werden.*

Die Erfahrung hat gelehrt, dafs die Physik alle Mafs-Zahlen, deren sie bedarf, aus den Mafs-Zahlen von Längen, Zeit-Dauern und Massen zusammenzusetzen im Stande ist, dafs sie also **alle** ihre Gröfsenarten auf **drei** verschieden geartete Gröfsen zurückzuführen vermag und dafs demnach jede physikalische Gröfse als ein Rechnungsausdruck in Längen-, Zeit- und Massen-Einheiten erscheinen mufs.

Die eigentümliche Beschaffenheit eines solchen Rechnungsausdrucks, welcher eine bestimmte physikalische Gröfsenart darstellt, nennt man die **Dimension** [2] **der Gröfse.**

Bezeichnet man Länge, Zeit-Dauer und Masse der Reihe nach durch l, t *und* m, *so charakterisieren die Ausdrücke* l^2, l^3, $\frac{l}{t}$, $\frac{l}{t^2}$, $\frac{m \cdot l}{t^2}$, $l^2 \cdot m$ *etc. bestimmte physikalische Gröfsen.*

Der Dimension l^2 *entspricht z. B. eine Fläche, der Dimension* l^3 *ein Volumen (Raumteil), der Dimension* $\frac{l}{t}$ *eine eigentümliche physikalische Gröfse, welche Geschwindigkeit heifst etc.*

Als **Einheiten** für die Bestimmung von **Länge, Masse** und **Dauer** wählt man **Meter, Gramm** und **Sekunde mittlerer Zeit,** resp. gewisse Vielfache oder aliquote Teile dieser Einheiten.

---

1) Das ist sehr natürlich, weil wir hier eine verblafste Personifikation der Konstanz eines Zahlen-Verhältnisses vor uns haben und weil aus dem Begriffe dieser oder jener Substanz nur gerade soviel herausgenommen werden kann, als man hineingelegt hat. Vgl. W. 5. S. V.

2) Nach dem Vorgange von Maxwell und Jenkin, Rep. Brit. Assoc. 1863, S. 132.

Dieses Maſs-System, welches innerhalb der Wissenschaft allgemein angenommen ist, soll bald ausführlich erläutert werden. Hier mag nur betont werden, daſs die der Physik eigentümliche Gröſse, welche man Masse nennt, durch das Gramm gemessen wird, d. h. sich in Gewichten ausdrücken läſst. Dabei ist allerdings zu bemerken, daſs der Sprachgebrauch des gemeinen Lebens das Wort „Gewicht" in doppelter Hinsicht benutzt und darunter bald ein Maſs für die Menge einer Ware (Masse), bald ein Maſs für den Druck eines Körpers versteht.

Die **Dimension** einer physikalischen Gröſse **ändert** sich **nicht,** wenn für ihre Bestimmung **statt einer Einheit** eine **andere Einheit** derselben Art eingeführt wird, während die **Maſs-Zahl** einer physikalischen Gröſse von den **gewählten** Einheiten durchaus **abhängig** ist.

Daſs man Einheiten nur durch Einheiten derselben Art ersetzen darf, ist selbstverständlich: es lassen sich weder Meter mit Grammen, noch Sekunden mit Dukaten etc. vertauschen. Eine Reduktions-Gleichung, welche verschiedene Einheiten verbindet (z. B. 1 Mark = 100 Pf.), führt demnach stets, ohne die Dimension zu ändern, zu andern Zahlen.

So geht z. B. für 1 Quadratmeter, dessen Dimension stets l^2 *ist, die Maſs-Zahl 1 in 1 000 000 über, wenn man die Einheit Meter durch Millimeter ersetzt.*

So geht ferner für 1 Kubik-Millimeter, dessen Dimension stets l^3 *ist, die Maſs-Zahl in 0,001 über, wenn man die Einheit Millimeter durch Centimeter ersetzt.*

Die **Energie** einer Bewegung läſst sich als eine **physikalische Gröſse** von **bestimmter Dimension** darstellen.

Man kann zunächst durch Erfahrung feststellen, daſs unter sonst gleichen Verhältnissen die Energie (E) einer Bewegung mit der Maſs-Zahl der bewegten Masse wächst und abnimmt, daſs man also einen Rechnungsausdruck für E konstruieren muſs, bei welchem E gleichzeitig mit m wächst und abnimmt. Ein solcher Ausdruck wäre z. B. $E = k \, . \, m$ *oder* $E = k_0 \, . \, m^0 + k_1 \, . \, m^1$ *oder* $E = k_0 \, . \, m^0 + k_1 \, . \, m^1 + k_2 \, . \, m^2 + k_3 \, . \, m^3$ *etc., wobei die Gröſsen* k, k_0, k_1, k_2, k_3 *irgend welche positive Zahlen bedeuten sollen: in jedem dieser Fälle wird E zugleich mit m gröſser und kleiner.*

Andere Erfahrungen führen dann dazu, daſs E auch von den Maſs-Zahlen bestimmter Längen und Zeit-Dauern abhängt.

Es giebt nun eine Reihe von Ausdrücken, welche allen diesen Erfahrungen gerecht werden, so daſs eine gewisse Willkür für die Festsetzung der Dimension der Energie herrscht. Man kann das Wort „Energie" unter den gegebenen Umständen auf mannigfache Weise in einem mathematischen Ausdruck, der aus l, m und t gebildet wird, übersetzen und muſs infolge dessen irgend eine bestimmte Auswahl treffen, durch welche man dieser Vieldeutigkeit ein für alle Mal ein Ende macht.

Es hat sich zweckmäfsig erwiesen, das **Wort „Energie“** durch eine physikalische Gröfse von der Dimension $\mathbf{l^2 . m . t^{-2}}$ darzustellen.

Diese Festsetzung ist innerhalb der Wissenschaft als eine allgemeingültige zu betrachten. Nachdem das Wort „Energie“ auf diese Weise eine ganz bestimmte Bedeutung erhalten hat, ergiebt sich auch die Mafs-Zahl der Energie einer Bewegung in jedem Falle aus den Mafs-Zahlen der bestimmten Längen, Zeit-Dauern und Massen in Bezug auf deren Einheiten. Wenn sich z. B. der Mittelpunkt einer Messingkugel von der Masse 3 Kilogramm in 7 Sekunden um 5 Meter in gerader Linie fortbewegt, so ist die mittlere Energie der Bewegung

$$\left(\frac{5\ Meter}{7\ Sekunden}\right)^2 . 3\, kg = 5^2 . 3 . 7^{-2} \frac{Meter . Meter}{Sekunden . Sekunden} . Masse,$$

wenn sich dagegen der Mittelpunkt einer Messingkugel von der Masse 7 kg in 3 Sekunden um 9 m fortbewegt, so ist die mittlere Energie der Bewegung

$$\left(\frac{9\ Meter}{3\ Sekunden}\right)^2 . 7\, kg = 9^2 . 7 . 3^{-2} \frac{Meter . Meter}{Sekunden . Sekunden} . Masse.$$

Ändert man die Einheiten und verwandelt z. B. die Meter in Fufs, Kilogramme in Pfunde, Sekunden in Tage, so ändert sich die Mafs-Zahl der Energie, aber ihre Dimension bleibt immer $l^2 . m . t^{-2}$. *Gewöhnlich nimmt man die Hälfte der hier berechneten Energie zur Einheit, eine Festsetzung, welche an dieser Stelle noch nicht berücksichtigt zu werden braucht, welche aber doch erwähnt werden soll, zumal dieselbe später eingeführt werden wird.*

Infolge dieser Festsetzungen hat nun das Wort „Energie“ eine scharf begrenzte Bedeutung, welche die **Energie** in jedem Falle als eine nach **Dimension** und **Mafs-Zahl** bestimmte **Gröfse** der Physik erscheinen läfst und also mit der Energie verschiedener Bewegungen zu **rechnen** gestattet.

Die unbestimmte Bezeichnung „Stärke“ oder „Wucht“ oder „Gewalt“ der Bewegung hat jetzt mathematische Gestaltung gewonnen. Für diese Gestaltung waren gewisse Bedingungen vorgeschrieben, welche bestimmte Rechnungsausdrücke von vornherein ausschlossen, und unter andern eine Auswahl gestatteten. Nachdem aber ein Mal gewählt worden, ist auch jegliche Unbestimmtheit verschwunden.

Unter diesen Voraussetzungen ist man im Stande, den wichtigen Erfahrungssatz, welcher die moderne Physik durchaus beherrscht, in seiner einfachsten Gestalt zu formulieren. Man hat gefunden, dafs weder bei Übertragungen noch bei Transformationen von Bewegungen ein **Gewinn** oder **Verlust** an **Energie** stattfindet [1]) und dafs also die im Weltall für irgend einen Zeit-Moment gegebene Energie für jeden andern Moment denselben Wert hat.

---

1) Eine andere Deutung des Wortes Energie würde zu einer minder einfachen Form dieses Satzes führen.

Dieses Theorem heifst der Satz von der **Konstanz** der **Energieen-Summe.**

Wenn z. B. eine Sprengkugel platzt, so hat man die Energie des ganzen Geschosses vor dem Zerspringen und die Energieen der einzelnen Teile nach dem Zerspringen in Rechnung zu ziehen. Man findet, dafs die ganze Energie der Summe der einzelnen Energieen gleich ist, dafs also bei der Teilung der Bewegung weder ein Verlust noch ein Gewinn an Energie stattgefunden hat. Dasselbe gilt auch für Transformationen. Verschwindet z. B. eine bestimmte Licht-Energie, so tritt dafür dieselbe Energie in irgend einer andern Form, z. B. als Wärme-Energie auf.

Diesem Satze steht ein anderer zur Seite, dessen allgemeine Gültigkeit schon ziemlich früh erkannt worden ist. Man hat gefunden, dafs für eine beliebige Gruppe von Körpern bei allen Umwandlungen derselben die Summe der einzelnen Massen dieselbe bleibt, dafs also unter keinen Umständen ein **Gewinn** oder **Verlust** an **Masse** stattfindet und dafs also die im Weltall für irgend einen Zeit-Moment gegebene Gesamtmasse für jeden anderen Moment denselben Wert hat.

Dieses Theorem heifst der Satz von der **Konstanz** der **Massen-Summe.**

Stellt man z. B. die Massen für Stücke von Schwefel und Eisen fest, so findet man nach einer Bildung von Schwefel-Eisen für die Masse desselben, vermehrt um die Massen von etwa zurückgebliebenen Stücken von Schwefel oder Eisen, wiederum den Wert, den man vor der Operation festgestellt hatte.

Diese beiden Theoreme, welche nicht mehr und nicht weniger besagen, als dafs die **Summen bestimmter Zahlen-Werte unter den verschiedensten Bedingungen dieselben** bleiben, sind unter dem Namen des Satzes von der Unzerstörbarkeit der Kraft und des Satzes von der Ewigkeit des Stoffes zur Grundlage weitgehender naturphilosophischer Spekulationen gemacht worden, welche die Anschauungen auf den verschiedensten Gebieten (namentlich auch in der Physik) in höchstem Mafse verwirrt haben[1].

Es ist charakteristisch für den hier vertretenen Standpunkt, dafs alle jene vagen Schlüsse ihren Halt verlieren, sobald man von Anfang an streng darauf sieht, dafs die Grenzen des Thatsächlichen nicht überschritten werden.

Thatsächlich ist hier nur die Konstanz der Zahlen-Werte.

Die bisher gemachten Angaben gestatten nun das Gebiet der Physik des Näheren zu beschreiben und eine Klassifikation derselben vorzunehmen.

Dabei wird sich ein allgemeiner Teil von einer Gruppe specieller

1) Ähnliches gilt von einem Teil der chemischen Theorieen, in denen man die Thatsache der Konstanz gewisser Massen-Verhältnisse (Verbindungs-Gewichte) mit einer üppig wuchernden Spekulation umrankt hat. Vergl. A. W. Hofmann, Einleitung in die moderne Chemie. X.

Teile absondern, da es sich einerseits um das Gemeinsame in allen physischen Bewegungen und andererseits um das Charakteristische bestimmter physischer Bewegungen handelt.

Die Gesamtheit unserer Empfindungen ordnet sich zu einem lückenlosen Ganzen von dreifacher Ausdehnung, in welchem sich bestimmte Empfindungs-Gruppen als physische Körper gegen einander abgrenzen.

*Man pflegt infolge dessen die **Ausdehnung** als die Grund-Eigenschaft der physischen Körper zu bezeichnen.*

Die Analyse führte zunächst dazu, jeden **physischen Körper** als ein **System von Bewegungen** anzusehen.

Durch diese Vorstellung wird der Körper so zu sagen selbständig[1]) *gemacht, indem er unabhängig gedacht wird von dem Umstande, in diesem oder jenem Momente eine Gruppe meiner Empfindungen zu sein.*

*Andererseits setzt diese Vorstellung eine **Teilbarkeit** der Körper voraus, da sonst nicht von der gegenseitigen Lagen-Änderung ihrer Elemente gesprochen werden könnte.*

*Es ist **kein** Grund vorhanden für diese **Teilbarkeit** irgend welche **Grenzen** vorauszusetzen.*

Als Elemente gelten, wie immer, alle Teile des Körpers, welche bei der Bewegung sich selbst kongruent bleiben, also in letzter Instanz die einzelnen Punkte desselben.

Die Analyse führte ferner dazu, jeder Bewegung innerhalb eines physischen Körpers eine bestimmte Energie zuzuschreiben.

*Indem man die physischen Bewegungen im **Gegensatz** zu **energielosen** Bewegungen in der angegebenen Weise bestimmt denkt, schreibt man dem physischen Körper **Undurchdringlichkeit** zu. Erläuternd kann man nun die Undurchdringlichheit der Körper die Bedingung nennen, unter welcher wir überhaupt nur im Stande sind, Körper zu tasten, zu sehen, zu hören etc.*

Bei dieser Vorstellung drängt sich wiederum die Bedeutung des Tastsinnes in den Vordergrund. Es ist heute keine Frage mehr, dafs dieses Sinnes-Gebiet die Grundlage für die Entwicklung der andern Sinnes-Gebiete bildet, welche nach und nach durch Differentiation aus demselben entstanden sind, dafs also die verschiedensten Empfindungen nur als modificierte resp. weiter ausgebildete Tast-Empfindungen aufgefafst werden müssen. Wenn also einerseits die überwiegende[2]) *Bedeutung, welche der Tastsinn für die Konstatierung der verschiedenen*

---

1) Eine genauere Analyse leitet diese Selbständigkeit aus der Gesetzmäfsigkeit des Seienden her. Vergl. W. 5. S. 4.

2) Dieselbe wird nicht blofs durch die grofse Verbreitung der Tastnerven, welche allenthalben im Integumente (Haut) enden, bestimmt, sondern auch durch den Umstand hervorgerufen, dafs Sinnestäuschungen, denen gewisse, sehr feine, Bewegungen der Nerven-Masse entsprechen, nur äufserst selten im Gebiete des Tast-

Körper hat, ohne Zweifel zugegeben werden mufs, so ist doch andererseits zu betonen, dafs die Undurchdringlichkeit der Körper ebenso durch jedes andere Sinnes-Gebiet dargethan wird.

Während sich ein physischer Körper einerseits überhaupt als ein System von Bewegungen darstellt, beobachten wir andererseits auch Bewegungen solcher Systeme, d. h. Lagen-Änderungen physischer Körper.

Erläuternd kann man wiederum die ***Beweglichkeit*** *der Körper die Bedingung nennen, unter welcher wir überhaupt nur im Stande sind, Bewegungen in sich geschlossener Bewegungs-Systeme wahrzunehmen.*

Bei einer solchen Bewegung ändert ein Körper seine Lage zu andern Körpern im Raume, d. h. er nimmt den Raum ein, welchen vorher andere Körper inne hatten.

Wegen der Undurchdringlichkeit mufs dabei ein Ausweichen stattfinden.

Sowohl bei den Teil-Bewegungen der physischen Körper als auch bei den Lagen-Änderungen ganzer Bewegungs-Systeme treten im allgemeinen Volumen-Änderungen ein.

Die ***Variabilität des Volumens*** *ist mit gleichem Rechte wie andere allgemeine Eigenschaften der Körper nachdrücklich zu betonen. Die Erfahrung lehrt, dafs ein physischer Körper streng genommen* ***nie*** *als* ***unveränderliches*** *System zu behandeln ist.*

Nach dem **Grade** der Abweichung, welchen die gegebenen Verhältnisse der **physischen Körper** in Bezug auf die Vorstellung eines **unveränderlichen Systems** darbieten, kann man die physischen Bewegungs-Systeme in verschiedene Klassen teilen . . . man unterscheidet vornehmlich **feste Körper, Flüssigkeiten** und **Gase**.

Weil ein Körper, welcher in einer dieser Formen erscheint, unter gewissen Bedingungen in jede[1] *der beiden andern übergeführt werden kann, so handelt es sich hier gleichfalls um eine allgemeine Eigenschaft der Körper.*

Zwischen den drei Hauptformen, welche man ***Aggregat-Zustände*** *nennt, bestehen Übergangsformen. Die Wissenschaft ist noch damit beschäftigt zu untersuchen, ob als viertes Glied der gegebenen Reihe noch ein neuer Aggregat-Zustand anzunehmen ist.*

Die Erfahrung lehrt, dafs alle physischen Bewegungen ein **gesetzmäfsig organisiertes Ganzes** bilden, in welchem jeder Vorgang durch andere Vorgänge bedingt wird, um zugleich selbst wiederum andere Vorgänge zu bedingen.

---

sinnes vorkommen, während sie in andern Gebieten relativ häufig sind. Das erklärt sich nur aus der gröberen Konstruktion dieses einen Gebietes im Gegensatz zu der feineren Entwicklung der andern Gebiete.

1) Wenn diese Überführung bisher nur in den meisten und nicht in allen Fällen gelungen ist, so hat doch die Voraussetzung der Allgemeingültigkeit dieser Verhältnisse als eine Forderung der induktiv-deduktiven Methode zu gelten.

In dieser Form ist der ***Satz der Trägheit*** *auf das Thatsächliche zurückgeführt: Ein Körper, der in Bezug auf einen andern eine bestimmte Bewegung ausführt, beziehungsweise in Ruhe ist, tritt nur dann in einen andern Bewegungs-Zustand ein, wenn andere Vorgänge dies bedingen.*

Diese **Gesetzmäfsigkeit** spricht sich zunächst in den beiden Theoremen aus, welche als Satz von der **Konstanz der Masse** und als **Satz von der Konstanz der Massen-Summe** eingeführt wurden.

Dafs der zweite Satz mehr ist als das Ergebnis einer wiederholten Anwendung des ersten Satzes, soll hier im Hinblick auf die chemischen Vorgänge, von denen noch zu reden ist, nachdrücklich betont werden.

Diese Gesetzmäfsigkeit wird ferner bestimmt durch den Satz von der **Konstanz der Energieen-Summe.**

Diesem Theorem entspricht ***kein*** *Satz von der Konstanz der Energie, weil die Energie eines Körpers, wie schon gesagt wurde, durchaus veränderlich ist.*

Dieser Satz weist zurück auf das Newtonsche Theorem, welches zunächst die gegenseitigen Lagen-Änderungen zweier kugelförmiger Körper von homogener Struktur allein durch deren Massen und deren Central-Entfernung bestimmt[1]) sein läfst und dann von da aus auch auf anders gestaltete Körper schliefst.

Nennt man mit C. Neumann[2]) ein System von Kugeln, welches seiner inneren Konstitution nach denjenigen Vorstellungen entspricht, die man seit Newton über das Planeten-System adoptiert hat, kurzweg ein Newtonsches System, so kommt man zu dem Theoreme: Für ein sich selbst überlassenes Newtonsches System gilt der Satz von der Konstanz der Energieen-Summe.

Andererseits hat man sich bemüht, das Weltall als ein Newtonsches System aufzufassen, indem man sich alle Körper aus kleinen Kugeln von homogener Struktur (Moleküle) zusammengesetzt dachte.

Diese Vorstellung ist durchaus nicht notwendig um jenem Satze die Anwendbarkeit zu sichern, d. h. derselbe gilt nicht blofs für Newtonsche Systeme. Bestehen bleibt in jedem Falle, dafs Newtons Theorem die Grundlage für eine grofse Reihe von Bewegungen der physischen Körper bildet und dafs es bei gewissen Voraussetzungen (Molekular-Hypothese) zum Satz von der Konstanz der Energieen-Summe führt. Man kann das Newtonsche Theorem folgendermafsen einwurfsfrei formulieren: Die Lagen-Änderungen zweier Kugeln von homogener Struktur gehen so vor sich, als wenn sich dieselben proportional ihren Massen

---

1) Abgesehen von Bedingungen, welche im einzelnen Falle in Rechnung zu bringen sind.

2) Vgl. Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme, S. 12.

und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Central-Entfernung anzögen.

Aus dem Vorangehenden ergiebt sich nun zunächst die Aufgabe einer **allgemeinen Theorie der physischen Bewegungen.** Die undurchdringlich ausgedehnten Körper von variablem Volumen vollführen einerseits als Ganzes und andererseits als Gesamtheit ihrer Elemente Bewegungen mannigfacher Art. Alle diese Bewegungen bilden ein gesetzmäſsig organisiertes Ganzes, dessen Charakteristicum zunächst in den Sätzen über die Massen-Konstanz und in dem Theoreme von der Konstanz der Energieen-Summe zum Ausdruck gelangt.

Eine Darstellung dieser Gesetzmäſsigkeit, insofern dieselbe für **jedes** der sechs, unsern sechs Empfindungs-Qualitäten entsprechenden, Bewegungs-Gebiete gültig ist, wird eine **allgemeine** Theorie der physischen Bewegungen genannt werden dürfen.

Daſs sich der physische Körper hier als ein Punkt-System, welches durch ***Punkt-Kontinua*** *gebildet wird, darstellt, braucht kaum ausdrücklich erwähnt zu werden, zumal die Anwendung von Wert-Koëfficienten der Punkte (Null) jedes Aggregat in ein Kontinuum zu verwandeln gestattet.*

Diese Annahme wird den Verfechtern von Molekular-Hypothesen zunächst nicht konvenieren. Deshalb mag vor allem daran erinnert werden, daſs ***G. Kirchhoff***[1] *seinen Untersuchungen die Voraussetzung zu Grunde legt,* ***„daſs die Materie stetig den Raum erfüllt, wie sie es zu thun scheint“.***

Andererseits muſs betont werden, daſs unsere modernen Atomistiker in letzter Instanz doch auf die Punkt-Kontinua zurückkommen, indem sie zwischen die Körper-Moleküle Äther-Atome einschalten, zwischen welche wiederum bei einiger Konsequenz Äther-Atome zweiter Ordnung eingeschaltet werden müſsten etc., so daſs man schlieſslich durch einen Grenz-Übergang vom Aggregate zum Kontinuum gelangt[2]*. Die Helmholtz-Thomsonsche Hypothese, nach welcher die Körper-Moleküle als Wirbelringe in einem Äther aufgefaſst werden können, führt zunächst zu der Vorstellung, das Weltall mit* ***einem Stoffe*** *kontinuierlich ausgefüllt zu denken, welcher sich in sehr verschiedenen Bewegungsverhältnissen befindet. Von hier aus ist nur ein Schritt bis zur* ***Elimination des Stoffes,*** *dessen* ***Undurchdringlichkeit*** *in der* ***Energie*** *der Bewegungen wiederkehrt, beziehungsweise durch diese Annahme ersetzt wird.*

Für den speziellen Teil der Physik bildet die Qualität der Empfindungen das Einteilungs-Moment. Man hat demnach zunächst zu unterscheiden:

---

1) Mechanik (Vorrede).

2) Die Freude über die elastischen Gas-Kugeln der modernen Atomistiker dürfte doch sehr getrübt werden durch die Erwägung, daſs ein **elastisches** Atom jedenfalls **teilbar** gedacht werden muſs.

1. Theorie der Bewegungen, denen Tast-Empfindungen entsprechen (Ästhematik)[1],
2. Th. d. B., denen Wärme-E. entsprechen (Calorik),
3. Th. d. B., denen Geruchs-E. entsprechen (Osmetik)[1],
4. Th. d. B., denen Geschmacks-E. entsprechen (Gustik)[1],
5. Th. d. B., denen Ton-E. entsprechen (Akustik),
6. Th. d. B., denen Licht-E. entsprechen (Optik).

Von diesen **sechs** Special-Gebieten sind bisher nur **drei**, nämlich **Calorik**, **Akustik** und **Optik** mit Erfolg behandelt worden.

Es ist sehr bezeichnend, dafs für die drei hier fehlenden Gebiete auch in der modernen Psychologie eigentlich nur leere Fächer vorhanden sind. Es ist nicht wahrscheinlich, dafs sich diese Verhältnisse in nächster Zeit[2]*) ändern werden.*

Die **Ästhematik** würde zu untersuchen haben, welche Bewegungen an der Grenze zweier Körper den Übergang vermitteln, ohne doch die Körper als einen Körper erscheinen zu lassen, welche Bewegungs-Formen der Rauhigkeit der Oberflächen, dem Schlüpfrigen, Trockenen, Fettigen, entsprechen etc.

In der Optik spielen die Betrachtungen für die Grenze verschiedener Körper in der That eine grofse Rolle. Das wird hier erwähnt, weil Tast- und Seh-Nerven in erster Linie für die Abgrenzung der einzelnen Teile des physischen Ganzen thätig sind.

Anfänge der Ästhematik sind in der Lehre von der ***Reibung*** *gegeben.*

Gustik und **Osmetik** hängen wahrscheinlich unter einander eng zusammen.

In psychologischer Hinsicht sind für diese Gebiete bereits einige wenige Daten festgestellt worden, während eine physikalische Behandlung noch in keiner Weise gelungen ist.

Andererseits hat man erst in allerjüngster[3]) Zeit eingesehen, dafs die **Elektrik**, welche bisher als Spezial-Gebiet galt, in die allgemeine Theorie der physischen Bewegungen einzufügen ist.

Darauf hätte schon der Umstand hinweisen können, dafs wir kein Sinnes-Gebiet für die Empfindung elektrischer Bewegungen haben, eine Thatsache, welche die Annahme specifisch elektrischer Bewegungen von vornherein mifslich erscheinen läfst. Wir nehmen ja auch die elektrischen Zustände mit Hülfe der verschiedensten Sinnesgebiete wahr, ein Umstand, der ganz entschieden auf ihren allgemeinen Charakter hindeutet.

---

1) Das Wort findet sich bei Scheffler, Naturgesetze.

2) Obwohl aus Jägers Schriften für eine physiologische Psychologie des Geruches manches entnommen werden könnte.

3) Mit Bezugnahme auf die Arbeiten von Cl. Maxwell und Jenkin, Rep. Brit. Assoc.

An dieser Einfügung der Elektrik arbeitet die wissenschaftliche Forschung unserer Zeit mit grofsem Erfolge. Da diese Bestrebungen ihr Ziel noch nicht erreicht haben, obwohl die Erreichung desselben wohl als gesichert gelten darf, so wird die Elektrik bis auf weiteres noch als Special-Gebiet behandelt werden müssen [1]).

Demnach ist für den speciellen Teil der Physik zunächst folgende Disposition zu entwerfen:

1. Elektrik (incl. Magnetik).
2. Calorik.
3. Akustik.
4. Optik.

Die Reihenfolge der Gebiete ist so gewählt, dafs die Elektrik, welche zudem auf der Schule relativ leicht zu behandeln ist, dem allgemeinen Teile am nächsten steht, und dafs dann die Calorik folgt, deren Erscheinungen nicht dieselbe Specialisierung wie die Akustik und vor allem die Optik erlauben.

Diese **Disposition** bedarf noch einer **Erweiterung.** Die Erfahrung lehrt, dafs Empfindungen von ungleicher Qualität nicht auf **jede** mögliche Weise zu selbständigen Gruppen (entsprechend verschiedenen Körpern) zusammentreten, wenn auch die räumliche Anordnung (Gestalt) unter übrigens gleichen Umständen äufserst verschieden sein kann.

Man findet z. B. keinen Körper, welcher die Härte des Eisens mit der Farbe des Schwefels und dem Geruche des Apfels etc. in sich vereinigte, während man des Öfteren die Gestalt eines Körpers mit Recht für etwas Nebensächliches zu halten geneigt ist.

Wenn man das physische Charakteristikum [2]) eines bestimmten Körpers, insoweit dieses von der **Form** (Gestalt) desselben unabhängig ist, mit dem Namen **Stoff** bezeichnet, so erhält die eben erwähnte Thatsache den Ausdruck:

Das **Gebiet der wirklich vorhandenen Stoffe** ist bei weitem **kleiner** als das **Gebiet aller möglichen** (denkbaren) **Stoffe.**

Wenn man die thatsächlich gegebenen Empfindungen zu allen möglichen Gruppen zusammenstellen (kombinieren) könnte, so würde die Gesamtheit dieser Gruppen, ganz abgesehen von den dabei auftretenden Raum-Formen bei weitem gröfser sein als die Gesamtheit der vorhandenen Stoffe.

Das Gebiet des Möglichen ist eben gröfser als das Gebiet des Wirklichen.

Die Erfahrung lehrt ferner, dafs unter gewissen Bedingungen **Zerlegungen** und **Zusammensetzungen** von Stoffen eintreten.

---

1) Zumal hier eine elementare Darstellung der allgemeinen Gesichtspunkte vor der Hand unmöglich erscheint.

2) Von den psychischen Erscheinungen, mit denen die physischen vielleicht korrespondieren, ist hier selbstverständlich gar nicht die Rede. Vgl. W. 5. S. 38.

Statt bestimmter Empfindungs-Gruppen, welche bestimmten Stoffen entsprechen, erscheinen andere Empfindungs-Gruppen, welche auf andere Stoffe hinweisen.

Man gelangt dabei zu einer Reihe von **Grund-Stoffen,** welche sich bis jetzt als **unzerlegbar** erwiesen haben.

Man darf nicht etwa schliefsen, dafs dieselben überhaupt unzerlegbar sind. Für den augenblicklich gegebenen Standpunkt der Wissenschaft sind einige sechzig Grundstoffe vorhanden, z. B. Eisen, Schwefel, Chlor etc. Lange Zeit hindurch hat man versucht, die edlen Metalle aus unedlen zusammenzusetzen (Stein der Weisen) und sich z. B. die Aufgabe gestellt Gold zu machen (Alchimie).

So erwächst die ganz bestimmte Aufgabe, **alle** in der Erfahrung gegebenen **Stoffe**, soweit sich dieselben nicht als unzerlegbar erweisen, als **Zusammensetzungen von Grund-Stoffen** darzustellen.

Dabei handelt es sich darum, die Anzahl der Grund-Stoffe immer mehr zu verringern und womöglich zu einem einzigen Grund-Stoffe zu gelangen.

Die **Lehre von der Analyse und der Synthese der Stoffe** wird **Chemie** genannt.

Der Namen dieser Wissenschaft soll von einer alten Bezeichnung Ägyptens herstammen, weil man dort zuerst „Chemie“ getrieben habe.

Die **Chemie** ist ein **Zweig der speciellen Physik.**

Die Grundlage, welche durch die allgemeine Physik geschaffen wird, dient der Chemie grade so gut zur Stütze, wie z. B. der Akustik oder der Optik.

*Vor allem kommt hier der Satz von der **Konstanz der Massen-Summe** (Hebelwage) zu voller Geltung.*

Die **Chemie** beschäftigt sich **nicht** mit Bewegungen, welche Empfindungen **eines** bestimmten Qualitäten-Kreises entsprechen, sie untersucht vielmehr die stofflichen Beziehungen gegebener Empfindungs-Gruppen, deren Teile übrigens den **verschiedensten** Kreisen angehören.

Wenn man nicht im Hinblick auf den herrschenden Atomismus grobe Mifsverständnisse befürchten müfste, so könnte man die Chemie die Lehre von der Transformation des Stoffes nennen.

Infolgedessen tritt die **Chemie** in gewisser Hinsicht der **Elektrik** nahe, welche ja auch zu den verschiedensten Sinnes-Gebieten in Beziehung steht.

Es ist bezeichnend, dafs man sowohl eine chemische Theorie der Elektricität[1]) *als auch eine elektrische Theorie des Chemismus aufzustellen gesucht hat.*

---

1) Vgl. z. B. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, IV, 385.

Es mufs als eine Thatsache der allgemeinen Physik bezeichnet werden, dafs überhaupt in der Körperwelt verschiedene Stoffe nachweisbar sind und dafs dabei eine endliche Anzahl von Grundstoffen in Frage kommt, während es Sache der speciellen Physik ist, die Gesetze dieses Gebietes im besonderen aufzusuchen.

In den elektrischen Vorgängen tritt dagegen vermutlich ein Moment zu Tage, welches allen physischen Bewegungen gemeinsam ist.

Für die Einteilung der speciellen Physik, deren Gebiete höchst wahrscheinlich durch die Elektrik mit dem Gebiete der allgemeinen Physik zu verbinden sind, gilt nun folgendes Schema:

I. Lehre von den Bewegungen, welche den Empfindungen je eines Qualitäten-Kreises entsprechen.

II. Lehre von den stofflichen Beziehungen gegebener Empfindungs-Gruppen.

Die sechs Unterabteilungen des Abschnittes I reducieren sich, wie schon bemerkt, auf drei (Calorik, Akustik, Optik) Gebiete, denen aus praktischen Gründen besonders bei einer elementaren Behandlung die Elektrik voranzustellen ist.

Der Abschnitt II umfafst die Chemie.

3. Das Mafs-System der Physik.

Alle Gröfsen der Physik stellen sich als Rechnungsausdrücke in **drei Fundamental-Gröfsen** dar, welche als Länge, Masse und Zeit-Dauer eingeführt wurden.

Herwig (Physikalische Begriffe, Einl.) sagt: „Diese (3) Begriffe sind in solchem Mafse elementar, dafs sie keiner eigentlichen Definition fähig, vielmehr ohne weiteres verständlich sind“.

Aufserdem „operiert die Physik noch mit Zahlen, deren Bedeutung ebenfalls nicht weiter definiert [1]) zu werden braucht“.

Um Längen, Zeit-Dauern und Massen in Zahlen-Worten auszudrücken, mufs man nach dem oben Bemerkten eine **bestimmte Länge,** eine **bestimmte Zeit-Dauer** und eine **bestimmte Masse** zu **Einheiten** wählen. Nachdem eine solche Wahl, für welche zunächst volle Freiheit herrscht, vorgenommen worden ist, sind alle Mafs-Zahlen der Physik eindeutig bestimmt.

Was oben im allgemeinen über Teilung der Einheiten und über Vergleichung verschiedener Einheiten gesagt wurde, gilt hier im Speciellen.

Innerhalb der Wissenschaft hat man sich jetzt im grofsen und ganzen über eine gemeinsame Wahl der Einheiten geeinigt.

Reduktionen einer Einheit auf eine andere kommen nur noch in beschränktem Mafse vor, es handelt sich dann fast immer um

---

1) Sie kann überhaupt nicht **definiert** werden.

die Reduktion einer Einheit auf ganze Vielfache oder aliquote Teile derselben Einheit.

So hat man z. B. des Öfteren Meter in Millimeter oder Gramm in Kilogramm etc. umzurechnen, während Angaben in Fuſsen oder veralteten Pfunden etc. hier kaum noch vorkommen.

Da unser **Zahlen-System** ein **dekadisches** System ist, so ist es zweckmäſsig für die Einteilung der Einheiten die Zahl „Zehn“ zu benutzen.

Dieser Erwägung hat man bei der Aufstellung des metrischen „Maſs-Systems für Längen und Massen“ in der That Rechnung getragen.

Der Vorteil eines dekadischen Maſs-Systems liegt darin, daſs die Decimalen einer Einheit, der Reihe nach genommen, die Reihe der Unter-Einheiten dieser Einheit darstellen etc. So sind z. B. 3,14 Meter = 3 Meter 1 Decimeter 4 Centimeter.

Als **Einheit** für die **Längen-Messung** hat man eine **Strecke** gewählt, welche sich bei Grad-Messungen als der **zehnmillionte Teil des Quadranten eines Erd-Meridians** ergeben hatte.

Diese **Strecke** nennt man das **Meter.**

Spätere Untersuchungen (Bessel) ergaben, daſs der Quadrant 10 000 859 Meter enthält, daſs also ein Meter nicht genau gleich dem 40-millionten Teile eines Erd-Meridians zu setzen ist.

Ein Platinstab von der Länge eines Meters, welcher im Staats-Archiv zu Paris aufbewahrt wird, ist die Original-Einheit (Ur-Meter), nach welcher Kopieen angefertigt worden sind.

Im deutschen Reiche ist das Meter-System seit dem 1. Januar 1872 eingeführt.

Die **Vergleichung** der Kopieen mit dem Urmeter (oder noch nicht verglichener Kopieen mit verglichenen Kopieen) geschieht durch geeignete Instrumente, welche man **Komparatoren** nennt.

Man unterscheidet End-Maſse und Strich-Maſse und demgemäſs auch Komparatoren für End-Maſse und Komparatoren für Strich-Maſse.

Über die Konstruktion von solchen Instrumenten vgl. man Karsten, Encyklopädie der Physik.

Die **Einteilung** der Kopieen geschieht durch Instrumente, welche nach Maſsgabe bestimmter geometrischer Sätze (über gleichmäſsige Teilung) konstruiert sind und **Teil-Maschinen** genannt werden.

Die erste Teilung kann nur durch Ausführung der bekannten geometrischen Konstruktion (z. B. auf dem Papier oder auf einer Messingplatte etc.) gewonnen werden. Auf diese Weise gelangt man zur Kenntnis irgend einer Unterabteilung, etwa des Millimeters. Es handelt sich dann z. B. darum, einen gut gearbeiteten Cylinder von hartem Stahle herzustellen und denselben mit Schraubengängen von 1 mm Abstand zu versehen: ein solcher

Cylinder bildet den wesentlichen Teil einer gebräuchlichen Teil-Maschine. Vergl. Wüllner, Lehrbuch, Einleitung.

Die unteren Abteilungen des Systems werden durch lateinische, die oberen durch griechische Vorsatzsilben bezeichnet.

Man hat:

1 Meter (m) = 10 Decimeter (dm) = 100 Centimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm) und 1 Kilometer (km) = 10 Hektometer (hkm) = 100 Dekameter (dkm) = 1000 Meter (m).

Aus der **Einheit** für die **Längen-Messung** werden abgeleitet die **Einheit** für die **Flächen-Messung** und die **Einheit** für die **Volumen-Messung.**

Der Umstand, dafs die Mafs-Zahl der Fläche eines Rechtecks eindeutig bestimmt wird durch das Produkt aus den Mafs-Zahlen der Längen seiner beiden Seiten, bildet die Grundlage für die Flächen-Berechnung.

Ähnliches gilt für den Raum.

Ein Quadrat von der Seitenlänge eines Meters dient unter dem Namen **Quadrat-Meter** als **Einheit** für die **Flächen-Messung,** ein Würfel von der Seitenlänge eines Meters dient unter dem Namen **Kubik-Meter** als **Einheit** für die **Volumen-Messung.**

Die **Dimensionen** dieser beiden Einheiten sind beziehungsweise l^2 und l^3.

Diese beiden Einheiten sind also nur aus l abgeleitet ohne Hinzunahme von t und m. Sie sind zugleich die einzigen Einheiten von dieser einfachen Gestalt.

Die unteren und oberen Abteilungen dieser abgeleiteten Systeme werden gewonnen, indem man aus den unteren und oberen Abteilungen des Meters Quadrate und Würfel bildet.

Die Einteilung geschieht hier also nicht durch Zerlegung in 10, 100 und 1000 Teile und Zusammensetzung von 10, 100 und 1000 Teilen.

Man hat einerseits:

1 qm = 100 qdm = 10000 qcm = 1000000 qmm.

Man hat andererseits:

1 kbm = 1000 kbdm = 1000000 kbcm = 1000000000 kbmm.

Man nennt bei Ländervermessungen 100 Quadrat-Meter abkürzend 1 Are und rechnet mit Hektaren (= 100 Aren).

Man nennt bei Hohlmafsen 1 Kubik-Decimeter abkürzend 1 Liter und rechnet mit Deci-, Centi-, Milli- und Deka-, Hekto-, Kilo-Litern.

Natürlich hat man:

1 Kiloliter = 1 Kubikmeter und 1 Milliliter = 1 Kubikcentimeter.

Als Einheit für die **Massen-Messung** hat man die Mafse gewählt, welche für ein **Milli-Liter** (kbcm) **reinen Wassers** bei einer

Temperatur von 4° Celsius durch eine bestimmte Reihe von Beobachtungen abgegrenzt worden war.

Diese **Masse** nennt man das **Gramm.**

Die Bestimmungen wurden ausgeführt für ein Liter (kbdm) reinen Wassers, dem also eine Masse von 1 Kilogramm (= 1000 Grammen) zukommt. Eine bestimmte Temperatur mufste gewählt werden, weil das Volumen der physischen Körper von ihrer Temperatur abhängt und die Volumina gleichartiger Körper ihren Massen proportional sind. Man wählte die Temperatur von 4° Celsius, weil die Volumen-Änderungen bei diesem Wärmezustande relativ gering sind und weil hier demnach auch die Beobachtungsfehler für die Korrektion des Volumens relativ geringe Bedeutung haben.

Übrigens haben spätere Untersuchungen ergeben, dafs auch diese Original-Massen-Bestimmung mit Fehlern von angebbarer Gröfse behaftet ist. Der Wert der Abweichung der damals festgesetzten Massen-Einheit von der theoretisch bestimmten (als Masse eines Milliliters etc.) ist augenblicklich noch nicht genau bekannt.

Ein Platinblock von der Masse eines Kilogramms, welcher im Staats-Archiv zu Paris aufbewahrt wird, ist die Original-Einheit (Ur-Kilogramm), nach welcher Kopieen angefertigt worden sind.

Massen-Einheit und Längen-Einheit stehen also im metrischen Systeme in naher Beziehung.

Die **Vergleichung** der Kopieen mit dem Ur-Kilogramm (oder noch nicht verglichener Kopieen mit verglichenen Kopieen) geschieht durch geeignete Instrumente, welche man **Hebel-Wagen** nennt.

Man unterscheidet Hebel- und Feder-Wagen. Zu den ersteren gehören z. B. die zweischaligen Wagen mit Gewichtssätzen, welche im gemeinen Leben im Gebrauch sind, zu den letzteren die Heu-, Fleisch-, Brief-Wagen mit Feder und Skala. Die Feder-Wagen messen nicht unmittelbar die Massen der Körper, sondern eine Gröfse, welche denselben für einen und denselben Ort der Erde proportional ist, nämlich den Druck der Körper auf die Unterlage resp. den Zug derselben an der Aufhängung.

Die **Einteilung** der Kopieen geschieht durch Konstruktion eines **Massen-Satzes**, d. h. durch Herstellung einer Reihe von Körpern, deren Massen aliquote Teile oder ganze Vielfache des Kilogramms sind.

Eine solche Kollektion von Körpern nennt man gewöhnlich einen Gewichts-Satz. Man pflegt im gemeinen Leben mit dem Worte „Gewicht“ zwei ganz verschiedene Begriffe zu bezeichnen, indem man es bald als Mafs-Zahl für die Masse eines Körpers, bald als Mafs-Zahl für den Druck oder Zug desselben verwendet. Diese Zweideutigkeit, welche die Wissenschaft natürlich vermeiden mufs, ist in praktischer Hinsicht für gewöhnlich unschädlich, da

an demselben Orte die Massen der Körper ihren Drucken proportional sind und hier also das Verhältnis zweier Massen dem Verhältnis ihrer Drucke absolut gleich ist. Wenn man innerhalb der Wissenschaft das Wort G e w i c h t zur Bezeichnung des D r u c k e s verwenden wollte, so würde man zwar bei strenger Ausdrucksweise vor Verwechselungen geschützt sein, man würde aber die Kollision mit dem gemeinen Sprachgebrauch nicht vermeiden. Da man außerdem neuerdings innerhalb der Wissenschaft das Wort G e w i c h t auch zur Bezeichnung der M a s s e verwendet hat, so ist es am besten dasselbe ganz auszuschließen und **nur** *von M a s s e und D r u c k oder Z u g zu sprechen.*

Für die Klärung dieser Verhältnisse mag noch eine Stelle (S. 185), aus K o h l r a u s c h, Leitfaden, folgen, in welcher das Wort G e w i c h t zur Bezeichnung des D r u c k e s resp. Z u g e s verwendet wird. Dort heißt es:

„Will man die Frage, ob das Gramm u. s. w. als Gewichts- oder als Masseneinheit zu dienen habe, allgemein beantworten, so kann wissenschaftlich gar kein Zweifel an der Antwort sein: Da das Gewicht eines Körpers schlechthin ganz unbestimmt und selbst an der Erdoberfläche um ½ Procent veränderlich ist, so kann man nicht das Gewicht irgend eines Körpers als Gewichtseinheit aufstellen. Es wäre auch verkehrt, zu sagen: als Gewichtseinheit betrachten wir unter dem Namen Gramm das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser unter 45° Breite, denn dann müßten ja die Gewichtssätze für jede geographische Breite besonders angefertigt werden. Was man mit dem Namen „Gewichtssatz“ bezeichnet, ist aber nichts anderes als ein Massensatz, und eine Wägung mit der gewöhnlichen Wage ist keine Gewichts-, sondern eine Massenbestimmung“.

„In der That besteht auch der Zweck der Wägung meistens in der Massenbestimmung. Dem Chemiker, dem Kaufmann, dem Arzte ist es nicht um den Druck der Körper auf ihre Unterlage zu thun, sondern lediglich um ihre Masse, denn durch diese wird die chemische Wirksamkeit, der Geld- oder der Nahrungs-Wert u. s. w. bedingt“.

Die Proportionalität von Druck und Masse, welche für denselben Ort der Erde ganz und für Orte desselben Breitenkreises ziemlich genau besteht, ermöglicht es im gemeinen Leben mit e i n e m Worte auszukommen, während die wissenschaftliche Entwicklung zur Darstellung dieser Verhältnisse zweier Begriffe bedarf und demnach auch zwei Worte für die Bezeichnung desselben festsetzen muß. Es liegt hier ein Differenzierungs-Proceß des Begriffes „Gewicht“ vor.

Für die Bezeichnung der u n t e r e n und o b e r e n Abteilungen des Systems der Massen-Maße gelten die Festsetzungen, welche bereits bei Besprechung des Systems der Längen-Maße vorgeführt wurden.

Man hat:
1 Gramm (gr) = 10 Decigramm = 100 Centigramm = 1000 Milligramm.
1 Kilogramm (kgr) = 10 Hektogramm = 100 Dekagramm = 1000 Gramm.

Man mufs dabei berücksichtigen, dafs der Platinblock, welcher als Original-Einheit dient, zwar die Masse von 1 kgr darstellt, dafs aber der tausendste Teil dieser Einheit (als Gramm) als die eigentliche Einheit des Systems anzusehen ist.

Aus der **Einheit** für die **Massen-Messung** werden **ohne** Bezugnahme auf die Einheiten für die **Längen-Messung keine** andere Einheiten abgeleitet.

Eine ***zusammengesetzte*** *Einheit sehr einfacher Art, welche nur* ***Massen-*** *und* ***Längen-Einheit*** *entspricht, ist das (körperliche)* ***Trägheits-Moment.***

Die Dimension dieser Einheit ist $m \cdot l^2$.

Eine andere Einheit von gleicher Einfachheit ist die ***specifische Masse*** *oder* ***Dichtigkeit.***

Diese Einheit wird erhalten, wenn man die Masse eines Körpers durch das Volumen desselben dividiert.

Mifst man die Masse in Grammen und das Volumen in Millilitern (kbcm), so wird die Dichtigkeit 1 durch $\frac{1\,gr}{1\,kbcm}$ *ausgedrückt. Dieses Verhältnis ist bei reinem Wasser für 4° C. gegeben (1 kbcm hat hier die Masse von 1 gr) und darum darf man dann sagen, dafs die specifische Masse des Wassers bei 4° C. die Einheit der Dichtigkeits-Messungen ist. Die Mafs-Zahl der Dichtigkeit irgend eines Körpers bei einer bestimmten Temperatur ist demnach die Mafs-Zahl der Masse eines Milliliters (kbcm) des Körpers für jene bestimmte Temperatur. Bei festen Körpern ist die Änderung des Volumens durch die Temperatur eine so geringe, dafs man statt der „Dichtigkeit bei einer bestimmten Temperatur" im allgemeinen schlechthin von der „Dichtigkeit" sprechen darf. Andere Einheiten* $\left(\text{als } \frac{1\,gr}{1\,kbcm}\right)$ *der Dichtigkeit wählt man für die Bestimmung der specifischen Masse der Gase, bei denen das Volumen nicht allein von der Temperatur abhängt.*

Die Dimension der ***Dichtigkeit*** *ist stets* $\frac{m}{l^3}$.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs man innerhalb des metrischen Systems die Messung von Längen und Massen und überhaupt innerhalb jedes dekadischen Systems jede Mafs-Zahl in bestimmter Einheit durch Multiplikation oder Division mit einer Potenz von Zehn in die Mafs-Zahl einer andern Einheit desselben Systems verwandeln kann.

Natürlich existieren nicht für alle diese unendlich vielen Einheiten

Bezeichnungen, obwohl die Reihe der Bezeichnungen, welche von Meter und Gramm in doppelter Weise ausgeht, leicht fortgesetzt werden konnte, da sie der bereits bezeichneten Reihe der Zahlen-Einheiten genau entspricht.

Hier hat nun der ***Gebrauch*** *entschieden, dafs man bei Längen-Messungen nur (Kilometer), Meter, Millimeter und aufserdem das Mikron (= 0,001 mm), bei Massen-Messungen nur (Kilogramm), Gramm und Milligramm zur Bezeichnung verwendet und Einheiten, welche zwischen diesen ausgezeichneten Einheiten oder jenseit derselben liegen, im allgemeinen ausschliefst.*

Man schreibt also 3,412 m oder 3412 mm und nicht oder nur selten 34,12 dm oder 341,2 cm etc.

Die **Einheiten** für die **Messung** der **Zeit-Dauer** sind von jeher aus den Bewegungs-Verhältnissen unseres Planeten-Systems hergeleitet worden.

Die scheinbare Drehung des Himmelsgewölbes um die Weltenachse, deren Nordpol sehr nahe am Polarstern gelegen ist, wird durch die wirkliche Drehung der Erde um ihre Achse bedingt. Diese Scheinbewegung läfst einen Teil der Fixsterne auf- und untergehen und dazwischen ***einen*** *höchsten Stand (Kulmination) über dem Horizonte (jedes bestimmten Ortes) erreichen.*

Zwischen zwei auf einanderfolgenden Kulminationen desselben Sternes (für denselben Ort) liegt stets dieselbe Zeit-Dauer, es ist die Zeit-Dauer, deren die Erde bedarf, um sich einmal um ihre Achse zu drehen.

Andere Fixsterne (Circum-Polar-Sterne) tauchen niemals unter den Horizont und erreichen abwechselnd ein Maximum und ein Minimum ihrer Höhe über dem Horizonte. Die Zeit-Dauer zwischen zwei auf einander folgenden Maximis oder zwischen zwei auf einander folgenden Minimis (für denselben Ort) ist wiederum gleich der Umdrehungszeit der Erde.

Diese konstante Zeit-Dauer, welche zwischen je zwei Fixstern-Kulminationen gelegen ist, heifst ein ***Sterntag.***

Die beiden erwähnten Klassen von Fixsternen erschöpfen die ganze Schar derselben und nur die Sonne bedarf einer eigenen Betrachtung.

Während alle Fixsterne aufser der Sonne ihre gegenseitige Stellung beibehalten, ändert diese bei der scheinbaren Bewegung des Himmelsgewölbes ihre Stellung gegen die anderen: sie dreht sich einmal mit dem Himmelsgewölbe um die Weltenachse und bewegt sich aufserdem, dieser Drehung entgegen, zwischen den Sternen fort. Die letztgenannte Bewegung geschieht auf einer geschlossenen Bahn (Ekliptik), so dafs die Sonne nach Ablauf einer gewissen Zeit-Dauer, welche stets dieselbe ist, wieder zu denselben Sternen zurückkehrt, von denen sie ausgegangen ist und ist bedingt durch die wirkliche Bewegung der Erde um die Sonne. Die

konstante Zeit-Dauer, welche hier in Rechnung tritt, heifst ***Sternjahr.***

Infolge dieser zweiten Bewegung verfliefst zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen der Sonne (Mittag) nicht dieselbe Zeit, d. h. der Sonnentag ist eine veränderliche Gröfse. Um hier zu einer Konstanten zu gelangen, läfst man eine fingierte Sonne, der Drehungsrichtung des Himmelsgewölbes entgegen, auf dem Welt-Äquator gleichmäfsig fortschreiten und zwar so, dafs zu einem vollen Umlauf ***ein*** *Sternjahr nötig ist. Zwischen auf einander folgenden Kulminationen dieser fingierten Sonne liegt stets dieselbe Zeit-Dauer. Diese Zeit-Dauer, welche in Sterntagen gemessen, den Wert eines solchen um eine geringe Gröfse übersteigt, heifst* ***mittlerer Tag.***

Enthält ein Sternjahr m Sterntage, so macht die fingierte Sonne, abgesehen von der gemeinsamen Bewegung aller Fixsterne, in m Sterntagen einen Umlauf (also in 1 Sterntag $\frac{1}{m}$ des Umlaufes), d. h. sie bleibt bei ***einer*** *ganzen Umdrehung des Himmelsgewölbes (1 Sterntag) um $\frac{1}{m}$ der Umdrehung gegen ihre Anfangslage zurück. Verfliefsen beziehungsweise $1,\ 1+\frac{1}{m},\ 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$ etc. Sterntage, so bleibt die fingierte Sonne beziehungsweise um $\frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}$ ihres Umganges zurück, so dafs für einen vollen Umgang derselben, d. h. für einen mittleren Tag anzusetzen ist in Sternzeit:*

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\ .\ .\ .\ \text{in inf.} = \frac{m}{m-1}.$$

Man hat also: 1 mittlerer Tag $= \frac{m}{m-1}$ Sterntag.

Für $m = 366{,}253$ findet man:

1 mittlerer Tag = 1,002731 Sterntag und
1 Sterntag = 0,997269 mittlerer Tag.

Als **Einheit** für die **Messung** der **Zeit-Dauer** wählt man den **mittleren Tag.**

Es mufs betont werden, dafs diese Einheit durch die Vorstellung der fingierten Sonnenbewegung aus der unmittelbar gegebenen Einheit des Sterntages abgeleitet worden ist, indem man die in Sterntagen ausgedrückte Zeit-Dauer eines Sternjahres zu Grunde legte. Es schien zunächst einfacher zu sein überhaupt bei der ursprünglich gegebenen Einheit des Sterntages stehen zu bleiben. Dagegen spricht Folgendes: Die Sonne bestimmt durch ihre Kulminationen die wahre Mittagszeit, während die Kulminations-Berechnungen der fingierten Sonne die mittlere Mittagszeit angeben. Am 15ten April, 15ten Juni, 1ten September und 24ten December fallen wahre und mittlere Mittagszeit zusammen, während da-

zwischen relativ geringe Abweichungen stattfinden. So tritt z. B. am 18ten Februar die mittlere Mittagszeit 15 Minuten eher, am 1ten November aber 15 Minuten später ein, als die wahre Mittagszeit; eine Räderuhr soll zur wahren Mittagszeit am 18ten Februar 12^h $15'$, am 1ten November 11^h $45'$ in mittlerer Zeit anzeigen. Das Verhältnis von Tag und Nacht, welches sich durch die Kulminationen der Sonne bestimmt, wird demnach durch eine Uhr, welche mittlere Zeit angiebt, ziemlich getreu wiedergespiegelt. Anders steht es bei einer Uhr, welche für Sternzeit konstruiert ist. Die Bahn der Sonne schneidet den Himmels-Äquator in zwei Punkten (Frühlings- und Herbst-Punkt) und hat also mit der Bahn der fingierten Sonne zwei Punkte gemein. Läſst man den Mittelpunkt der fingierten Sonne von einem dieser Punkte — es mag der Frühlings-Punkt sein — gleichzeitig mit dem Centrum der wirklichen Sonne ausgehen, so treffen sie in diesem Punkte nach Jahresfrist wiederum zusammen, weil ja in beiden Fällen die Zeit-Dauer eines ganzen Umlaufes dieselbe ist. Zählt man nun auſserdem die Sternzeit von jenem Momente an, d. h. von dem Zeit-Momente, in welchem die Sonne im Frühlings-Punkte steht und mit diesem kulminiert, so findet man für diesen Moment, d. h. für den Mittag des 21ten März auf Uhren in mittlerer Zeit und auf Uhren in Sternzeit die Angabe 0^h $0'$ $0''$, 00. Nach Ablauf eines mittleren Tages zeigt die Uhr in mittlerer Zeit wiederum 0^h, während der Zeiger der anderen Uhr ungefähr $4'$ nach Mittag angiebt. Nach Ablauf von 15 mittleren Tagen beträgt die Differenz beider Uhren ungefähr 1 Stunde mittlerer Zeit. Am Mittag des 21ten Juni geht eine Uhr in Sternzeit ungefähr 6 Stunden, am Mittag des 23ten September ungefähr 12 Stunden, am Mittag des 21ten December ungefähr 18 Stunden vor, so daſs also die Tageszeiten hier durchaus nicht wiedergegeben werden. Diese Unzuträglichkeiten haben Veranlassung dazu gegeben, statt des Sterntages den mittleren Tag zur Einheit der Zeit-Dauer zu wählen.

Bei **Vergleichung** verschiedener Zeit-Einheiten muſs man stets auf das **natürliche** Maſs für alle Zeit-Messung, d. h. auf den **Sterntag** zurückgehen.

Die gleichförmige Drehung der Erde um ihre Achse, beziehungsweise die scheinbare Bewegung des Himmelsgewölbes liefert die Konstante der Zeit-Messung, aus welcher andere Einheiten abgeleitet werden können, was z. B. an der Herleitung des mittleren Tages gezeigt wurde.

Die **Einteilung** der Zeit-Einheit geschieht durch geeignete Instrumente, welche im allgemeinen **Uhren** genannt werden.

Gewöhnlich wiederholt ein Teil der Instrumente eine Bewegung, bei welcher stets nach Ablauf derselben Zeit dieselbe Lage wieder erreicht wird.

Bei den Sand-Uhren ist z. B. der bewegliche Teil eine be-

stimmte Menge Sand, bei den Pendel-Uhren ein schwerer Körper, der um eine horizontale Achse schwingt etc.

Man teilt den mittleren Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden mittlerer Zeit.

Ebenso teilt man den Sterntag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden Sternzeit.

Für die Vergleichung von Sternzeit und mittlerer Zeit giebt es Doppel-Tabellen, welche auch einzelnen für den Schulgebrauch bestimmten Logarithmen-Tafeln beigefügt sind.

Man hat in großer Annäherung:

1 Sterntag = 86164,1 Sekunden mittlerer Zeit.

Ein Sterntag ist also um 3′ 55″, 9 mittlerer Zeit kürzer als ein mittlerer Tag.

Als obere Abteilungen gelten Jahre, Monate, Wochen.

Innerhalb der Wissenschaft kommt fast nur das Jahr in Betracht.

Das **Sternjahr** enthält 365,25636 Tage mittlerer Zeit.

An Stelle des Sternjahres, welches mit der Umlaufszeit der Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne übereinstimmt, muß man für die Zeitrechnung das tropische Jahr einführen, weil sich sonst nach Ablauf längerer Zeiträume Unzuträglichkeiten für die Bestimmung der Jahreszeiten herausstellen würden.

Der Frühlings-Punkt, d. h. der eine Schnittpunkt zwischen dem Himmels-Äquator und der scheinbaren Sonnenbahn verändert nämlich stetig seine Lage auf der Sonnenbahn und rückt, der Sonnenbewegung entgegen, in 72 Jahren ungefähr um 1° vor, so daß die Sonne bei einem Umlaufe ungefähr um 20′ mittlerer Zeit vor Vollendung des Umlaufs zum Frühlings-Punkte zurückkehrt.

Die Zeitdauer zwischen zwei Durchgängen des Sonnencentrums durch den Frühlings-Punkt nennt man ein tropisches Jahr.

Diese Periode ist für die Bestimmung der Jahreszeiten maßgebend und ist also z. B. der Kalenderberechnung zu Grunde zu legen.

Man hat: 1 Jahr trop. = 365,24224 mittlerer Tage.

Die Lagen-Änderung des Frühlings-Punktes, welcher eine gleiche Lagen-Änderung des Herbst-Punktes entspricht, ist bedingt durch eine bestimmte Lagen-Änderung der Erdachse.

Jeder Pol derselben würde bei ruhendem Centrum ungefähr in 72 . 360 = 25920 Jahren einen ganzen Kreis beschreiben, d. h. die Achse würde in dieser Zeit einen Doppel-Kegel-Mantel durchlaufen, wenn sie sich nicht außerdem im Raume fortbewegte [1]).

Da zwischen den in der Natur gegebenen Maßsen der Zeit keine **rationalen** Verhältnisse bestehen, so können in diesem Gebiete durch veränderte Festsetzungen keine wesentlichen Vereinfachungen erreicht werden.

---

1) Vergl. die Phoronomie der Punkt-Systeme.

Man könnte z. B. den Tag in 2 mal 10 Stunden, die Stunde in 100 Minuten, die Minute in 100 Sekunden einteilen und demnach einen Halbtag von 100000 Sekunden als Einheit der Zeit-Dauer zu Grunde legen. Dabei würde der Übergang vom Tage zum Jahre für die Rechnung nicht wesentlich erleichtert werden.

III. Die Aufgabe der physikalischen Mechanik.

Durch die **Forderungen der Physik** wird diejenige **Form der Mechanik** bestimmt, welche man **physikalische Mechanik** nennen kann.

Es handelt sich von vornherein darum, die Darstellung der Mechanik so zu gestalten, dafs dieselbe als Grundlage der Physik erscheint und somit zur Einführung in diese Wissenschaft dienen kann.

1. Die Einteilung des Gebietes.

Die **Gliederung** der **physikalischen Mechanik** wird im Hinblick auf die Bedürfnisse unserer Schulen, in welchen der geometrische Unterricht im besondern auf Lagen-Bestimmungen gar keine Rücksicht nimmt, folgendermafsen zu gestalten sein:

I. Die geometrische Grundlage der Mechanik.
II. Phoronomie.
  1. Der Punkt.
  2. Die Punkt-Systeme der Physik.
III. Die Dynamik der Physik.
IV. Die allgemeine Theorie der physischen Bewegungen und die Special-Gebiete der Physik.

Obwohl die **Phoronomie** des Punktes als **Theorie** von den Bedürfnissen der Physik durchaus nicht beeinflufst wird, so scheint es doch zweckmäfsig, bereits hier bei Anwendungen der theoretischen Sätze grade auf das in der Natur Gegebene hinzuweisen und so den Übergang zu dem zweiten Teile der Phoronomie zu gewinnen.

Hier handelt es sich von vornherein darum, aus der grofsen Zahl der Punkt-Systeme, welche denkbar sind, diejenigen auszuwählen, welche in der Physik Verwendung finden können, d. h. einer Darstellung des festen, flüssigen und gasförmigen Aggregat-Zustandes vorzuarbeiten.

So wird man z. B. die Bewegung des Mittelpunktes einer frei fallenden Kugel oder die Bewegung des Erd-Centrums etc. auswählen können, um die Phoronomie des Punktes anzuwenden.

Unter allen Formen der **Dynamik** ist von vornherein diejenige auszuwählen, welche als physikalische Dynamik bezeichnet

werden mufs. **Charakteristisch** für dieselbe ist, dafs die gegenseitige Beeinflussung der Bewegungen mit Hülfe **einer** Art von Konstanten dargestellt werden kann: abgesehen von den Gröfsen (Länge und Zeit-Dauer), welche auch in der Phoronomie zur Verwendung kommen, ist es hier ja nur die **Masse**, welche in Rechnung tritt.

Andere Formen der Dynamik sind leicht zu ersinnen. Fällt z. B. bei sonst gleichen Relationen der Satz von der Konstanz der Masse fort, so würde die Masse etwa dem Volumen umgekehrt proportional gesetzt werden können etc. Sehr gebräuchlich sind Uebungs-Beispiele aus anderen Formen der Dynamik, für welche man statt des Newtonschen Gesetzes andere Theoreme einführt.

Damit hängt zusammen, dafs **alle** Gröfsen der physikalischen Dynamik auf **drei** Fundamental-Gröfsen (Länge, Masse, Zeit-Dauer) zurückgeführt werden können, während andere Formen der Dynamik deren im allgemeinen mehrere gebrauchen werden.

Wollte man eine Dynamik begründen, innerhalb welcher überhaupt keine gegenseitigen Beeinflussungen von Bewegungen stattfinden, so würde man allerdings mit zwei Gröfsen-Arten auskommen, man wäre aber dann einfach zur Phoronomie zurückgekehrt, welche so als Specialfall der Dynamik erscheint.

Die **allgemeine Theorie der physischen Bewegungen** scheint vielleicht zunächst mit der **Dynamik der Physik** identisch zu sein. Der grofse Unterschied der beiden Gebiete besteht darin, dafs die Objekte des einen nie aufhören **Raum-Gebilde** zu sein, während die Objekte des andern **physische Körper** sind. Damit hängt eng zusammen, dafs alle Sätze der physikalischen Dynamik als Sätze einer „Wissenschaft a priori“ jenen Charakter haben, welcher durch die mathematischen Theoreme hinlänglich bekannt ist, während die Sätze des andern Gebietes durch Erfahrung umgestaltet werden können.

Die physikalische Dynamik entwickelt z. B. unter der Voraussetzung, dafs der Satz von der Konstanz der Masse gilt, eine Reihe von Sätzen und dabei ist ihr diese Voraussetzung eine unter vielen, welche eine bestimmte Theorie von anderen bestimmten Theorieen scheidet.

Ebenso entwickelt die Geometrie unter Voraussetzung des elften Axioms von Euklides eine bestimmte Theorie der Raum-Gebilde im Gegensatz zu anderen Theorieen.

Ob aber der Satz von der Konstanz der Masse oder jenes Axiom innerhalb der Welt der physischen Bewegungen gilt, das hat die Physik resp. die physische Geometrie festzustellen und zwar auf Grundlage der Erfahrung. Da hier durch neue Beobachtungen etc. stets Änderungen der Auffassung erzwungen werden können, so haben die Sätze der Physik nicht allgemeine und notwendige Gültigkeit.

Diesen Charakter erhalten die Theoreme einer Wissenschaft a priori nur dadurch, dafs sie durchaus concessiv sind. Hier schliefst man immer: Unter diesen oder jenen Voraussetzungen folgt Dies oder Jenes.

Die Physik schliefst dagegen: Beobachtungen und Messungen führen dazu, diese oder jene Voraussetzung vorläufig als Thatsache anzusehen, und deshalb ist auch, was aus diesen Voraussetzungen richtig erschlossen wird, solange als Thatsache hinzustellen, als jene Voraussetzungen den Charakter des Thatsächlichen behalten.

Diese Verhältnisse lassen sich an einer Besprechung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes erläutern.

Beobachtungen und Messungen ergaben, dass zwei Volumina (V_1 und V_2) desselben Gases bei derselben Temperatur sich umgekehrt verhielten wie die Drucke (P_1 und P_2), welche sie ausübten.

Aus der Gleichung $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$ *schlofs man* $V_1 \,.\, P_1 = V_2 \,.\, P_2$ *und daraus ergab sich*

$$V_1 \,.\, P_1 = V_2 \,.\, P_2 = V_3 \,.\, P_3 = \ldots V_n \,.\, P_n = \text{constans}.$$

Aus dem Satze, dafs für ein bestimmtes Gas das Produkt aus Druck und Volumen constant ist, konnten eine Reihe von Schlüssen hergeleitet werden.

Spätere Beobachtungen und Messungen ergaben, dass jenes Gesetz nur angenähert richtig sei und deshalb blieben jene Schlüsse für eine Dynamik, welche Gase von der Beschaffenheit $P \,.\, V =$ constans voraussetzen darf, in aller Strenge bestehen, während sie für die Physik, welche die Gase nehmen mufs, wie sie sind, wesentlich modifiziert werden mufsten.

Man sagt deshalb, die Objekte der physikalischen Dynamik seien Ideal-Gebilde und spricht im besonderen z. B. von idealen Gasen etc., während die Objekte der Physik stets das in der Natur Gegebene sind. Inwieweit die Schlüsse an Ideal-Gebilde für die Physik in Kraft bleiben, das hängt jedesmal ab von dem Grade der Annäherung, mit welchem das Ideale als Abbild des Wirklichen aufgefafst werden darf. Es handelt sich immer und immer wieder darum, auf dem relativ grofsen Gebiete des Möglichen (Denkbaren) das relativ kleine Gebiet des Gegebenen (Wirklichen) auszuscheiden.

Ob es gelingt allgemeine Gesetze für solche Ausscheidungen zu finden, läfst sich noch nicht übersehen. Es scheint so, als ob das Wirkliche stets durch **Minimal-Bestimmungen** *aus dem Gebiete des Möglichen herausgenommen werden könnte.*

So ist z. B. die physikalische Dynamik durch **eine** *dynamische Konstante (Masse) gegeben und nicht durch* **mehrere**, *wie man zunächst annehmen könnte.*

So weist auch das N e w t o n *sche Gesetz auf gewisse Minimal-Bestimmungen hin*[1]).

Durch die **allgemeine Theorie der physischen Bewegungen** wird die physikalische Mechanik mit der **speciellen Physik** verbunden, deren einzelne Gebiete im Hinblick auf die hier gegebenen Analysen von vornherein durchaus nicht zusammenhangslos erscheinen.

Hier ist es vor allem der Satz von der **Transformation der Energie,** welcher in weitgehender Weise zur Geltung kommt.

An diesem Punkte mündet die hier beabsichtigte Untersuchung ein in die Darstellungen der physikalischen Special-Gebiete, welche in den Lehrbüchern gemeinhin in völlig ausreichender Weise gegeben werden.

2. Die physikalischen und die technischen Wissenschaften.

Dafs nicht eine beliebige Form der Mechanik, sondern grade die **physikalische Mechanik** die Grundlage für eine Gruppe von Erfahrungswissenschaften bildet, folgt aus dem bisher Erläuterten in unzweideutiger Weise.

Das Gebiet dieser Erfahrungswissenschaften zerfällt in zwei Teil-Gebiete, welche dadurch zu unterscheiden sind, dafs in erster Linie innerhalb des einen **kausale** und innerhalb des andern **teleologische** Bedürfnisse der Menschheit befriedigt werden sollen: es handelt sich das eine Mal um eine ausreichende **Erklärung von Gegebenem** und das andere Mal um zweckmäfsige **Erschaffung von Gesuchtem.**

Die beiden Teil-Gebiete sollen in der Nomenklatur als **physikalische** und als **technische** Wissenschaften unterschieden werden.

*Die Gesichtspunkte, welche hier in Frage kommen, dürfen als **fundamental** bezeichnet werden.*

Die einzelnen Thatsachen, welche das gesetzmäfsig-organisierte Gebiet einer Erfahrungswissenschaft bilden, sind so angeordnet, dass überall vom Bedingten zum Bedingenden zurückzugehen oder vom Bedingenden zum Bedingten fortzuschreiten ist.

Das eine Mal geht man gewissermafsen mit dem Flusse der Zeit, d. h. man sucht zum Bedingten zu gelangen, welches sich als Ziel (telos) der bedingenden Thatsache auffassen läfst.

Das andere Mal geht man gewissermafsen dem Flusse der Zeit entgegen, d. h. man sucht zum Bedingenden zu gelangen, welches sich als Ursache (causa) der bedingten Thatsachen auffassen läfst.

---

1) Vgl. W. 5. S. 13.

Nun giebt es zwar keine Erfahrungswissenschaft, innerhalb welcher man nur in causaler oder nur in teleologischer Hinsicht zu arbeiten hätte, es tritt aber doch das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Betrachtungsweise in den Vordergrund.

So stellt z. B. innerhalb der Physik der wissenschaftliche Versuch im allgemeinen ein teleologisches Moment dar, während in der Technik die Theorie einer bereits konstruierten Maschine durchaus in kausaler Weise zu geben ist.

Man darf also nur behaupten, dass die physikalischen Wissenschaften im allgemeinen der ***Erklärung*** *vom Gegebenen gewidmet sind, während die technischen Wissenschaften an der Lösung bestimmter* ***Konstruktionen*** *arbeiten. Dabei bedarf man zur sachgemäfsen Lösung der technischen Probleme unmittelbar der Kenntnis bestimmter physikalischer Gesetze, und damit mittelbar der Kenntnis der physikalischen Mechanik. Vergl. hierzu das Vorwort dieses Buches.*

Zu der Gruppe der **physikalischen** Wissenschaften gehört in erster Linie, als Grundlage aller übrigen, die **allgemeine Theorie der physischen Bewegungen,** an welche sich dann des weiteren die einzelnen Gebiete der **speciellen Physik** anschliefsen.

Diejenige Wissenschaft, welche die Kenntnis der oben erwähnten Disciplinen für die Erforschung der organischen Prozesse verwendet, wird **Physiologie** genannt.

Die physischen Vorgänge in den Organismen werden durch dieselben Gesetze beherrscht, welche auch die Erscheinungen der unorganischen Natur regeln. Sie würden infolge dessen keiner gesonderten Behandlung bedürfen, wenn sie nicht ein äufserst mannigfaltiges und reich gegliedertes Gebiet darstellten, dessen genauere Durchforschung Männer erfordert, welche sich mit dem Bau der Organismen eingehend beschäftigt und im besonderen anatomische Studien gemacht haben: es tritt hier, mit anderen Worten, eine Arbeitsteilung ein.

Der sorgfältige Ausbau der speciellen Physik, welcher dem Physiker vom Fach vornehmlich am Herzen liegt, hat für den Physiologen geringere Wichtigkeit, dessen Interesse ja vor allem durch die Specialisierung derjenigen physikalischen Gesetze, welche das Leben der Organismen beherrschen, in Anspruch genommen wird.

Da einzelnen Vorgängen im Organismus des Menschen ohne Zweifel geistige Erscheinungen entsprechen, so erwächst die Forderung einer Wissenschaft, welche überhaupt die Berührungspunkte zwischen physischen Vorgängen und psychischen Erscheinungen aufzusuchen bemüht ist. Diese Disciplin, welche die Brücke zwischen den Natur- und Geistes-Wissenschaften zu schlagen hat, wird **Psycho-Physik** oder auch wohl **physiologische Psychologie** genannt.

Ein Hauptkapitel dieser Grenzwissenschaft ist den Vorgängen

in den Sinnesorganen, d. h. im besonderen den Empfindungen gewidmet, deren jede ein Empfindendes (Psychisches) und ein Empfundenes (Physisches) zugleich trennt und vermittelt.

Das kommt hier zur Erwähnung, weil die oben gegebene Systematik der physikalischen Disciplinen im Hinblick auf die physiologische Psychologie der menschlichen Sinnesorgane entwickelt wurde.

Dabei ist mit aller Schärfe zu betonen, dafs für uns das Geistige immer das zunächst Liegende ist und dafs wir erst von Diesem aus zum Materiellen gelangen [1].

An diese Wissenschaften, welche einesteils die Gesetze des Physischen in systematischem Zusammenhange zu entwickeln und andererseits die Beziehungen zwischen diesen Gebieten und dem Reiche des Psychischen aufzusuchen und zu begründen haben, schliefst sich eine andere Gruppe physikalischer Wissenschaften, welche einen durchaus **historischen** Charakter zur Schau tragen.

Man pflegt dieselben im Gegensatz zur ersten Gruppe, welche man als ***Naturlehre*** *bezeichnet, unter dem Namen* ***Naturbeschreibung*** *zusammen zu fassen.*

Diese Bezeichnung ist äufserst schlecht gewählt, da wir in keiner Wissenschaft über die Beschreibung der Thatsachen und über die Beschreibung ihres Zusammenhangs hinauszugehen imstande sind [2].

Die Abgrenzung der beiden Gruppen, welche gemeinhin [3] *vorgenommen wird, wonach es sich das eine Mal um die* ***wechselnden Erscheinungen*** *und das andere Mal um die* ***dauernden Formen*** *der Körperwelt handeln soll, ist durchaus mangelhaft und nichtssagend.*

Wo bleibt die dauernde Form bei der Entwicklung eines Frosches, der vom Zellenstadium des Eies in die relativ vollendete Gestalt des Lurches übergeht? Wo bleibt der Wechsel der Erscheinung bei der gleichförmigen Rotation der Erde?

Das ***Dauernde*** *ist in jedem Falle nur das* ***Gesetz****, welches in den wechselvollen Erscheinungen zur Geltung kommt.*

Innerhalb der historischen Gruppe der physikalischen Wissenschaften handelt es sich zunächst darum, gewissermafsen eine Inventaraufnahme der Körperwelt zu machen und dabei in geeigneter Weise zu klassificieren.

Diese Arbeit darf, so wichtig dieselbe auch ist, nicht überschätzt werden, da sie nur die Lösung der Aufgabe, welche hier eigentlich vorliegt, anzubahnen hat: es handelt sich darum, die

---

1) Vergl. Helmholtz, Die Thatsachen, und die literarischen Notizen in W. 5.

2) Vergl. W. 5.

3) Selbst in Budde, Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten, Einl.

Geschichte einzelner Individuen oder ganzer Klassen von Individuen darzustellen. Die umfassendste Wissenschaft der historischen Gruppe, die **Astronomie**, vermittelt zugleich die Verbindung mit der zuerst besprochenen Abteilung, weil die Bewegungen in unserem Welt-Systeme durchweg der mathematischen Behandlung fähig sind, falls man in der Analyse bei den Himmelskörpern selbst stehn bleibt und jeden derselben als ein Ganzes auffafst.

Die Vollkommenheit der mathematischen Behandluug ist hier so grofs, dass man jedes Teil-Gebiet von physischen Bewegungen als ausreichend[1] *dargestellt ansehen würde, falls man eine „astronomische" Kenntnis*[2] *desselben besäfse.*

Unter allen Himmelskörpern bietet unser Planet (für uns) den reichsten Stoff zu Untersuchungen mannigfachster Art.

Es mag hier bemerkt werden, dafs man unter dem Namen ***mathematische Geographie*** *einen Abrifs der Astronomie zu geben pflegt, welcher vor allem die* ***Erde*** *und zwar hauptsächlich in ihrer Beziehung zu den zunächst gelegenen Himmelskörpern zum Gegenstande hat.*

In der **Geschichte des Weltalls**[3], welche als der abschliefsende Teil der Astronomie zu bezeichnen ist, spielt die **Geschichte der Erde** (für uns) eine hervorragende Rolle.

Es handelt sich hier natürlich lediglich um Physisches: die Betrachtung der geistigen Erscheinungen bleibt anderen Disciplinen vorbehalten.

Die **irdische Welt** gliedert sich zunächst in ein **organisches** Reich (Tiere und Pflanzen) und in ein **unorganisches** Reich, so dafs hier **Zoologie** und **Botanik** einer Reihe von Wissenschaften gegenübertritt, welche man unter dem Namen **Mineralogie** zusammen zu fassen pflegt.

Auf allen diesen Gebieten hat die Wichtigkeit der lange überschätzten **Systematik** vor der Wichtigkeit der **Entwicklungs-Geschichte** zurückzutreten, zumal erst das Studium der letzteren, in vielen Fällen wenigstens, eine sachgemäfse Klassifikation begründet.

Während in der Astronomie womöglich jedes einzelne Individuum historisch verfolgt zu werden pflegt, kann es sich bei der Reichhaltigkeit des organischen Reiches nur noch um die Geschichte ganzer Klassen handeln.

Man spricht also im besonderen nicht von der Entwicklungsgeschichte dieses oder jenes Maulwurfs, sondern von der Entwicklungsgeschichte des Maulwurfs, während man doch andererseits womöglich jedem einzelnen Gestirne seine Aufmerksamkeit zuwendet.

---

1) Vergl. Laplace, Essai phil. sur les Probabilités. Éd. II. Paris 1814. p. 2 fg.

2) Vergl. E. du Bois-Reymond, Grenzen des Naturerkennens. S. 12 fg.

3) Dieselbe ist durch Kant und Laplace begründet worden.

In den **technischen** Wissenschaften handelt es sich nicht um die Erklärung von Gegebenem, sondern um die Herstellung von Gefordertem.

Es ist selbstverständlich, dafs man für Konstruktionen in einem bestimmten Gebiete die daselbst herrschenden Gesetze kennen mufs.

Die allgemeine Theorie der physischen Bewegungen ist die gemeinsame Grundlage aller technischen Wissenschaften, während im besonderen auch einzelne Teile der speciellen Physik in Frage kommen.

Eine Systematik des ganzen Gebietes, welche sich allgemeiner Anerkennung erfreut, ist bis jetzt noch nicht vorhanden, wenn auch die erste Gliederung in **monumentale**, **maschinelle** und **chemische** Fächer kaum auf Widerspruch stöfsen dürfte [1]).

Zwischen die erste und zweite Gruppe schieben sich die Ingenieur-Bauwissenschaften (z. B. die Theorie der eisernen Brücken) als Bindeglieder ein.

Für die Würdigung der kulturgeschichtlichen Bedeutung der technischen Wissenschaften, welchen noch immer nicht die richtige Stellung im ganzen unseres Wissens angewiesen worden ist, liefert Kapp [2]), „Grundlinien einer Philosophie der Technik“ mannigfaches Material.

Namentlich findet man dort auch reichhaltige Angaben über einschlägige Litteratur.

---

1) Vergl. das Einteilungs-Moment für die Fachklassen der kgl. preufs. Gewerbeschulen vom Jahre 1869. Vergl. ferner die Programme der technischen Hochschulen.

2) Braunschweig 1877.

B. Physikalische Mechanik.

I. Die geometrische Grundlage der Mechanik.

Es ist selbstverständlich, dafs die **Lehre von der Bewegung der Raum-Gebilde** zum mindesten einzelner Sätze aus einer **Theorie der Raum-Gebilde** (Geometrie) bedarf.

Die geometrischen Vorstellungen, welche gemeinhin auf dem Boden der **Euklidischen** Darstellung erwachsen, bedürfen einer **dreifachen Ergänzung**, wenn sie für die Behandlung der Mechanik ausreichen sollen.

Einmal erfordern Angaben über Lagen-Änderungen eine genauere Kenntnis von **Lagen-Bestimmungen.**

Diese Kenntnis mufs natürlich im Anschlufs an den bereits verarbeiteten Stoff erworben werden: es handelt sich nicht um eine Begründung der Geometrie der Lage, sondern um Lagen-Bestimmungen innerhalb der Geometrie des Mafses.

Andererseits fordern die Analysen und Synthesen, welche der Phoronomie eigentümlich sind, eine **Erweiterung des Begriffes der Addition** und zwar im Hinblick auf Strecken, welche der Gröfse und Lage nach gegeben sind.

Es handelt sich darum, eine Geometrie der Strecken zu begründen, welche auch für beliebige Linien (d. h. nicht blofs für Stücke einer Graden) verwendbar ist, insofern man jede Kurve aus elementaren Strecken zusammengesetzt denken darf.

Endlich weisen die Betrachtungen der Dynamik auf ein bestimmtes **Summations-Verfahren** hin, welches wesentliche Abkürzungen nach sich zieht, es handelt sich um eine **Theorie der Momente.**

Dabei hat man von der Vorstellung, dafs jedem Punkte ein bestimmter Zahlen-Koëfficient zukommt, ausgedehnten Gebrauch zu machen.

1. Die Lagen-Bestimmungen der Geometrie des Maſses.

§. 1. Sinn und Richtung.

Wenn man innerhalb der **Geometrie des Maſses** auch auf die gegenseitige **Lage** der Gebilde Rücksicht nimmt, so erwächst im Hinblick auf die einheitliche Durchführung dieser Disciplin die vollständig bestimmte Forderung „jede **Lagen-Bestimmung** auf eine **Maſs-Bestimmung** zurückzuführen“.

*Ebenso muſs die **Geometrie der Lage** jede Maſs-Bestimmung auf eine Lagen-Bestimmung zurückführen. Die Länge einer Strecke wird hier z. B. durch die Lage der zugehörigen Graden und die Lagen zweier schneidender Ebenen bestimmt gedacht.*

Diese **Zurückführung** läſst sich stets durch **Längen-Messungen** erreichen und zwar könnte man dabei mit einer **einzigen Einheit,** nämlich mit einer beliebig gewählten **Strecke,** auskommen.

Es hat sich zweckmäſsig erwiesen, auſserdem als **zweite Einheit** die **Peripherie** eines beliebig gewählten **Kreises** einzuführen und ein bestimmtes Gebiet von Längen-Bestimmungen unter dem Namen **„Winkel-Messungen“** abzugrenzen.

Daſs die Winkel-Messung auf Längen-Messungen zurückgeführt werden kann, geht schon aus der Existenz unserer Goniometrie hervor.

Die Zurückführung ist auf sehr verschiedenen Wegen möglich, sie kann z. B. auch durch Flächen-Messungen (Teile der Kreisfläche) bewirkt werden, wobei zu bemerken ist, daſs diese wiederum in letzter Instanz auf Längen-Messungen zurückweisen.

Eine Länge läſst sich durch Angabe **einer Einheit** und **einer Maſs-Zahl** vollständig darstellen.

Die Feststellung der Einheit ist Sache der Übereinkunft.

*Die Angabe 3,5 **m** sagt einerseits aus, daſs man das Meter zur Einheit gewählt hat, sie teilt andrerseits mit, daſs sich bei dieser Auswahl die in Rede stehende Länge zur Einheit verhält, wie die Zahl 3,5 zur Zahl 1.*

Bei der **Winkel-Messung** fordert die Übereinkunft, daſs man einen **Bogen** stets in seinem **Verhältnisse zur Peripherie** miſst. **Jede Peripherie** läſst sich hier als **Einheit** benutzen, ohne daſs doch Reduktions-Gleichungen notwendig würden.

Man hat stets zu beachten, daſs man den zu messenden Winkel als Centriwinkel irgend eines Einheits-Kreises eingetragen denkt und dann das Verhältnis bestimmt, in welchem der zugehörige Bogen zur ganzen Peripherie steht. Ein Winkel von der Gröſse 0,25 ist demnach ein Winkel, zu welchem in dem eben bestimmten Sinne ein Viertel der Peripherie gehört.

Um die Einheit zu benennen, kann man für die ganze Peripherie oder für einen aus dieser abgeleiteten, Einheits-Bogen, eine Bezeichnung wählen.

Man pflegt nun einerseits die Peripherie in 360 gleiche Teile zu zerlegen und einen Teil derselben einen ***Grad*** *zu nennen. Ein Winkel von der Gröfse 0,25 ist in dieser Bezeichnung ein Winkel von 90 Graden.*

Für die fernere Einteilung hat man:

$$1^{\circ}\ (\text{Grad}) = 60'\ (\text{Minuten}) = 3600''\ (\text{Sekunden}).$$

Man pflegt andrerseits die Länge der ganzen Peripherie durch die Länge des Radius zu messen, so dafs also jeder Bogen und demnach auch jeder Winkel in seinem Verhältnis zu dem (zur Einheit gewählten) Radius des Kreises bestimmt erscheint.

Bezeichnet man die Peripherie mit P, so ist die Einheit (E_1) im ersten Falle die ***Länge*** $\frac{P}{360}$, *während im zweiten Falle die* ***Länge*** $\frac{P}{2\pi}$ *zur Einheit (E_2) genommen wird.*

In letzterem Falle tritt übrigens **kein aliquoter Teil** *der Peripherie (irrationale Einheit) in Rechnung.*

Man hat hier die Reduktions-Gleichung:

$$360 \,.\, E_1 = P = 2\pi \,.\, E_2.$$

Winkel-Messungen in E_1 nennt man Angaben in Grad-Mafs, Winkel-Messungen in E_2 nennt man Angaben in Bogen-Mafs.

Es ist inkonsequent, aber gebräuchlich, die Messungen in E_1 durch Beifügung der Einheit (Grade, Minuten, Sekunden) auszuzeichnen und die Messungen in E_2 durch blofse Zahlen darzustellen. Man findet immer aus der Mafs-Zahl a_1 in Grad-Mafs die Mafs-Zahl a_2 in Bogen-Mafs durch die Gleichungen:

$$360 \,.\, E_1 = 2\pi \,.\, E_2 \text{ und } a_1 \,.\, E_1 = a_2 \,.\, E_2.$$

Es entspricht sich z. B. 90 in Grad-Mafs und $\frac{90}{360} \,.\, 2\pi = \frac{\pi}{2}$ *in Bogen-Mafs.*

Die Beziehung der beiden Einheiten läfst sich auch auf folgende Weise darstellen:

Der Einheit E_2 entspricht die Mafs-Zahl $a_1 = \frac{360}{2\pi} = 57{,}29578$,

d. h. die Länge des Radius gehört zu dem Bogen von $57^{\circ}\ 17'\ 44', 8$.

Der Einheit E_1 entspricht die Mafs-Zahl $a_2 = \frac{2\pi}{360} = 0{,}01745$,

d. h. der Bogen von 1° beträgt 0,01745 vom Radius.

Lagen-Bestimmungen werden durch die Einführung der **Winkel-Messung erleichtert,** ohne doch durch dieselbe bedingt zu werden.

Man kann statt der „Methode" der Winkel-Messung andere Methoden ersinnen, welche denselben Nutzen gewähren.

Diese **Erleichterung** beruht darauf, dafs Lagen-Bestimmungen, insofern sie auf Bestimmungen der **Richtung** zurückweisen, durch

Winkel-Messungen **leichter** ausgeführt werden können, als durch andere Methoden.

*Wenn man ein für alle Mal **einen** festen Winkel einführt, so entspricht jedem Verhältnis seiner Schenkel eine bestimmte Richtung gegen irgend eine grade Linie.*

Aus dieser Bemerkung kann man eine Methode für die Bestimmung von Richtungen entwickeln, welche keine Winkel-Messung voraussetzt.

Das Wort **„Richtung“** hat eine **doppelte** Bedeutung.

Man spricht einerseits von den **beiden** Richtungen innerhalb einer **beliebigen** Linie, indem man dieselbe durch einen bestimmten Zug entstanden denkt und sich vorstellt, dafs man den Zug auch umgekehrt hätte machen können.

Man spricht andererseits von der gegenseitigen Richtung **grader** Linien, indem man dieselben in einer Ebene oder im Raume gelegen denkt und die dabei gebildeten Winkel in Betracht zieht.

Um unter dieser **Doppeldeutigkeit** nicht zu leiden, soll in erster Beziehung statt des Wortes **„Richtung“** stets das Wort **„Sinn“** gebraucht werden.

An einem Kreisbogen unterscheidet man demnach den „Sinn“ AB von dem „Sinne“ BA, während man eine Grade in ihren „Richtungen“ zu andern Graden betrachtet.

Die Winkel-Messung dient **nicht** dazu, den **Sinn** einer Linie festzustellen, sie setzt im Gegenteil solche Bestimmungen voraus und führt erst im Verein mit diesen zur Fixierung von Richtungen.

*Zwei Punkte A und B auf der Peripherie eines Kreises bestimmen zwei verschiedene Bogen, welche zunächst **beide** durch **AB** oder durch **BA** bezeichnet werden können. Erst wenn man für den Kreis einen bestimmten **Sinn** (z. B. durch eine Pfeilspitze, welche eine der beiden möglichen Entstehungs-Arten des Kreises vor der andern auszeichnet) fixiert, gelangt man zu **eindeutigen** Bezeichnungen, so dafs nun der eine Bogen durch AB, der andere Bogen durch BA dargestellt werden **mufs.***

Richtung ist ein Begriff, welcher nur bei **zwei** oder **mehreren graden Linien** zur Verwendung kommen kann.

*Es hat eine Bedeutung von dem Sinne **einer** Linie, also im besonderen auch von dem Sinne **einer** Graden, zu sprechen, es hat aber keine Bedeutung von der Richtung **einer** Graden zu sprechen, falls man dieselbe nicht ein für alle Mal auf irgend eine bestimmte zweite Grade bezogen denkt.*

*Dafs der „Sinn“ einer Linie nur in Bezug auf den entgegengesetzten „Sinn“ derselben Linie Bedeutung hat, dafs also auch der **Begriff des Sinnes relativ** ist, mag noch ausdrücklich bemerkt werden.*

Wenn man durch einen Punkt einer Fläche (z. B. einer Ebene) zwei oder mehrere Grade ziehen kann, welche innerhalb der Fläche

liegen, so schreibt man jeder derselben in Bezug auf die andere oder in Bezug auf die anderen eine bestimmte **Richtung** zu.

Wenn man durch den Punkt der Fläche, wie es z. B. bei der Ebene der Fall ist, zwei Halb-Strahlen ziehen kann, welche als Stücke einer und derselben Graden angesehen werden können, so entsprechen denselben zwei Richtungen, von denen die eine mit dem einen Sinne, die andere mit dem andern Sinne jeder Graden übereinstimmt.

*Für die **grade** Linie weist also der **Sinn** des Fortschreitens innerhalb der Linie stets auf eine bestimmte **Richtung** gegen eine andere **grade** Linie hin, so daſs hier Sinn und Richtung in gewisser Hinsicht für einander eintreten können.*

Von der **Richtung** einer Graden gegen einander zu sprechen hat erst Bedeutung, wenn der **Sinn** beider Graden bereits festgestellt ist.

Indem man eine Grade von einem Punkte aus zieht, giebt man ihr einen bestimmten Sinn: es handelt sich stets um einseitig begrenzte Graden, d. h. um Halb-Strahlen.

Für die **specielle** Fläche, welche man **Ebene** nennt, gilt folgendes: Da sich hier von einem Punkte (O) aus unendlich viele Halb-Strahlen ziehen lassen, so werden in Bezug auf einen (OX) derselben, welchen man beliebig auswählen kann, unendlich viele Richtungen bestimmt.

Schlägt man um jenen Punkt einen innerhalb der Ebene gelegenen Kreis, so schneidet jeder der Halb-Strahlen die Peripherie desselben einmal und nur einmal. Zu je zwei Halb-Strahlen gehört ein Bogenpaar, dessen beide Glieder zusammen den ganzen Kreis ausmachen. Geht man nun von dem bestimmten Schnittpunkte P_x aus, welcher auf dem Kreise durch OX hervorgebracht wird, so läſst sich jede Richtung gegen O X durch **einen** bestimmten Bogen darstellen, nachdem für das Durchlaufen der Kreis-Peripherie ein bestimmter **Sinn** (z. B. mit der Bewegung eines Uhrzeigers) festgestellt worden ist.

Um sich von dem Radius des Kreises unabhängig zu machen, führt man das Verhältnis des Bogens zur ganzen Peripherie ein, d. h. man greift auf Winkel-Messungen zurück.

Ein Winkel ist also ein Maſs für die Richtung einer Graden in Bezug auf eine andere, nicht aber ein Maſs für den Richtungs-Unterschied.

Das Wortgefüge „Richtungs-Unterschied“ gelangt erst zur Bedeutung, wenn drei Grade in Frage kommen und wenn man dabei die Richtungen zweier gegen die dritte bereits festgestellt hat.

Man kann die Richtungen in der **Ebene** paarweise so anordnen, daſs jedem Paare zwei Halb-Strahlen entsprechen, welche als Stücke einer Graden angesehen werden können und innerhalb dieser von entgegengesetztem Sinne sind.

Es wurde ja bisher nur von einseitig begrenzten Graden (Halb-Strahlen) gesprochen.

Der Begriff der **Richtung** läfst sich für die **Ebene** erweitern, indem man alle Graden, welche gegen eine bestimmte Grade **dieselbe** (durch Kreisbogen gleichen Sinnes zu messende) **Mafs-Zahl der Richtung** zeigen, als **Linien gleicher Richtung** einführt.

Dieselben heifsen **Parallelen der Ebene.**

Die Erweiterung liegt darin, dafs man nun auch Linien, die nicht alle von einem Punkte ausgehen, in Betracht zieht.

Dafs es im Hinblick auf die Schwierigkeiten des XI. Axioms zweckmäfsig erscheint, die Parallelen als Linien gleicher Richtung einzuführen, mag nur kurz bemerkt werden.

Da zwei Grade, die von einem Punkte ausgehen, stets in einer Ebene (beziehungsweise auch in andern Flächen) liegen, so darf man auch im **Raume** bei einem Halb-Strahlen-Bündel ohne weiteres von der **gegenseitigen Richtung** je zweier Halb-Strahlen sprechen.

Unter den unendlich vielen Graden, welche sich von einem Punkte (O) des **Raumes** aus ziehen lassen, sind **unendlich viele**, welche gegen **eine** bestimmte derselben **dieselbe** Richtung haben.

Dieselben bilden eine geschlossene Fläche, welche man **Kreiskegelfläche** nennt.

Wenn man einen Winkel α um den einen Schenkel so lange dreht, bis der andere Schenkel in seine Anfangslage zurückkehrt, so beschreibt der bewegliche Schenkel, indem er gegen den festen stets dieselbe Richtung beibehält, eine Kegelfläche, welche von jeder Normal-Ebene des festen Schenkels in einem Kreise geschnitten wird und deshalb Kreiskegelfläche heifst.

*Der Winkel α wird die **Öffnung** des Kreiskegels genannt: die Ebene läfst sich als ein Kreiskegel von bestimmter Öffnung (90^0) auffassen.*

*Der ruhende Schenkel des Winkels wird die **Achse** des Kreiskegels genannt.*

*Wenn man überhaupt eine Grade beliebigen Bewegungen unterwirft, bei denen einer (O) ihrer Punkte seine Lage nicht ändert, so wird eine Kegelfläche beschrieben, welche auch **Kegelmantel** genannt wird: eine Kegelfläche ist demnach ein zweifach ausgedehntes Punkt-Kontinuum, durch dessen Elemente ein Kontinuum von graden Linien mit gemeinsamem Schnittpunkte (**Spitze** oder **Centrum** des Kegels) ausgefüllt wird. Halb-Strahl und Grade.*

Eine Grade, welche von einem bestimmten Punkte (O) aus gezogen werden soll, ist in der **Ebene** durch Angabe ihrer **Richtung** gegen eine bestimmte Grade, **eindeutig** bestimmt, während im **Raume** unter gleichen Bedingungen eine **unendliche Schar** von Graden vorhanden ist, so dafs hier von einer **eindeutigen** Beziehung zwischen Graden und Richtungen zunächst nicht die Rede sein kann.

Zu einer solchen eindeutigen Beziehung führt dagegen z. B. die folgende Überlegung: jede Normal-Ebene von O P schneidet jeden der Halb-Strahlen gleicher Richtung und zwar bilden die Schnittpunkte einen Kreis, der für O selbst in einen Punkt übergeht. Jeder Graden der Kegelfläche entspricht ein und nur ein Punkt dieses Kreises.

Will man also die Lage einer von O ausgehenden Graden auch im Raume **eindeutig** bestimmen, so genügt es **nicht**, die Richtung derselben gegen **eine** feste Grade anzugeben.

Eine solche **eindeutige** Bestimmung, welche hier gesucht werden soll, setzt zugleich eine **eindeutige** Beziehung zwischen **Grade im Raume** und **Richtung im Raume** fest, d. h. sie definiert erst, was man unter der **Richtung** (einer Graden gegen x) **im Raume** zu verstehen hat.

Die oben gemachten Angaben gestatten eine solche Bestimmung. Man bedarf einer Graden O P und einer Ebene, welche auf dieser senkrecht steht: zu allen Halb-Strahlen aus O, die gegen O P eine bestimmte Richtung haben, gehört in der Ebene ein Kreis, dessen Punkte gegen irgend einen festen Punkt der Peripherie durch Bogen-Messung in ihrer Lage fixiert werden können.

Man mufs die Bestimmung der Richtung gegen **mehrere** Grade durchführen.

Man könnte mit einem Paare auskommen, doch läfst es die Symmetrie der Rechnung des öfteren zweckmäfsig erscheinen drei Grade auszuwählen.

Ebenso führt man in der Ebene manches Mal zwei Graden ein, obwohl man ja hier mit einer Graden auskommen kann.

Dabei ist die kurze Bezeichnung **„Richtung einer Graden gegen eine Ebene“** von einem gewissen Werte. Wenn man von dem Schnittpunkte einer Graden und einer Ebene aus in der Ebene alle möglichen Graden gezogen denkt, so bestimmt eine unter diesen mit der gegebenen Graden den **kleinsten Winkel** und diesen Winkel wählt man als Mafs für die Richtung der Graden gegen die Ebene.

Diese Richtung ist also die Richtung der Graden gegen ihre Normal-Projektion auf die Ebene. Neigungs-Winkel für Grade und Ebene.

Eine zweite Abkürzung **„Richtung einer Ebene gegen eine andere“** weist gleichfalls auf die Richtung einer Graden gegen eine andere zurück. Wenn man von einem Punkte der Schnittlinie zweier Ebenen aus Paare von Graden zieht, deren eines Glied immer der einen und deren anderes Glied immer der anderen Ebene angehört, so bestimmt eines unter diesen Paaren den kleinsten Winkel und dieses Minimum, welches für jeden Punkt der Schnittlinie dasselbe ist, wählt man als Mafs für die Richtung der einen Ebene gegen die andere.

Die Richtung ist also durch den Winkel der beiden Graden bestimmt, welche eine zu den gegebenen Ebenen senkrechte Ebene aus diesen ausscheidet. Neigungs- Winkel für zwei Ebenen.

Die Auswahl der Graden für eine eindeutige Bestimmung kann auf äufserst verschiedene Weisen geschehen und jeder Auswahl entspricht eine eigene **Methode der Richtungsbestimmung im Raume.** Hier sollen **zwei** dieser Methoden als Beispiel vorgeführt werden.

*Das Ziel jedes solchen Verfahrens ist, die **Richtung im Raume** so zu definieren, dafs **jeder** Graden **eine** bestimmte Richtung und **jeder** Richtung **eine** bestimmte Grade entspricht.*

*Es handelt sich dabei nur um Halb-Strahlen, welche von **einem** Punkte ausgehen.*

Bei der **ersten** Methode wählt man **drei** Halb-Strahlen aus, welche sich unter rechten Winkeln schneiden und ergänzt dieselben zu vollständigen Graden, deren Sinn auf diese Weise bereits festgestellt ist. Das System oder Kreuz dieser drei Graden nennt man ein rechtwinkliges **Koordinaten-System** oder ein rechtwinkliges **Koordinaten-Kreuz** von **drei** Achsen.

*Ebenso kann man in der **Ebene** ein **Koordinaten-System** oder **Koordinaten-Kreuz** von **zwei** Achsen für Richtungs-Bestimmungen einführen. Da man hier mit **einer** Grade auskommen könnte, so sind die Mafs-Zahlen einer Richtung für **zwei** Grade nicht von einander unabhängig.*

Wenn OX und OY die beiden Achsen sind, so wird (Figur 3) ein beliebiger Halb-Strahl OQ (auf einem dem Sinne nach bestimmten Kreise) in seiner Richtung gegen OX durch den Bogen $P_x P_q$ und in seiner Richtung gegen OY durch den Bogen $P_y P_q$ bestimmt und man hat dabei für die Differenz $P_x P_q - P_y P_q$ stets ein Vielfaches von dem Bogen eines Viertelkreises gegeben.

*Ebenso sind die Mafs-Zahlen der Richtung gegen **drei** Achsen im Raume nicht von einander abhängig, weil man hier mit **zwei** Achsen auskommen könnte.*

Um die Richtung einer Graden OQ gegen jede der drei Achsen, welche man nach Übereinkunft durch OX, OY und OZ bezeichnet, festzustellen, denkt man sich durch OQ und durch jede der drei Achsen je eine Ebene gelegt und bestimmt innerhalb jeder dieser Ebenen durch je eine Winkel-Messung die Richtung von OQ gegen OX, OY und OZ.

*Man pflegt die Halb-Strahlen, von denen man ausgeht, als **positive** Teile der Achsen den Verlängerungen derselben als **negative** Teile der Achsen entgegenzustellen und spricht infolge dessen von der positiven und der negativen X-Achse etc.*

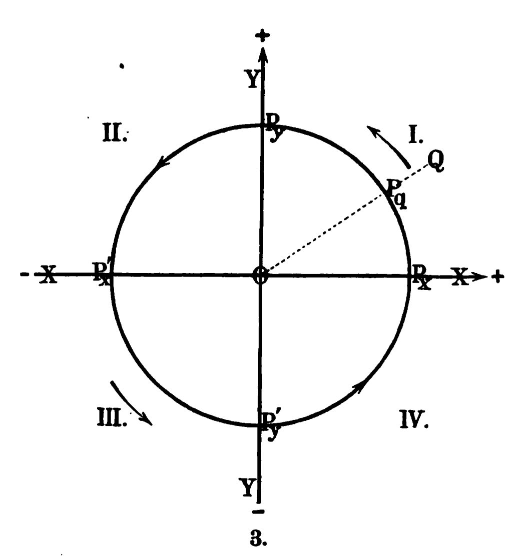
Wenn man nun durch je zwei Achsen je eine Ebene legt, — man pflegt dieselben als XY-, XZ- und YZ-Ebene zu bezeichnen — so ist man im Stande, die acht Teile des Raumes, welche durch diese drei Ebenen gebildet werden, in äufserst einfacher Weise zu charakterisieren.

Der eine Raum-Teil wird durch die positiven Teile der Achsen, deren Reihenfolge ein für alle Mal X, Y, Z sein mag, bestimmt und kann daher durch (+, +, +) bezeichnet werden.

Der Raum-Teil (—, —, —) hat mit dem Raum-Teile (+ + +) nur einen Punkt (O) gemein, er liegt ihm gegenüber. Die anderen Raum-Teile, z. B. (+, —, —) oder (—, +, —) haben mit (+, +, +) oder (—, —, —) entweder nur gerade Linien oder ganze Ebenen gemein.

Der Wert dieser Symbolik liegt nicht blofs in ihrer Verwendbarkeit für eine einfache Bezeichnung, man kann den Sinn der Kreise, welche zur Winkel-Messung dienen, so feststellen, dafs im Raum-Teile (+, +, +) die Cosinus der Winkel **jedes** *Halb-Strahles O Q gegen O X, O Y, O Z beziehungsweise die Zeichen +, +, + erhalten und dafs diese Relation für alle andern Raum-Teile gleichfalls gilt, so dafs z. B. im Raum-Teile (+, —, +) die Cosinus der Winkel* **jedes** *Halb-Strahles O Q gegen die Achsen, beziehungsweise die Zeichen +, —, + erhalten.*

Diese Festsetzung des **Sinnes** *für die Winkel-Messung soll zunächst in der Ebene, d. h. an einem Koordinaten-Kreuze von zwei Achsen verdeutlicht werden. Die beiden Halb-Strahlen, welche zum Ausgangspunkte dienen und also als positive Achsen einzuführen sind, seien wiederum O X und O Y. Die vier Winkel-Räume des Kreuzes werden in ihrer Reihenfolge durch den Sinn (Pfeilspitze) des Kreises bestimmt. Liegt in Figur 3 der Strahl O Q innerhalb I, so ist P_x P_q ein Bogen, welcher im ersten Quadranten endet*[1]) *und P_y P_q, ein Bogen, der im vierten Quadranten endet*[2]) *und für beide ist der Cosinus positiv. Liegt der Strahl OQ innerhalb III, so ist P_x P_q ein Bogen, welcher im dritten Quadranten endet und P_y P_q ein Bogen, der im zweiten Quadranten endet und für beide ist der Cosinus negativ.*



3.

1) D. h. dessen Centriwinkel zwischen 0 und 1 R liegt.
2) D. h. dessen Centriwinkel zwischen 3 R und 4 R liegt.

Die Korrespondenz für II und IV ist ebenso leicht zu übersehen.

Statt dieser Art der Winkel-Messung, welche als die natürlichste erscheint, kann man eine andere einführen, die den Vorteil gewährt, ohne weiteres auf den Raum übertragbar zu sein. Auch in diesem Falle sind die Winkel-Räume I, II, III, IV der Reihe nach in dem oben angegebenen Sinne als (+, +), (—, +), (—, —), (+, —) *zu bezeichnen.*

Wenn man festsetzt, dafs der Halb-Kreis $P_x\ P'_y\ P'_x$ *für Messungen von* P_x *aus und dafs der Halb-Kreis* $P_y\ P_x\ P'_y$ *für Messungen von* P_y *aus im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers zu durchlaufen ist, während der Halb-Kreis* $P_x\ P_y\ P'_x$ *für Messungen von* P_x *aus und der Halb-Kreis* $P_y\ P'_x\ P'_y$ *für Messungen von* P_y *aus im entgegengesetzten Sinne beschrieben gedacht wird, so kommt man mit Winkel-Messungen auf dem Halb-Kreise (statt auf dem ganzen Kreise) aus.*

Wenn P_q *von* P_x *um* α *entfernt ist, so findet man hier zunächst* **zwei** *Punkte, welche die Lage von* $O\,Q$ *bestimmen könnten, während die Angabe, dafs* P_q *von* P_y *um* β *entfernt ist, von diesen zwei Punkten* **einen** *auswählt. Dabei liegen die Winkel* α *und* β *stets innerhalb der Grenzen* $o \ldots \pi$ *respective* $o \ldots . 2R$.

Um diese Art der Winkel-Messung auf den Raum zu übertragen, schlägt man um O eine Kugel, auf welcher durch die Ebenen $X\,O\,Q$, $Y\,O\,Q$ *und* $Z\,O\,Q$ *drei Kreise bestimmt werden. Mifst man nun ein für alle Mal auf diesen Kreisen die Bogen, welche die Lage von* P_q *bestimmen, von* P_x, P_y *und* P_z *aus auf diesen nach beiden Seiten hin, indem man je zwei von den durch* P_x *und* P'_x, P_y *und* P'_y, P_z *und* P'_z *bestimmten Halb-Kreisen entgegengesetzten Sinn giebt, so reicht man mit Winkel-Messungen in den Grenzen* $o \ldots . \pi$ *respective* $o \ldots . 2R$ *aus.*

Wenn P_q *von* P_x *um* α *entfernt ist, so findet man auf der Kugel zunächst einen Kreis, welcher die Lage von* $O\,Q$ *bestimmen könnte; aus dieser unendlich grofsen Schar von Punkten (Kreislinie) scheidet die Angabe, dafs* P_q *von* P_y *um* β *entfernt ist, durch eine zweite Kreislinie* **zwei** *Punkte aus und unter diesen zwei Punkten genügt nur* **einer** *der Bedingung gleichzeitig von* P_z *um* γ *entfernt zu sein. Man findet hier auf der Kugel drei Kreise, welche immer* **einen und nur einen** *Punkt mit einander gemein haben.*

Übrigens bestimmen α, β *und* γ *gemäfs dem oben Bemerkten drei Kreiskegel mit den Achsen* OX, OY *und* OZ, *welche von der Hülfskugel in jenen drei* P_q *bestimmenden Kreisen geschnitten werden, während sie selbst einen und nur einen Strahl* ($O\,Q$) *gemein haben.*

Im ersten Oktanten (+, +, +) *sind alle Winkel* (α, β, γ) *kleiner als R und demnach alle Cosinus positiv, im Gegenoktanten* (—, —, —) *liegen alle Winkel* (α, β, γ) *innerhalb der Grenzen* $\frac{\pi}{2} \ldots . \pi$ *respective* $R \ldots . 2R$ *und demnach sind hier alle*

Cosinus negativ, für die übrigen Oktanten gilt, wie man sofort übersieht, die oben angegebene Korrespondenz in gleicher Weise[1]).

Bei der **zweiten** Methode wählt man **einen** Halb-Strahl zur Achse und errichtet senkrecht zu ihm eine Ebene (Äquatorial-Ebene), in welcher man noch **einen** festen und einen beweglichen Halb-Strahl annimmt. Dieses System heifst in der Bestimmung, welche demselben hier gegeben werden soll, das **Koordinaten-System der Längen und Breiten.**

Dasselbe kommt z. B. zur Verwendung, um die Lage von Orten auf der Erdoberfläche zu bestimmen.

Der bewegliche Strahl (OM) stellt sich jedesmal als Schnitt einer durch OQ und durch die Achse (ON) gelegten Halbebene und der Äquatorial-Ebene dar. Für die Winkel-Messung führt man wiederum eine Kugel ein, welche ihren Mittelpunkt in O hat.

Wenn man die Oberfläche dieser Kugel mit der Erdoberfläche identificiert, so stellt die Achse (ON) die eine Hälfte der Erdachse (z. B. die nördliche) dar, während die Hülfs-Ebene der Meridianschnitt durch Q ist.

Die Hülfs-Kugel schneidet die Äquatorial-Ebene in einem Kreise (Äquator), welcher von dem festen Strahl (OL) innerhalb der Äquatorial-Ebene in P_l und von dem beweglichen Strahl (OM) innerhalb der Äquatorial-Ebene in P_m geschnitten werden mag. Wenn für diesen Kreis ein bestimmter Sinn festgestellt worden ist, so giebt der Bogen $P_l\,P_m$ in eindeutiger Weise die Lage von OM und demnach auch die Lage der Halb-Ebene NOM, welche die Kugel in einem Halbkreise schneidet. Bezeichnet man die Schnittpunkte dieses Halbkreises und der Strahlen ON und OQ beziehungsweise mit P_n und P_q, so bestimmt der Bogen $P_n\,P_q$ die Lage von Q in völlig eindeutiger Weise.

Die Bogen $P_l\,P_m$ liegen innerhalb der Grenzen $o \ldots . 2\pi$ respective $o \ldots . 4R$, während die Bogen $P_n\,P_q$ innerhalb der Grenzen $o \ldots . \pi$ respective $o \ldots . 2R$ liegen.

Erstere (λ) heifsen bei Messungen auf der Erdoberfläche „geographische Länge“ und zwar legt man hier den Anfangspunkt der Längen-Messung (P_l) in den Schnitt des Äquators und irgend eines Meridians (z. B. von Berlin oder Paris). Die geographische Länge (λ) ist zugleich der Neigungs-Winkel zwischen der Ebene des Anfangs-Meridians und des Meridians von Q.

Letztere (ζ) stehen bei Messungen auf der Erdoberfläche in engem Zusammenhange mit der „geographischen Breite“, die bekanntlich in südliche und nördliche Breite geschieden wird. Man hat für die nördliche Breite $90 - \zeta$ und für die südliche Breite $\zeta - 90$ in Rechnung zu bringen, da die geographische Breite

---

1) **Für die Darstellung dieser Verhältnisse kann man im Unterrichte, falls eine Veranschaulichung nötig erscheinen sollte, ein leicht darzustellendes Modell (drei kreisförmige Scheiben aus Pappe) anfertigen. Zeichnungen verwirren hier, so gut sie auch sein mögen, meiner Erfahrung nach nur allzu leicht.**

von Q in jedem Falle durch den Neigungs-Winkel von O Q gegen die Äquatarial-Ebene gemessen wird.

Ein Punkt Q bestimmt sich bei dieser Methode durch den Schnitt eines Kreises (ζ) und eines Halbkreises (gegeben durch die Halb-Ebene), welche beide auf der Hülfs-Kugel liegen.

Der Begriff der **Richtung** läfst sich für den **Raum** erweitern: **Parallelen** des **Raumes.**

Eine bestimmte Grade G hat gegen irgend ein Koordinaten-System eine bestimmte „Richtung im Raume". Legt man durch G eine Ebene, so sind in dieser die Parallelen zu G wohl definiert. Durch Drehung der Ebene um G gelangt man zu allen Parallelen des Raumes, welche der durch G bestimmte Richtung im Raume entsprechen.

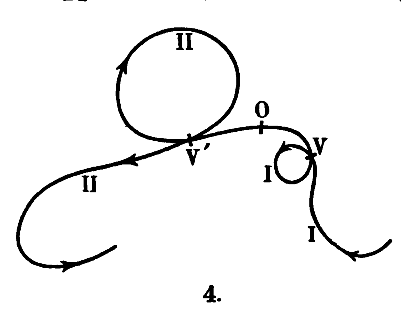
§. 2. Lagen-Bestimmung von Punkten.

Da sich die Lagen-Bestimmung aller Raum-Gebilde auf die Lagen-Bestimmung einzelner Punkte zurückführen läfst, so erwächst für die Geometrie des Mafses zunächst die Aufgabe, die Lage von Punkten durch Messung zu fixieren.

Wenn der Punkt P in einem Raum-Gebilde von **einer** Dimension (Linie) liegt, so genügt es in diesem einen festen Punkt O anzunehmen und, nachdem der Sinn der Linie festgestellt ist, das Kurvenstück O P respective P O zu messen.

Der Punkt O scheidet (Fig. 4) die Linie in zwei Teile (I und II) und man weifs, dafs bei einer Angabe P O der Punkt in I, dafs aber bei einer Angabe O P der Punkt in II liegt.

Durch die Feststellung des Sinnes (von Punkt zu Punkt) werden Doppel-Punkte, wie V und V', wo sich die Kurve selbst durchschneidet, unschädlich gemacht, während in einem solchen zunächst Zweifel über den Weg des Fortschreitens herrschen könnte.



4.

Dafs die Linie, in welcher P liegt, nicht eine ebene Kurve oder gar eine Grade zu sein braucht, ist selbstverständlich.

So oft ein Punkt (P) auf einer Linie liegt, deren Lage als bekannt vorausgesetzt werden darf, genügt e i n e Festsetzung über den Sinn und e i n e Längen-Messung zur Bestimmung der Lage von P.

Wird diese Länge durch s oder $\overset{*}{s}$ bezeichnet, je nachdem eine Messung P O oder eine Messung O P stattgefunden hat, so kann man die Lage von P symbolisierend bald durch $P = (s)$, bald durch $P = (\overset{*}{s})$ darstellen.

Diese Angabe wird einfacher, wenn man alle Messungen von O aus unternimmt und dabei die Übereinstimmung mit dem einmal festgestellten Sinne durch das Zeichen +, die Abweichung von dem einmal festgestellten Sinne durch das Zeichen — ausdrückt.

Man schreibt symbolisierend $P = (+ s)$ oder $P = (- s)$, je nachdem ursprünglich O P oder P O auszuführen gewesen wäre: $P = (+ 3)$ giebt eine bestimmte Lage in II und $P = (- 3)$ eine bestimmte Lage in I an.

Wenn der Punkt P in einem Raumgebilde von **zwei** Dimensionen liegt, so reicht man mit den einfachen Hülfsmitteln der vorigen Methode — sie mag die **fundamentale** heifsen — nicht mehr aus.

Hier soll zunächst nur der Fall einer **Ebene** vorausgesetzt werden.

Wenn man einen Halb-Strahl O X einführt, so kann man gegen diesen die Richtung des Halb-Strahles O Q bestimmen. Wenn man nun von O aus einen Halb-Strahl O P zieht, so liegt P auf einer Graden, deren Sinn gegeben ist und deren Lage gegen O X als bekannt vorausgesetzt werden darf. Mit Hülfe der Fundamental-Methode findet man nun die Lage von P durch eine Längen-Messung auf O P.

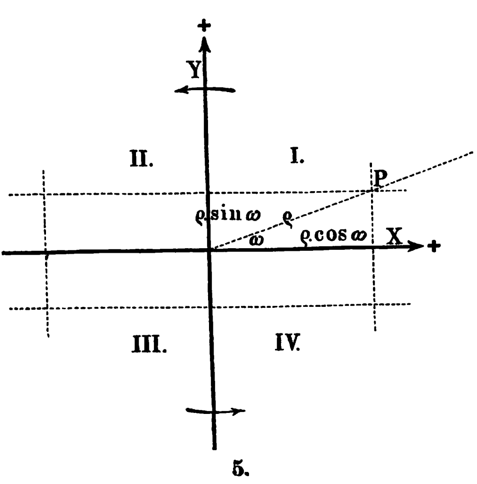
Dieses Verfahren, die Lage von P zu bestimmen, mag die **Polar-Methode** heifsen.

Es ist gebräuchlich, O den Pol und O P einen Radius vector (Fahr-Strahl) zu nennen und letztere mit ρ zu bezeichnen. Nennt man nun den Winkel, welcher die Richtung von O P gegen O X feststellt, ω, so ist der Punkt P in seiner Lage durch die Angabe von ρ und ω eindeutig bestimmt. Man symbolisiert diese Beziehung (Figur 5) durch $P = (\rho; \omega)$.

Statt dieser Methode kann man innerhalb der **Ebene** auch die **Projektions-Methode** anwenden.

Führt man senkrecht zum Halb-Strahl O X noch den Halb-Strahl O Y ein und projiciert man O P auf O X und auf O Y durch Normalen, so entstehen auf den Achsen des Kreuzes X O Y zwei Abschnitte $x = \rho . \cos \omega$ und $y = \rho . \sin \omega$.

Wenn diese Abschnitte (x, y) auf den Achsen gegeben sind, so kann man P durch eine Parallel-Konstruktion finden.



5.

Diese Parallel-Konstruktion scheint zunächst 4 Punkte zu geben. Wenn man aber bedenkt, dafs $\rho \, . \cos \omega$ in I und IV positiv und in II und III negativ ist und dafs $\rho \, . \sin \omega$ in I und II positiv und in III und IV negativ ist, so sieht man ein, dafs die Vorzeichen der Abschnitte x und y zugleich angeben, ob P in I, II, III oder IV liegt. Es bleibt immer I durch $(+, +)$, II durch $(-, +)$, III durch $(-, -)$, und IV durch $(+, -)$ zu charakterisieren. Man schreibt hier $P = (x, y)$.

Um auch im Gegensatz zur Ebene für eine **krumme Fläche** eine Lagenbestimmung durchzuführen, mag die **Kugel-Oberfläche** gewählt werden. Auf dieser kann jeder Punkt durch **Länge** und **Breite** bestimmt werden.

Die zweite Methode für die Bestimmung der Richtung im Raume löst die hier geforderte Aufgabe unmittelbar. Durch die Angabe von λ und ζ ist jeder Punkt auf der Oberfläche gegeben. Man schreibt hier $P = (\lambda, \zeta)$.

Was nun einen im **Raume** gelegenen Punkt anlangt, so kommt für die Lagenbestimmung desselben bei Ausschluss der Fundamental-Methode, welche zunächst selten angewandt werden kann, die Polar-Methode und die Projektions-Methode in Frage.

Wenn man einen Halb-Strahl OP zieht und dessen Richtung gegen drei Achsen bestimmt, so darf dessen Lage als gegeben gelten und man findet jetzt die Lage von P durch die Fundamental-Methode, indem man die Länge OP mifst.

Dieses Verfahren darf wiederum als **Polar-Methode** bezeichnet werden.

Hier ist P gegeben durch ρ und durch α, β, γ, wobei zu bemerken ist, dafs zwischen α, β, γ eine Gleichung besteht. Man schreibt hier $P = (\rho; \alpha, \beta, \gamma)$.

Projiciert man den Halb-Strahl OP auf die drei Achsen durch Normal-Ebenen, so entstehen auf OX, OY und OZ drei Abschnitte $x = \rho \, . \cos \alpha$, $y = \rho \, . \cos \beta$ und $z = \rho \, . \cos \gamma$.

Wenn diese Abschnitte (x, y, z) auf den Achsen gegeben sind, so kann man P durch eine Parallel-Konstruktion finden.

Dieses Verfahren darf wiederum als **Projektions-Methode** bezeichnet werden.

Diese Parallel-Konstruktion scheint zunächst 8 Punkte zu geben. Wenn man aber an die Bedeutung der Oktanten denkt, so sieht man ein, dafs die Vorzeichen der Abschnitte x, y, z zugleich angeben, in welchem Oktanten P gelegen ist. Man schreibt hier $P = (x, y, z)$.

Mit Hülfe der Werte für die Projektionen x, y, z ist es nun sehr leicht, die schon erwähnte Gleichung aufzustellen, welche α, β, γ verbindet. Als Diagonale des Parallelepipendos, welches durch die Konstruktion entstanden ist, hat OP den Wert $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Man gelangt also zu der Gleichung:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Es ist also stets $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ *und infolge dessen können die Maſs-Zahlen* α, β, γ *nicht beliebig angenommen werden.*

In der Ebene besteht die Gleichung:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha).$$

Man gelangt hier zu der Formel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, *die man auch als* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ *schreiben kann, wobei* $\beta = 90 - \alpha$ *zu setzen ist.*

Endlich führt auch das **System der Längen und Breiten**, wie jede Bestimmung der Richtung im Raume, zu einer eigenen Methode der Lagenbestimmung. Es handelt sich jedesmal um die Anwendung der Fundamental-Methode in Bezug auf eine Gerade, deren Lage infolge von Richtungsbestimmungen als gegeben angesehen werden darf.

Nachdem die Richtung von OP *durch* λ *und* ζ *bestimmt worden ist, hat man die Länge* OP *zu messen, welche wiederum* ρ *genannt werden mag. Man schreibt hier* $P = (\rho; \lambda, \zeta)$.

Ein Punkt wird in seiner Lage auf einer Linie durch **eine**, in seiner Lage innerhalb einer Fläche durch **zwei** und in seiner Lage innerhalb des Raumes durch **drei** Längen-Messungen gegeben. Wenn eine **gröſsere** Anzahl von Messungen eintritt, so sind die gefundenen Maſs-Zahlen **nicht** von einander **unabhängig.**

Die Messungen geschehen immer entweder auf Kreisen oder auf Graden, falls man von der Fundamental-Methode absieht, bei welcher Messungen auf beliebigen Kurven eintreten.

Die Zahlen 1, 2, 3 bestimmen sich beziehungsweise durch die dreifache Ausdehnung des Raumes, innerhalb dessen Flächen zweidimensionale und Linien eindimensionale Gebilde sind.

Der Punkt muſs im Raume in dreifacher, in der Fläche in zweifacher, in der Linie in einfacher Hinsicht an einem Fortschreiten gehindert werden, wenn er eine bestimmte Stelle des Gebildes einnehmen soll.

Eine Zusammenstellung der hier gegebenen Koordinaten-Systeme eines Punktes liefert folgendes Schema:

Linie: $P = (s)$.
Ebene: $P = (\rho; \omega)$, $P = (x, y)$. Kugel: $P = (\lambda, \zeta)$.
Raum: $P = (\rho; \alpha, \beta, \gamma)$ und $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\gamma = 1$,
$P = (x, y, z)$, $P = (\rho; \lambda, \zeta)$.

Man nennt **jede der Gröſsen**, welche bei dieser Symbolik in die Klammern eingehen, eine **Koordinate** von P in Bezug auf ein bestimmtes System von Koordinaten.

Ist z. B. im Systeme (x, y, z) *gegeben* $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, *so trägt man auf* OX, OY, OZ *beziehungsweise 3, 4, 5 Längen-Einheiten ab und konstruiert in den End-Punkten dieser Strecken die Parallel-Ebenen, welche* $P = (3, 4, 5)$ *bestimmen.*

Ist z. B. im Systeme (ρ; ω) gegeben $\rho = 5$, $\omega = 30^0$, so schlägt man um O einen Kreis mit dem Radius 5 und zieht einen Strahl O Q, welcher mit O X in dem ein für alle Mal festgesetzten Sinne einen Winkel von 30^0 bildet. Kreis und Strahl bestimmen $P = (5; 30^0)$.

§. 3. Die Lagenbestimmung von Punkt-Systemen.

Da die Raum-Gebilde als Punkt-Systeme in ihrer Lage gegen einander durch die Lagenbestimmung von Punkten fixiert erscheinen, so reichen die Betrachtungen des vorigen Abschnittes aus, um die Lagenbestimmung von Raum-Gebilden durch Messung auszuführen.

Man wird mit der Lagenbestimmung von **Linien** beginnen müssen, da diese als die einfachsten Kontinua von Punkten erscheinen, während sich die **Flächen** wiederum als Kontinua von Linien darstellen.

*Dafs **Körper** durch die begrenzenden **Flächen** gegeben sind, mag besonders bemerkt werden.*

Zur Bestimmung der Lage einer Linie scheint die Angabe der Lage von unendlich vielen Punkten nötig zu sein, während man andrerseits weifs, dafs durch 2, 3, 4, 5 etc. Punkte beziehungsweise immer eine und nur eine Grade, Kreislinie, Parabel, Ellipse oder Hyperbel etc. gegeben ist, und dafs man demnach die Lage einer Graden durch die Bestimmung der Lage von 2 Punkten, die Lage eines Kreises durch die Bestimmung der Lage von 3 Punkten etc. fixieren **kann**.

Statt dessen kann man z. B. auch die Lage eines Kreises durch die Lagenbestimmung seines Mittelpunktes und die Angabe des Radius fixieren etc.

Das Dilemma löst sich durch die Überlegung, dafs hier die **Lage einzelner Punkte** und aufserdem das **Gesetz** (Grade, Kreis etc.) für die **Anordnung** der **Zwischen-Punkte** gegeben ist. Allgemein gilt folgendes:

Ein Punkt ist innerhalb der **Ebene** (und auch auf jeder andern Fläche) durch **zwei** Mafs-Zahlen in seiner Lage bestimmbar, während man im **Raume** deren **drei** bedarf.

Sobald mehr Mafs-Zahlen auftreten, sind auch verbindende Gleichungen vorhanden, wie z. B. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Einer Reihe von Punkten, welche ein **Kontinuum von einer Dimension** bilden, entsprechen innerhalb der Ebene (beziehungsweise jeder andern Fläche) **zwei Reihen** von Mafs-Zahlen, während sich im **Raume** deren **drei** einstellen.

Wenn man in einer Linie von Punkt zu Punkt fortschreitet und dabei für jeden Punkt nach irgend einer Methode die Lage feststellt, so erhält man eine doppelte, beziehungsweise eine dreifache

Reihe von Mafs-Zahlen, von denen sich innerhalb jeder Reihe die eine immer der nächsten ebenso anschliefst, wie sich ein Punkt der Linie an den nächsten Punkt anfügt. Die Anzahl der Glieder einer jeden Reihe entspricht der Anzahl der Punkte und ist also unendlich.

Je **zwei**, beziehungsweise je **drei** Mafs-Zahlen, welche die Lage **eines** Punktes in einer Linie bestimmen, sollen ein **Mafs-Zahlen-System** genannt werden, dessen Teile als **zusammengehörig** bezeichnet werden können.

Einer Linie entspricht demnach eine unendliche Reihe von Mafs-Zahlen-Systemen beziehungsweise eine unendliche Reihe zusammengehöriger Mafs-Zahlen.

Wenn ein **Mafs-Zahlen-System** unvollständig gegeben ist, wenn z. B nur eine oder nur zwei Zahlen gegeben sind, während man dreier bedarf, so ist der zugehörige Punkt nicht eindeutig bestimmt, man findet vielmehr eine kontinuierliche Reihe von Punkten, welche der Bedingung genügen.

Ist z. B. in der Ebene nur x, d. h. nur die Projektion von OP auf OX gegeben, so weifs man auch nur, dafs P auf einer bestimmten Parallele zur Y-Achse liegt, man findet also nicht P selbst, sondern eine kontinuierliche Reihe von Punkten, deren jeder zunächst P sein könnte. Die Unbestimmtheit verschwindet erst, wenn noch die zweite Mafs-Zahl (y) bekannt wird.

Der Umstand, dafs man bei einer **unvollständigen** Angabe des **Mafs-Zahlen-Systemes** statt eines Punktes (P) eine **kontinuierliche Reihe von Punkten** (einen geometrischen Ort für P) findet, kann verwertet werden, um eine **Linie** beziehungsweise eine **Fläche** auf höchst einfache Weise darzustellen.

Unvollständige Mafs-Zahlen-Systeme stellen **Linien** oder **Flächen** dar und zwar **Linien**, wenn **eine** Zahl des Systemes fehlt, **Flächen** dagegen, wenn **zwei** Zahlen des Systemes fehlen.

*Die Angabe (x, y, z) bestimmt z. B. einen und nur einen **Punkt** des Raumes.*

*Fehlt die Mafs-Zahl x, so sind zwei Parallel-Ebenen (y, z) gegeben, welche sich in einer graden **Linie** schneiden, fehlt auch noch die Angabe y, so ist nur eine Parallel-Ebene (z) gegeben, d. h. man gelangt zu einer **Fläche**, die in diesem einfachen Falle eine Ebene ist.*

Die Angabe (ρ, λ, ζ) bestimmt gleichfalls einen Punkt des Raumes in eindeutiger Weise.

Fehlen die Mafs-Zahlen ρ und λ, so sagt die Angabe von ζ nur aus, dafs OQ mit der Achse den Winkel ζ bildet, dafs also Q auf einer bestimmten Kreiskegelfläche liegt, fehlen die Mafs-Zahlen ρ und ζ, so sagt die Angabe von λ, dafs die Meridian-Ebene von Q mit der ersten Meridian-Ebene den Winkel λ bildet, dafs also Q auf einer bestimmten Ebene liegt, fehlen endlich die Mafs-Zahlen λ und ζ, so sagt die Angabe von ρ, dafs Q von O um ρ entfernt ist, dafs also Q auf einer bestimmten Kugel liegt.

Fehlt nur ρ, so geben ζ und λ den Schnitt eines Kegels mit einer Halb-Ebene, d. h. bei der angenommenen Lage eine Grade, fehlt nur ζ, so geben ρ und λ den Schnitt einer Kugel und einer Halb-Ebene, d. h. hier einen Halbkreis, fehlt endlich nur λ, so geben ρ und ζ den Schnitt einer Kugel und eines Kreiskegels, d. h. hier einen Kreis.

Diese Betrachtungen gelten ganz allgemein. Fehlt eine Mafs-Zahl zur Bestimmung der Lage des Punktes, so liegt eine einfache Unbestimmtheit vor und dieser entspricht ein Gebilde von einer Dimension (Linie), fehlen dagegen zwei Mafs-Zahlen, so liegt eine zweifache Unbestimmtheit vor und dieser entspricht ein Gebilde von zwei Dimensionen (Fläche).

Wenn ein **Mafs-Zahlen-System** nicht unmittelbar gegeben ist, so müssen dessen Glieder aus irgend welchen anderen Bestimmungen herleitbar sein, d. h. sie müssen sich als **Wurzeln** irgend welcher **Gleichungen** ergeben.

Man gelangt nur durch unmittelbare oder durch mittelbare Messungen zu Mafs-Zahlen.

Wenn n von einander unabhängige Unbekannte durch m von einander unabhängige Gleichungen verbunden sind, so tritt Folgendes ein:

Wenn $m = n$ ist, so sind die Unbekannten bestimmt, d. h. dieselben können durch die Koëfficienten der Gleichungen ausgedrückt gedacht werden.

Wenn $m > n$ ist, so sind die Unbekannten überbestimmt, wenn $m < n$ ist, so sind die Unbekannten unterbestimmt: im ersteren Falle müssen bestimmte Relationen zwischen den Koëfficienten der Gleichungen bestehen, in letzterem Falle wird jede der Unbekannten durch eine unendliche Anzahl von Werten dargestellt.

Es sei $m > n$. Wenn man mit Hülfe der ersten Gleichung eine Unbekannte, z. B. x durch die übrigen $(n - 1)$ ausgedrückt und deren Wert in die anderen $m - 1$ Gleichungen eingesetzt denkt, so erhält man $m - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten, wenn man nun mit Hülfe einer dieser Gleichungen eine zweite Unbekannte, z. B. y durch die übrigen $(n - 2)$ ausgedrückt und deren Wert in die andern $m - 2$ Gleichungen eingesetzt denkt, so erhält man $m - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten etc. Schliefslich gelangt man zu $m - (n - 1)$, d. h. zu $m - n + 1$ Gleichuungen mit $n - (n - 1)$ d. h. mit 1 Unbekannten.

Aus jeder der $m - n + 1$ Gleichungen kann man die letzte Unbekannte bestimmen, so dafs für diese $m - n + 1$ verschiedene Werte resultieren. Dieses Ergebnis hat nur Sinn, wenn unter den Koëfficienten die $m - n$ Gleichungen bestehen, welche man durch die Vergleichung der $m - n$ 1 + Werte der letzten Unbekannten erhält.

Für den Grenzfall $m = n$ kommt man auf eine Gleichung mit einer Unbekannten, deren Lösung dann zur Bestimmung der übrigen $n - 1$ Unbekannten führt.

Es sei $m < n$. Teilt man die Unbekannten hier in zwei Gruppen, von denen die eine m und die andere $n - m$ Unbekannte enthält, so gilt für die erste Gruppe das oben angedeutete Verfahren und die letzte Unbekannte dieser Gruppe läfst sich darnach durch die $n - m$ Unbekannten der andern Gruppe ausdrücken, so dafs man also auf eine Gleichung mit $n - m + 1$ Unbekannten kommt, welche im allgemeinen nicht ausreicht, um dieselbe zu bestimmen.

Für den Grenzfall $m = n$ kommt man auf eine Gleichung mit einer Unbekannten, deren Lösung dann zur Bestimmung der übrigen $n - 1$ Unbekannten führt.

Es sei z. B. gegeben:

$$
\begin{aligned}
1)\ & a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0. \\
2)\ & a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0. \\
3)\ & a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0. \\
4)\ & a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Bestimmt man z aus 1), so führt die Substitution von z in 2), 3), 4) zu 3 Gleichungen 5), 6), 7) mit 2 Unbekannten (x und y), bestimmt man nun y aus 5), so führt die Substitution von y in 6) und 7) zu 2 Gleichungen 8), 9) mit 1 Unbekannten, aus deren jeder x bestimmt werden kann. Wenn man die beiden Werte x_1 und x_2 vergleicht, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen den Koëfficienten des Gleichungs-Systems.

Ist dagegen überhaupt nur 1) und 2) gegeben, so führt die Bestimmung von z zu einer Gleichung mit zwei Unbekannten, welche durch unendlich viele Werte-Paare (x, y) gelöst werden kann. Jedem Werte-Paar (x, y) entspricht eine bestimmte Anzahl (hier 1) von Werten der Unbekannten z, so dafs diese auch unendlich viele Werte hat.

Ist endlich 1), 2) und 3) gegeben, so liegt der gewöhnlich behandelte Fall vor, d. h. für x, y, z resultiert eine endliche Anzahl von Wert-Systemen.

Jedes **unterbestimmte** Gleichungs-System liefert für jede der Unbekannten im allgemeinen unendlich viele Werte, die sich stetig an einander schliefsen.

Ein solches System führt immer auf eine Gleichung mit mehreren Unbekannten und diese ist stets durch bestimmte Reihen von Werten der Unbekannten lösbar.

So liefert z. B. die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ für $x = \pm 1$ den Wert $y = 0$ und für $x = 0$ den Wert $y = \pm 1$. Wenn man irgend einen Wert von x, welcher zwischen 0 und 1 liegt, beliebig annimmt, so liefert $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ zwei dazu gehörige Werte von y.

Diophantische Gleichungen.

Wenn man die **Unbekannten** eines **unterbestimmten Gleichungs-Systems** als ein **unvollständiges Mafs-Zahlen-System** der Lagen-Bestimmung ansieht, so gelangt man dazu, einen geo-

metrischen Ort durch ein **unterbestimmtes Gleichungs-System** darzustellen.

Es sei z. B. gegeben:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0.$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

Nimmt man nun an, dafs x, y, z ein ***Mafs-Zahlen-System*** *der Lagen-Bestimmung repräsentieren, z. B. im besonderen jenen Gröfsen x, y, z entsprechen, welche beim dreiachsigen Koordinaten-Kreuze auftreten, so sagt jenes Gleichungs-System aus, dafs hier nicht ein Punkt, sondern eine unendliche Reihe von Punkten gemeint ist, weil das System unendlich viele Werte x, y, z zu Wurzeln hat.*

Würde eine dritte Gleichung hinzugefügt, so würde ein Wurzel-System resultieren und das würde bedeuten, dafs es sich um einen einzigen Punkt handelt.

Würde eine Gleichung hinweggenommen, so würde die Unbestimmtheit der Definition des Punktes wachsen.

Die Ungleichheit $n > m$ wird hier nur wenige Fälle umfassen, vorausgesetzt, dafs man n auf seinen kleinsten Wert gebracht hat.

Es wurde gesagt, dafs n im Raume stets auf die Zahl 3 und dafs n für jede Fläche, also auch für die Ebene, auf die Zahl 2 zurückgeführt werden kann.

Für $n = 3$ kann m nur 2 oder 1 sein, für $n = 2$ kann m nur 1 sein.

Wenn $n - m = 1$ ist, so hat man eine **einfache** Unbestimmtheit vor sich und dieser entspricht stets ein Raum-Gebilde von **einer** Dimension, d. h. einer Linie [1]).

Wenn $n - m = 2$ ist, so hat man eine **zweifache** Unbestimmtheit vor sich und dieser entspricht stets ein Raum-Gebilde von **zwei** Dimensionen, d. h. eine Fläche [1]).

Die Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ gestattet, jedesmal zwei Unbekannte, z. B. y und z willkürlich anzunehmen und liefert dann einen bestimmten Wert von z, die Gleichung $ax + by + c = 0$ gestattet, jedesmal nur eine Unbekannte, z. B. y willkürlich anzunehmen und liefert dann einen bestimmten Wert von x.

Aus der Natur eines unterbestimmten Gleichungs-Systems die Eigentümlichkeiten des geometrischen Ortes zu entwickeln, welcher derselben entspricht, und umgekehrt einen geometrischen Ort durch unterbestimmte Gleichungen darzustellen, das ist die Doppelaufgabe, deren Lösung dem abschliefsenden Teil der Geometrie des Mafses zukommt.

Man pflegt diesen Teil **analytische Geometrie** zu nennen [2]).

Will man z. B. wissen, was $3x - 5y = 0$ für die Ebene be-

---

1) Da hier **nur** der Punkt als Element eingeführt wurde.

2) In Bezug auf die Begrenzung des hier Gegebenen vergl. man die Circular-Verfügung des königl. preufs. Min. vom März 1882.

deutet, falls x und y als Mafs-Zahlen in einem rechtwinkligen Koordinaten-Kreuze angesehen werden, so verfährt man folgendermafsen. Setzt man $y = 0$, so ist $x = 0$, d. h. der gesuchte geometrische Ort enthält einen Punkt, für welchen $x = 0$ und $y = 0$ ist, d. h. er geht durch 0. Für jeden andern Punkt (x_1, y_1) desselben gilt $\frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{5}$, eine Bedingung, welche nur durch die **grade** *Linie erfüllt wird* [1]*).*

Man findet, dafs in den Koordinaten (x, y, z) eine Gleichung ersten Grades eine Ebene darstellt und dafs also zwei solche Gleichungen den Schnitt zweier Ebenen, d. h. eine Grade, darstellen.

Einer Gleichung $n$ten Grades entsprechen bestimmte Flächen, die man Flächen $n$ten Grades genannt hat: Die Ebene ist eine Fläche ersten Grades.

Zu den Flächen zweiten Grades gehört die Kugel und das Ellipsoid.

In der Ebene (x, y) stellt eine Gleichung ersten Grades eine Grade dar.

Einer Gleichung zweiten Grades entsprechen in der Ebene bestimmte Linien, die man Linien zweiten Grades genannt hat. Dieselben sind: Kreis und Ellipse, Hyperbel, Parabel, d. h. die sogenannten Kegelschnitte, welche durch den Schnitt einer Ebene und eines Kreiskegels geliefert werden.

Dafs ein bestimmter geometrischer Ort in den Koordinaten (x, y, z) anders dargestellt wird als in $(\rho; \alpha, \beta, \gamma)$ oder $(\rho; \lambda, \zeta)$ bedarf wohl kaum der Erwähnung.

So ist z. B. im Systeme $(\rho; \alpha, \beta, \gamma)$ eine Kugel durch $\rho = a$ gegeben, während sie im Systeme (x, y, z) durch $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ bezeichnet wird.

Durch ein unterbestimmtes Gleichungs-System von einfacher (Linie) oder zweifacher (Fläche) Unbestimmtheit wird das entsprechende Raum-Gebilde **vollständig** dargestellt und zwar sowohl in seiner Lage gegen das ausgewählte Koordinaten-System, als auch in jeder andern Hinsicht.

Es werden also z. B nicht Strecken einer Graden geliefert, sondern eine Grade, nicht Bogen eines Kreises, sondern ein Kreis etc.

Es wird andererseits z. B. nicht blofs der Radius eines Kreises oder blofs die Lage seines Centrums angegeben, sondern beides.

Handelt es sich darum, **Teile** eines Raum-Gebildes darzustellen, so reicht die Angabe eines solchen Gleichungs-Systems nicht aus, weil dann zugleich die neue Aufgabe erwächst, bestimmte Teile in ihrer Lage zum Ganzen zu fixieren.

---

1) Hier werden einzelne grundlegende Aufgaben aus der analytischen Geometrie (z. B. im Anschlufs an Gandtners trefflichen Leitfaden) einzuschalten sein: es handelt sich hier nur darum, die Korrespondenz zwischen Gleichungen und geometrischen Orten zu veranschaulichen.

So mufs z. B. für die Darstellung einer bestimmten Strecke die Lage derselben auf den zugehörigen Graden bestimmt werden.

Bei allen Lagen-Bestimmungen von Punkt-Systemen können Vereinfachungen eintreten, wenn ein Gebilde oder ein Teil eines solchen, abgesehen von seiner Lage, als vollständig bestimmt angesehen werden darf, d. h. wenn ein Gesetz für die Anwendung der zusammentretenden Punkte gegeben ist.

Die Lage eines Kreises vom Radius r gegen ein bestimmtes Koordinaten-System ist z. B. festgestellt, wenn hier die Lage des Centrums gegeben ist. Man reicht also mit einer Angabe $P = (x, y)$ *oder* $P = (\rho; \omega)$ *aus, ohne der Gleichung des Kreises zu bedürfen.*

In allen diesen Fällen hat man ein Punkt-System gegeben, dessen einzelne Punkte in ihrer gegenseitigen Lage wohl bestimmt sind, während die Lage des Ganzen erst festgestellt werden soll.

Hat man z. B. eine Strecke von der Länge a gegeben, so weifs man, dafs die Gesamtheit der Punkte, welche hier zum Systeme zusammentreten, in ihrer gegenseitigen Lage so bestimmt sind, dafs eben eine Grade und nicht ein Kreis oder eine Ellipse in Frage kommt. Diese Angabe macht die Forderung einer Gleichung, welche die Natur des vorgelegten Punkt-Systems (als Grade, Kreis etc.) definiert, überflüssig und gestattet sofort die Lagen-Bestimmung zweier Punkte der Graden, welche um die Länge a von einander entfernt sind, in Angriff zu nehmen.

Diese Vereinfachung ist bei der eindeutigen Bestimmung von homogenen **Strecken** von hohem Werte, zumal dieselben als **Teile** grader Linien, abgesehen von einer definierenden Gleichung, doch noch andere Lagen-Bestimmungen erfordern würden.

Eine solche Vereinfachung kann hier auf den verschiedensten Wegen angebahnt werden und es kann sich nur darum handeln, eine möglichst zweckmäfsige Auswahl zu treffen.

Um eine gegebene Strecke vollständig darzustellen, könnte man z. B. die Lage ihrer Endpunkte P und P' auf bestimmten Linien nach der Fundamental-Methode feststellen, wodurch man in der That Länge und Lage der Strecke angeben würde; im besonderen könnte man Halb-Strahlen O P und O P' in ihrer Richtung irgendwie bestimmen und auf diesen die Längen O P und O P' messen, wodurch man andererseits vielleicht dazu geführt würde, die Projektionen von P und P' in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinaten-Kreuz zu messen etc.

Man könnte auch die Lage der Graden fixieren, auf welcher die Strecke liegt und aufserdem zwei parallele Ebenen einführen, welche auf der Grade die Strecke abschneiden etc.

Von besonderer Bedeutung ist eine Lagen-Bestimmung von Strecken, bei welcher man den Begriff **Lage einer Strecke in Richtung** und **Situations-Punkt** zerlegt.

Man geht dabei von dem Satze aus, dafs von einem Punkte des Raumes in bestimmter Richtung stets eine und nur eine Strecke gezogen werden kann und dafs demnach eine homogene Strecke vollständig gegeben ist, wenn man den Ausgangspunkt, die Richtung und die Länge desselben kennt. Es handelt sich also um die Lagen-Bestimmung des Ausgangspunktes, um die Richtungs-Bestimmung des Halb-Strahls auf dem die Strecke liegt und um die Länge der Strecke.

Die Feststellung der Lage des Ausgangs-Punktes, welcher auf diese Weise zu einem ***Situations-Punkte der Strecke*** *wird (d. h. zu einem Punkte, welcher in letzter Instanz ihre* ***Lage*** *bestimmt), macht keine Schwierigkeiten. Man könnte statt des Anfangs-Punktes auch den End-Punkt oder den Mittel-Punkt etc. der Strecke als Situations-Punkt wählen.*

Zur Feststellung der Richtung denkt man die Strecke parallel mit sich verschoben, so dafs der Mittelpunkt des Koordinaten-Kreuzes O ihr Ausgangs-Punkt wird, und läfst nun eine Richtungs-Bestimmung eintreten.

Über die Längen-Messung ist hier nichts mehr hinzuzufügen.

Man hat hier stets daran festzuhalten, dafs die **Bestimmung der Lage einer Strecke** durch Angabe von **Richtung** und **Situations-Punkt** durchgeführt werden **kann,** dafs man aber hier den Begriff der **Lage** nicht gerade in diese beiden Momente zerlegen **mufs** und vielmehr aufserdem auf den verschiedensten Wegen zu Lagen-Bestimmungen von Strecken gelangen könnte.

Man kann z. B. die Lagen-Bestimmung der Strecke, wie schon angegeben wurde, zurückführen auf die Lagen-Bestimmung der End-Punkte etc.

Jedenfalls ist daran festzuhalten, dafs eine **homogene Strecke** unter anderem durch Angabe von **Länge, Richtung** und **Situations-Punkt** eindeutig bestimmt ist.

Als Situations-Punkt soll hier ein für alle Mal der Anfangs-Punkt der Strecken gewählt werden.

Man hat in der Wahl des Koordinaten-Systems unter denjenigen Systemen, welche für Richtungs-Bestimmungen erdacht worden sind, volle Freiheit.

Im Systeme $(\rho;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$ *wird sich der Ausdruck einer Strecke darstellen lassen als* $[l \mid \alpha,\ \beta,\ \gamma \mid \rho;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma']$, *falls man ihre Länge mit* l, *ihre Richtung durch* $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ *und ihren Situations-Punkt durch* $(\rho;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')$ *gegeben denkt.*

Ebenso ergiebt sich im Systeme $(\rho;\ \lambda,\ \zeta)$ *als Ausdruck für eine Strecke* $[l \mid \lambda,\ \zeta \mid \rho;\ \lambda',\ \zeta']$, *falls man ihre Länge durch* l, *ihre Richtung durch* $\lambda,\ \zeta$ *und ihren Situations-Punkt durch* $(\rho;\ \lambda',\ \zeta')$ *gegeben denkt.*

Wollte man eine Strecke durch die Lage ihrer End-Punkte P *und* P' *darstellen, so dürfte man dafür in leicht fafslicher Symbolik schreiben:*

[ρ; α, β, γ | ρ'; α', β', γ'] oder [ρ; λ, ζ | ρ'; λ', ζ'].

Hier hätte auch [x, y, z | x', y', z'] eine wohl definierte Bedeutung.

Da die Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ besteht, so sind in jedem Falle 6 Mafs-Zahlen nötig, um eine Strecke im Raume eindeutig zu bestimmen.

2. Die Theorie der Strecken.

§. 1. Gleichheit von Strecken.

So lange man in der Geometrie von jeder Lagen-Bestimmung absieht, darf man zwei **homogene Strecken** von **gleicher Länge** ohne weiteres als **gleich** bezeichnen, da man durch diese Festsetzung nur der Thatsache Rechnung trägt, dafs Strecken von gleicher Länge durch einander **ersetzbar** sind, so lange keine Beziehungen der Lage berücksichtigt werden.

Man mufs sich daran gewöhnen, den Begriff der Gleichheit als völlig ***relativ*** *aufzufassen.*

Zwei Dinge, welche in ***bestimmter Beziehung*** *durch einander* ***ersetzbar*** *sind, werden in bestimmter Beziehung* ***gleich*** *genannt, so dafs also zwei Dinge in einer bestimmten Beziehung gleich und in einer andern Beziehung ungleich sein können.*

Die Symbolik $\triangle\, ABC = \triangle\, A'B'C'$ sagt aus, dafs zwei bestimmte Dreiecke, welche abgesehen von jeder Lagen-Beziehung weder in den Seiten noch in den Winkeln übereinzustimmen brauchen und welche demnach zunächst kaum als gleich bezeichnet werden dürften, insofern als gleich angesehen werden sollen, als die Mafs-Zahlen ihrer Flächen übereinstimmen.

Diese Übereinstimmung weist auf eine Ersetzbarkeit in bestimmter Beziehung hin: Wenn es sich um Lagen-Verhältnisse oder um Winkel-Messungen etc. handelt, so kann $\triangle\, ABC$ nicht für $\triangle\, A'B'C'$ eintreten, wohl aber, wenn nur die Mafs-Zahlen der Flächen in Frage kommen.

In der Mathematik ist die Ersetzbarkeit zweier Objekte stets durch das Verhältnis zweier Mafs-Zahlen bedingt, von denen die eine aus dem einen, die andere aus dem andern Objekte stammt.

Wenn ein solches **Mafs-Zahlen-Verhältnis** den Wert **1 : 1** hat, so findet in bestimmter Beziehung **Ersetzbarkeit** statt.

Wenn zwei Objekte der Mathematik vergleichbar sind (d. h. wenn überhaupt die Frage ihrer Ersetzbarkeit gestellt werden darf), so kann es sich doch stets nur um eine Vergleichung in bestimmter Hinsicht, d. h. hier in Bezug auf ein bestimmtes Mafs-Zahlen-Verhältnis, handeln.

Wenn also ein Objekt durch n Mafs-Zahlen eindeutig bestimmt ist — eine Strecke, welche durch [l | λ, ζ | ρ; λ', ζ'] dargestellt

wird, ist z. B. durch 6 Mafs-Zahlen dargestellt — so werden sich für die Vergleichung mit einem Objecte, das mit jenen in Bezug auf alle n Mafs-Zahlen vergleichbar ist, auch n verschiedene Fragen der Ersetzbarkeit darstellen, von denen in diesem Falle vielleicht p, in jenem Falle vielleicht q mit „Ja" beantwortet werden.

Es ergiebt sich danach im allgemeinen eine leicht bestimmbare (Kombinations-Lehre) Anzahl von Arten der Ersetzbarkeit (Äquivalenz oder Gleichheit) zweier Objekte, wobei daran festzuhalten ist, dafs eine Übereinstimmung in allen Mafs-Zahlen zur ***Identität*** *führen mufs. Man hätte bei völliger Übereinstimmung nicht mehr zwei Objekte vor sich, sondern ein Objekt, welches man nur doppelt zählt, so dafs der paradox erscheinende Satz resultiert, demgemäfs zwei Objekte, um (in dieser oder jener Hinsicht)* ***gleich*** *sein zu können (in einer andern Hinsicht)* ***verschieden*** *sein müssen* [1].

Wenn die Mathematik die Frage der Ersetzbarkeit (Gleichheit) ihrer Objekte stets auf die Frage nach der Gleichheit zweier Zahlen (1 : 1) zurückführt, so bedarf natürlich die Untersuchung über die Gleichheit zweier Zahlen einer ganz besonderen Sorgfalt [2].

Man darf homogene Strecken von gleicher Länge **nicht** mehr ohne weiteres als gleich bezeichnen, sobald man auch Lagen-Beziehungen berücksichtigt, weil hier die Frage nach der Ersetzbarkeit auf die Prüfung **mehrerer Zahlen-Verhältnisse** und nicht blofs auf die Vergleichung der Längen zurückweist.

Man wird von vornherein bemerken dürfen, dafs die zunächst eingeführte Äquivalenz von Strecken eine bestimmte, vielleicht die einfachste Form aller hier möglichen Äquivalenzen ist.

Man gelangt hier zu verschiedenen Arten der Gleichheit von Strecken und jede derselben weist auf die Gleichheit eines bestimmten Mafs-Zahlen-Paares oder einer Gruppe solcher Paare zurück.

Sind z. B. zwei vergleichbare Objekte durch 3 Mafs-Zahlen bestimmt, so können dieselben in Bezug auf je eine oder in Bezug auf je zwei derselben übereinstimmen, so dafs sich hier 6 Arten der Gleichheit ergeben. Eine Übereinstimmung in allen drei Mafs-Zahlen würde beide Objekte identisch erscheinen lassen.

Da eine Strecke im Raume durch sechs Mafs-Zahlen gegeben ist, von denen eine die Länge derselben bezeichnet, während die anderen fünf Bestimmungs-Stücke der Lage sind, so können für

---

1) Wären sie nicht verschieden, so wären sie identisch und nicht gleich.

2) Diese Sorgfalt lassen die Lehrbücher der einschlägigen Litteratur fast durchweg vermissen. Da es hier zu weit führen würde, diese arithmetischen Untersuchungen einzuschalten, so mag auf Weierstrass, Functionen-Theorie (Universitäts-Vorlesungen) verwiesen werden.

jedes Koordinaten-System sechs verschiedene Verhältnisse untersucht werden. Danach kann Gleichheit in Bezug auf je eins, je zwei, je drei, je vier und je fünf der Mafs-Zahlen-Paare eintreten, d. h. es sind hier $\frac{6}{1} + \frac{6 . 5}{1 . 2} + \frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3} + \frac{6 . 5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{6 . 5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 62$ Arten der Gleichheit innerhalb jedes Koordinaten-Systems zu unterscheiden.

Fafst man nun die **eine** Mafs-Zahl der Länge, die **beiden** Mafs-Zahlen der Richtung und die **drei** Mafs-Zahlen des Situations-Punktes als je **ein** Bestimmungsstück auf, so erniedrigt sich die Zahl 62 auf 6. Bei dieser Beschränkung gelangt man zu den Definitionen:

Zwei Strecken sind gleich, wenn die Mafs-Zahlen

1) ihrer **Länge** übereinstimmen,
2) ihrer Richtung übereinstimmen,
3) ihres Situations-Punktes übereinstimmen,
4) von **Länge** und **Richtung** übereinstimmen,
5) von Länge und Situations-Punkt übereinstimmen,
6) von Richtung und Situations-Punkt übereinstimmen,

Zwei Strecken sind identisch, wenn die Mafs-Zahlen

7) von **Länge**, **Richtung** und **Situations-Punkt** übereinstimmen.

Um diese verschiedenen Arten der Gleichheit von Strecken zu unterscheiden, müfste man bestimmte Namen einführen, welche anzeigen, ob in diesem oder jenem Falle diese oder jene Art der Gleichheit gemeint ist.

Für die beiden (1. und 4.) Arten, welche am meisten Verwendung finden, sind auch allgemein anerkannte Bezeichnungen im Umlauf: man nennt Strecken von gleicher Länge **arithmetisch gleich** und nennt Strecken von gleicher Länge und gleicher Richtung **geometrisch gleich**. Wenn man diesen beiden Definitionen noch eine dritte [1]) hinzufügt, so kommt man im allgemeinen aus. Diese Ergänzung, welche für die Mechanik von hoher Wichtigkeit ist, lautet:

Zwei Strecken sind **mechanisch gleich**, wenn die Mafs-Zahlen von **Länge** und **Richtung** übereinstimmen und wenn zugleich die Mafs-Zahlen der Situations-Punkte **beide** Strecken als Teile **einer** Geraden erkennen lassen.

Hier gelten die (nicht umkehrbaren) Beziehungen: Strecken, welche mechanisch gleich sind, sind auch geometrisch gleich und Strecken, welche geometrisch gleich sind, sind auch arithmetisch gleich.

Dafs auch andere Arten der Gleichheit von Bedeutung werden können, soll wenigstens angedeutet werden. Wenn eine Ebene

---

1) Man gelangt hier zu einer der oben erwähnten 62 Arten der Gleichheit.

nur von parallen Licht-Strahlen unter einem bestimmten Winkel α getroffen werden soll, so sind alle gleichgerichteten Strahlen (2) durch einander ersetzbar. Wenn von einem bestimmten Punkte 0 eine Kugel-Welle ausgehen soll, welche zu einer bestimmten Zeit den Radius r hat, so sind alle von 0 ausgehenden Strahlen von der Länge r in gewisser Beziehung (5) durch einander ersetzbar.

Bei der Definition der Gleichheit mufs stets der Grundsatz berücksichtigt werden, dafs zwei Gröfsen, welche einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind.

Diese Beschränkung ist notwendig, weil jener Grundsatz einerseits für Zahlen gilt und andrerseits jede Gleichheit auf das Zahlenverhältnis 1 : 1 zurückweist.

Wollte man z. B. innerhalb einer Graden Strecken von gleicher Länge und entgegengesetztem Sinne als gleich hinstellen, so würde hier aus $a = c$ und $b = c$ nicht $a = b$ folgen, während doch die Rechnung $a = b$ ergäbe.

Die Definitionen der arithmetischen, geometrischen und mechanischen Gleichheit sind mit jenem Grundsatze verträglich.

Gerade die Frage nach dem Sinne ist hier in aller Strenge beachtet worden.

§. 2. Addition von Strecken.

Da man nur **gleichartige** Gröfsen addieren kann, so entspricht jeder **Art der Gleichheit** eine bestimmte **Form der Addition.**

Für jede Form der Addition müssen die beiden Sätze gelten, welche bei der Addition von Zahlen eingeführt werden, d. h. der Satz der **Associativität** und der Satz der **Commutativität.**

Ersterer wird durch die Formel

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c,$$

letzterer wird durch die Formel $a + b = b + a$ dargestellt [1]).

Beide Gesetze gelten nur für Summen, innerhalb welcher die Anzahl der Summanden eine endliche ist, während sowohl die Art der Zusammenfassung als auch die Anordnung der Glieder bei Summen von unendlich vielen Gliedern im allgemeinen von Einflufs ist.

Aus der Reihe

$$+\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

kann man die beiden Summen [2])

$$s_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

1) Vergl. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, S. 2.

2) Vergl. Schlömilch, Kompendium der Analysis, I, S. 180. Das Beispiel wird dort zu einem andern Zwecke verwandt als hier im Texte.

und

$$s_2 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

$$\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

bilden, für welche die gliederweise berechnete Differenz ist:

$$s_1 - s_2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2}s_1.$$

Man hat also: $s_1 - s_2 = -\frac{1}{2}s_1$ *oder* $s_2 = \frac{3}{2}s_1$.

Obwohl also s_1 *und* s_2 *abgesehen von der Art der Zusammenfassung und abgesehen von der Anordnung der Glieder übereinstimmen, so ist doch nicht* $s_1 = s_2$ *und man hat daraus zu schliefsen, dafs die beiden grundlegenden Sätze der Addition im Gebiete von Summen mit unendlich vielen Gliedern nicht mehr ohne weiteres gelten.*

Die **arithmetische** Addition von Strecken, welche der **arithmetischen** Gleichheit entspricht, besteht nur einfach darin, dafs man eine **Gesamt-Strecke** aufsucht, deren **Mafs-Zahl gleich der algebraischen Summe der Mafs-Zahlen der einzelnen Strecken** ist.

Man teilt zu dem Ende die gegebenen Strecken nach dem Vorzeichen in zwei Gruppen und trägt die Strecken **jeder** Gruppe auf **je** einer Graden so an einander, dafs keine Strecke mit der andern mehr als **einen** Punkt gemein hat. Wenn man die beiden so resultierenden Gesamt-Strecken auf irgend einer Graden von einem Punkte aus als Strecken gleichen Sinnes aufträgt, so stellt der Überschufs der einen Strecke über die andere die (positive oder negative) Summe der gegebenen Strecke dar.

Sind z. B. zu addieren die Strecken $+a$, $-b$, $-c$, $+d$, $+e$, $+f$, $-g$, $+h$, *so bildet man* $(a+d+e+f+h)$ *und* $-(b+c+g)$ *und leitet daraus* $(a+d+e+f+h) - (b+c+g)$ *her. Dafs hier* $a + (b+c) = (a+b) + c = a + b + c$ *und* $a + b = b + a$ *in Geltung ist, weist man leicht nach* [1]).

Die arithmetische Addition findet sich bei Euklides *(El. I, 2 und 3).*

Die **geometrische** Addition von Strecken, welche der **geometrischen** Gleichheit entspricht, geschieht durch eine **Polygon-Bildung.**

Nachdem man unter den Strecken, welche addiert werden

---

1) Vergl. Hankel, Theorie, S. 63. Es ist wesentlich, dafs auf diesem Wege auch die Multiplikation von Strecken definierbar wird.

sollen, die negativen unter Umkehrung ihrer Richtung in positive verwandelt hat, setzt man **alle** Strecken durch **Parallel-Verschiebung** zu einem **Polygone von einheitlichem Sinne** zusammen und schliefst dasselbe durch eine **Strecke von entgegengesetztem Sinne** ab.

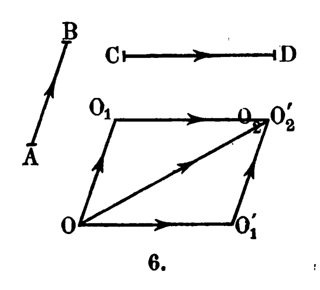
Die **Schlufs-Strecke** des Polygons nennt man die **geometrische Summe** der gegebenen Strecken.

Schliefst sich das Polygon von selbst, so dafs die **Schlufs-Strecke „Null"** resultiert, so gelangt man zu der **Summe „Null"**.

Da man für eine Gruppe gleichgerichteter Strecken, für welche die Bestimmung der Richtung ohne Wert ist, auf den Fall der arithmetischen Additon zurückkommt, so mufste die Definition der geometrischen Addition so eingerichtet werden, dafs die frühere Art zu addieren als Specialfall derselben erscheint. Diese Forderung führt einmal dazu, Strecken von entgegengesetzter Richtung mit positiven und negativen Summanden zu identificieren, sie führt andererseits dazu, in der arithmetischen Addition eine Polygon-Bildung von der Fläche „Null" zu sehen.

Um die Gültigkeit der beiden Grundsätze der Addition zu prüfen, geht man von zwei Strecken aus. Sind zunächst nur AB *und* CD *gegeben, so macht man den festen Punkt* O *durch Parallel-Verschiebung der Strecke* AB *zu dem Anfangspunkt und fügt an die so gewonnene Strecke* $O O_1$ *die Strecke* CD *durch Parallel-Verschiebung so an, dafs* $O O_1 O_2$ *einheitlichen Sinn erlangt. Laut Definition ist dann* $O O_2$ *die gesuchte Summe, welche man offenbar auch erhält, wenn man* O *zum Anfangspunkte von* CD *macht und an die so gewonnene Strecke* $O O'_1$ *die Strecke* AB *als* $O'_1 O'_2$ *anfügt: es fällt* O_2 *auf* O'_2*, d. h. es gilt (Figur 6) hier* $a + b = b + a$.

Sind nun n *Strecken in einer Anordnung (A) gegeben, so kann man daraus jede andere Anordnung (B) herleiten, indem man nach einander immer je zwei benachbarte Strecken mit einander vertauscht. Um z. B. die Anordnung 1, 2, 3, 4, 5 in die Anordnung 2, 4, 1, 3, 5 überzuführen, vertauscht man der Reihe nach 1 und 2, 3 und 4, 1 und 4.*

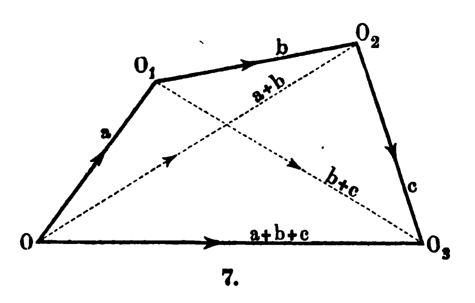


6.

Da nun die Vertauschung je zweier Nachbar-Strecken den Teil der Summe $(O O_2 = O O'_2)$*, welcher von ihnen abhängt, nicht ändert und jede Anordnung (B) durch Vertauschung je zweier Nachbar-Strecken aus einer bestimmten Anordnung (A) herleitbar ist, so ist die Unabhängigkeit des Resultates von der zufällig getroffenen Anordnung erwiesen.*

Dafs andererseits auch

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$



7.

gilt, weist man leicht durch die Konstruktion nach; man gelangt (Figur 7) stets zu $O O_3$, mag man nun $O O_1 + O_1 O_3$ oder $O O_2 + O_2 O_3$ oder $O O_1 + O_1 O_2 + O_2 O_3$ bilden.

Die Forderung $a - b$ erledigt sich in jedem Falle durch die Bemerkung, dafs man $- b$ unter Umkehrung der Richtung positiv machen darf und dann wiederum in der angegebenen Weise zu addieren hat.

Die Summe „Null“ tritt stets auf, wenn Punkte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ in irgend einer Ordnung auf einer Graden liegen und $P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 + \ldots . P_{n-1} P_n + P_n P_1$ gebildet werden soll, weil man dabei zu einem geschlossenen Polygon gelangt.

Zuerst hat Argand[1]) *in seinem Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques (Paris 1806) die geometrische Addition der Strecken eingeführt. Unabhängig davon ist Bellavitis (Ann. d. scienze d. regno Lomb. Venet. 1835) und Möbius (Mechanik des Himmels, 1843) zu derselben Methode gelangt.*

Die **mechanische** Addition der Strecken, welche der **mechanischen** Gleichheit entspricht, beschränkt die Beweglichkeit der Strecken, die schon bei der geometrischen Addition im Vergleich zu der arithmetischen Addition eine geringe war, in hohem Mafse. Die Strecken sind hier nur innerhalb der Graden, denen sie angehören, verschiebbar, so dafs eine Addition nur eintreten kann, wenn Strecken auf derselben Graden oder auf Graden, welche sich schneiden, in Frage kommen.

In beiden Fällen tritt eine **geometrische** Addition ein, welche der **Beschränkung** unterliegt, dass die resultierenden Strecken wiederum nur auf den Graden, welchen sie einmal angehören, verschoben werden dürfen.

Die **mechanische** Addition stellt sich also zunächst als eine **geometrische** Addition dar, welche gewissen **Bedingungen** unterliegt, und es bliebe noch übrig den Begriff der mechanischen Addition so zu erweitern, dafs die **geometrische** Addition überhaupt als ihr Specialfall erscheint, also im besonderen eine mechanische Addition von Strecken auf windschiefen Graden zu begründen. Eine solche Erweiterung ist bisher noch nicht notwendig geworden und darum stehen mechanische und geometrische Addition scheinbar in einer andern Beziehung zu einander, als geometrische und arithmetische Addition.

---

1) Vgl. Hankel, Theorie, S. 82.

*Die **geometrische** Addition stellt sich auch zunächst als eine arithmetische Addition dar, welche gewissen **Bedingungen** unterliegt und zwar liegt die Beschränkung hier in der Berücksichtigung der Richtung. Aufserdem ist aber in diesem Gebiete durch das Polygon-Verfahren eine Erweiterung gegeben, deren Analogon in dem Gebiete der mechanischen Addition (für windschiefe Graden etc.) bis jetzt noch fehlt.*

Dafs für die so beschränkte geometrische, d. h. für die mechanische Addition die Grundsätze der Addition gelten, liegt auf der Hand.

Man unterscheidet des öfteren die mechanische Gleichheit als Äquivalenz von den beiden andern Arten der Gleichheit [1]).

Eine Summe, welche durch **mechanische** Addition entstanden ist, soll **Resultante** heifsen.

Eine Resultante [2]) *ist also eine geometrische Summe, welche nicht blofs durch Länge und Richtung, sondern auch durch eine gewisse* [3]) *Bedingung für die Lage des Situations-Punktes bestimmt erscheint.*

Im Gegensatz dazu mögen hier die einzelnen Summanden, welche zusammentreten, **Komponenten** heifsen.

Eine Komponente ist also ein geometrischer Summand, welcher nicht blofs durch Länge und Richtung, sondern auch durch eine gewisse Bedingung für die Lage des Situations-Punktes bestimmt erscheint.

Während innerhalb der Gebiete der **arithmetischen** und **geometrischen** Gleichheit eine gegebene Anzahl von Strecken stets zu **einer** Summe vereinigt werden kann, treten die **verschiedensten** Verhältnisse auf, sobald ein System von Strecken zu behandeln ist, für welche die mechanische Gleichheit angenommen wird.

*Dasselbe würde stattfinden, wenn die geometrische Addition nur erlaubt **wäre** unter der Bedingung, dafs sie als arithmetische Addition ausgeführt werden kann, wie die mechanische Addition nur erlaubt **ist** unter der Bedingung, dafs sie als geometrische Addition aufgeführt werden kann. Die Erweiterung im Gebiete der geometrischen Addition, deren Analogon zu bilden hier nicht erforderlich scheint, führt zu jenem einfachen Resultate.*

Infolge dessen giebt es im Gebiete der **mechanischen** Gleichheit eine ausgebildete Theorie für die Addition von Strecken unter diesen und jenen gegebenen Bedingungen, eine Theorie, welche man die **Geometrie der Strecken-Systeme im Gebiete der mechanischen Gleichheit** oder in Abkürzung die **Geometrie der Strecken-Systeme** nennen kann.

---

1) Vergl. Schell, Theorie, I, S. 17.
2) Vergl. Schell, Theorie, I, S. 17.
3) Derselbe ist hier als geometrischer Ort (Grade) gegeben.

Da in den andern Gebieten eine solche Theorie nicht besteht oder vielmehr zu einfach ist, um als solche eingeführt zu werden, so ist obige Abkürzung gestattet.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs für **jede Art der Gleichheit** eine **Addition von Strecken** möglich erscheint, dafs man aber bisher mit der Behandlung jener **drei** Gebiete ausgekommen ist.

Auch hier müfste in Specialfällen stets Übereinstimmung mit Specialgebieten erreicht werden.

Die Gültigkeit der Grundsätze der Addition müssen selbstverständlich unter allen Umständen gewahrt bleiben.

Um bei der **Addition** von Strecken zu **Rechnungs-Ausdrücken** zu gelangen, welche **lagen-bestimmend** sind, bedarf man der **Projektionen** von Strecken auf bestimmte, ein für alle Mal in ihrer Lage gegebene Graden, welche man **Achsen** nennt.

*Es mag hier bemerkt werden, dafs **Addition** in allen **drei** Gebieten von vornherein **algebraisch** gefafst wurde und dafs damit also ebensowohl eine **Zusammensetzung** als auch eine **Zerlegung** bezeichnet worden ist.*

Zur Erinnerung dient, dafs in der Ebene Parallel-Grade und im Raume Parallel-Ebenen durch die Endpunkte einer Strecke die Projektion derselben auf einer Achse abschneiden.

Wenn die projicierenden Graden oder Ebenen die Achse senkrecht schneiden, so spricht man von einer Orthogonal- oder Normal-Projektion. Eine solche soll hier stets vorausgesetzt werden, falls nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird.

Dafs im Gebiete der Normal-Projektionen eine Strecke auf eine Ebene durch Lote von den Endpunkten (d. h. auf die Achse, welche durch den Schnitt einer bestimmten Normal-Ebene gegeben ist) projiciert wird, mag gleichfalls in Erinnerung gebracht werden.

Wenn eine Strecke von der Länge 1 mit einer Achse den Winkel α bildet, so hat die normale Projektions-Strecke die Länge $1 . \cos\alpha$, während ihre Richtung durch die Richtungen der Achse und der gegebenen Strecke bestimmt wird.

Wenn man die Strecke parallel mit sich so verschiebt, dafs ihr Anfangs-Punkt auf die Achse fällt, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem l Hypothenuse ist.

Die Richtung der Projektion bestimmt sich so, dafs nach der Verschiebung Strecke und Projektion denselben Anfangs-Punkt erhalten. Dafür kann man auch sagen: Wenn man Strecke und Projektion zu einem Viereck von einheitlichem, durch die Strecke gegebenen, Sinne vervollständigt, so ist die Projektion von entgegengesetztem Sinne.

Für die analytische (im Rechnungs-Ausdrucke) Darstellung der Addition ist es nun zweckmäfsig, ein rechtwinkliges Koordinaten-

System von drei Achsen einzuführen und die gegebenen Strecken der Reihe nach auf jede der drei Achsen zu projicieren.

Infolge der früher gegebenen Festsetzungen ist auch hier alles bestimmt, wenn man sich erinnert, dafs im Gebiete der geometrischen Addition Strecken von entgegengesetzter Richtung auch von entgegengesetztem Vorzeichen sind und dafs innerhalb einer und derselben Graden auch bei der beschränkten geometrischen Addition, d. h. bei der mechanischen Addition Verschiebungen erlaubt sind.

Wenn hier z. B. für die X-Achse $l \,.\, \cos\alpha$ *negativ wird, so zeigt das an, dafs die Projektion und die Achse entgegengesetzten Sinnes sind. Da* $l \,.\, \cos\alpha$ *überhaupt nur negativ wird, wenn* α *innerhalb der Grenzen* $\frac{\pi}{2} \ldots \frac{3\pi}{2}$ *liegt und hier nur Messungen innerhalb der Grenzen* $o \ldots \pi$ *in Frage kommen, so bildet in diesem Falle die Strecke mit der Achse einen Winkel, welcher innerhalb der Grenzen* $\frac{\pi}{2} \ldots \pi$ *liegt, so dafs die* ***Richtung der Projektion*** *in der That durch das* ***Vorzeichen des Cosinus*** *reguliert wird und* ***keiner gesonderten Bestimmung*** *bedarf.*

Wenn nun eine Reihe von n Strecken gegeben ist, welche mit den Achsen, deren Reihenfolge ein für alle Mal durch x, y, z bezeichnet wird, beziehungsweise die Winkel

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \ldots (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

bilden, während ihre Längen beziehungsweise durch $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ gegeben sind, so gilt für die Projektionen der n Strecken auf die Achsen folgendes Schema:

$$\begin{aligned} X&: p_1 . \cos\alpha_1, \; p_2 . \cos\alpha_2, \; p_3 . \cos\alpha_3, \ldots p_n . \cos\alpha_n; \\ Y&: p_1 . \cos\beta_1, \; p_2 . \cos\beta_2, \; p_3 . \cos\beta_3, \ldots p_n . \cos\beta_n; \\ Z&: p_1 . \cos\gamma_1, \; p_2 . \cos\gamma_2. \; p_3 . \cos\gamma_3, \ldots p_n . \cos\gamma_n; \end{aligned}$$

Wenn nun die **geometrische** Summe der n Strecken die Länge p hat und in ihrer Richtung durch (α, β, γ) bestimmt wird, so hat man bei Benutzung der Abkürzungen

$s_x = p_1 . \cos\alpha_1 + \ldots p_n . \cos\alpha_n$, $s_y = p_1 \cos\beta_1 + \ldots p_n . \cos\beta_n$ und $s_z = p_1 . \cos\gamma_1 + \ldots p_n . \cos\gamma_n$ folgende Beziehungen [1]):

$$s^2_x + s^2_y + s^2_z = p^2 \text{ und } \frac{\cos\alpha}{s_x} = \frac{\cos\beta}{s_y} = \frac{\cos\gamma}{s_z} = \frac{1}{p}.$$

Um die Gültigkeit dieser Formeln nachzuweisen, denkt man sich die n Strecken von irgend einem Punkte aus (z. B. von O aus) zum Polygon gestaltet, dessen Schlufslinie die Länge p und die Richtung (α, β, γ) *hat, und projiciert das geschlossene Polygon,* ***nachdem*** *man den Sinn der Schlufslinie* ***geändert*** *hat, Seite für Seite auf jede der Achsen.*

Nennt man die Summe der Projektionen der Seiten des Poly-

---

1) Vergl. Schell, Theorie I., S. 16. Dabei gilt $\frac{1}{p}$ nur als Länge.

gons kurz die „Projektion des Polygons“, so gilt offenbar der Satz:

Die Projektion eines geschlossenen Polygons von einheitlichem Sinne ist für jede Achse Null.

Demnach ist:

$$s_x + (-p \cdot \cos\alpha) = 0.$$
$$s_y + (-p \cdot \cos\beta) = 0.$$
$$s_z + (-p \cdot \cos\gamma) = 0.$$

Daraus folgt fast unmittelbar: $\frac{\cos\alpha}{s_x} = \frac{\cos\beta}{s_y} = \frac{\cos\gamma}{s_z} = \frac{1}{p}$.

Addiert man jene drei Gleichungen, nachdem man sie quadriert hat, so folgt:

$$s^2_x + s^2_y + s^2_z = p^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = p^2.$$

Die Formeln $p \cdot \cos\alpha = s_x$, $p \cdot \cos\beta = s_y$ *und* $p \cdot \cos\gamma = s_z$ *lassen sich leicht in Worte übersetzen: Bei einer Reihe von Strecken ist für jede Achse die (geometrische)* ***Summe der Projektionen*** *gleich der* ***Projektion der*** *(geometrischen)* ***Summe.***

Aus der Gesamtheit jener drei Formeln läfst sich aufserdem folgende Konstruktion herauslesen:

Wenn man bei einer Reihe von Strecken für jede Achse eines Koordinaten-Kreuzes die geometrische Summe der Projektionen bildet und diesen Summen durch Parallel-Verschiebung denselben Ausgangs-Punkt (O) giebt, so liefert die von O ausgehende Diagonale des hier bestimmten Parallelepipeds die geometrische Summe der Strecken nach Länge und Richtung.

Wie sich diese Sätze bei schiefwinkligen Koordinaten-Kreuzen und schiefwinkliger Projektion umgestalten, ist leicht zu übersehen.

Die Gröfse p kann nur „Null“ werden, wenn die drei Gröfsen s_x, s_y, s_z gleichzeitig „Null“ sind. Das tritt ein, so oft sich das Summations-Polygon als ein geschlossenes darstellt und es erhebt sich nun umgekehrt die Frage, ob die Bedingung $s_x = s_y = s_z = 0$ auch jedesmal auf ein geschlossenes Summations-Polygon hindeutet: diese **Frage** ist zu **bejahen.**

Es handelt sich darum, ob die ***notwendige*** *Bedingung* $s_x = s_y = s_z = 0$ *auch* ***hinreichend*** *ist.*

Man sieht ein, dafs die ***notwendige*** *Bedingung* $s_x = 0$ *allein* ***nicht*** *hinreichend ist, da auch die Projektion eines* ***offenen*** *Polygons auf eine Achse, die* ***senkrecht*** *zur Schlufslinie desselben liegt, den Wert „Null“ hat. Alle* ***solche*** *Achsen sind irgend einer* ***Normal-Ebene*** *der Schlufs-Linie parallel.*

Wenn nun $s_x = s_y = s_z = 0$ *auf ein* ***offenes*** *Polygon hindeuten sollten, so müfsten* ***OX, OY*** *und* ***OZ*** *gleichzeitig auf der* ***Schlufs-Linie*** *desselben senkrecht stehen, was offenbar unmöglich ist. Diese Erwägungen kann man in den Satz zusammenfassen:*

Hat die Projektion eines Polygons für ***drei*** *Achsen, welche nicht derselben Ebene parallel sind, den Wert „Null“, so hat sie*

*für **jede** Achse den Wert „Null“, d. h. das Polygon ist **geschlossen** [1]).*

Wenn s_z dadurch Null wird, dafs $\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2 = \ldots \cos\gamma_n = 0$ ist, so sind alle Strecken der Ebene X O Y parallel.

Wird aufserdem s_y dadurch Null, dafs

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = \ldots . \cos\beta_n = 0$$

ist, so sind alle Strecken der Graden O X parallel.

Im ersteren Falle bedarf man nur eines ebenen Kreuzes und hat die Formeln $p^2 = s^2_x + s^2_y$ *und* $\frac{\cos\alpha}{s_x} = \frac{\cos\beta}{s_y} = \frac{1}{p}$ *zu benutzen, wobei aufserdem* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ *ist.*

Im anderen Falle bedarf man nur einer Graden und hat die Formeln $p = s_x$ *und* $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \ldots \cos a_n = \cos\alpha_n$ *zu benutzen.*

Die Theorie der Addition von Strecken, welche hier gegeben wurde, ist eine Erweiterung der beiden Sätze, welche unter dem Namen des **Parallelogramms** und des **Parallelepipeds** von Strecken bekannt sind.

*Die Vereinigung **zweier** Strecken läfst sich dadurch bewirken, dafs man ihnen durch Parallel-Verschiebung denselben Ausgangs-Punkt (P) giebt und die von P ausgehende Diagonale des so bestimmten Parallelogramms zieht. Dieselbe stellt die geometrische Summe der Strecken dar, d. h. sie bestimmt dieselbe nach Gröfse und Richtung.*

*Die Vereinigung **dreier** Strecken, die nicht **einer** Ebene parallel sind, läfst sich dadurch bewirken, dafs man ihnen durch Parallel-Verschiebung denselben Ausgangs-Punkt (P) giebt und die von P ausgehende Diagonale des so bestimmten Parallelepipeds zieht. Dieselbe stellt die geometrische Summe der Strecken dar, d. h. sie bestimmt dieselben nach Gröfse und Richtung.*

Der erste Satz gestattet ohne weiteres alle Strecken, welche in einer Ebene liegen, zu vereinigen, indem man der Reihe nach je zwei derselben behandelt.

Der zweite Satz gilt für die hier nicht umfafsten Strecken.

§. 3. Geometrie der Strecken-Systeme.

Strecken, welche durch Länge und Richtung bestimmt sind und welche nur innerhalb der Graden, auf denen sie einmal liegen, verschoben werden dürfen, bilden ein **Strecken-System.**

Für die **Vereinigung** und **Zerlegung** der Strecken eines solchen Systems gelten die Grundsätze der **mechanischen** Addition.

Zwei Strecken-Systeme sollen **äquivalent** genannt werden, wenn sie nach den Grundsätzen der **mechanischen** Addition in einander transformiert werden können.

---

1) Vergl. Schell, Theorie I, S. 16.

Im Hinblick auf solche Transformationen kann nach der **einfachsten Form** irgend einer Gruppe von äquivalenten Systemen gefragt werden.

Ob schliefslich alle Gruppen auf **eine** einfachste Form zurückgeführt werden können, ist im besonderen zu untersuchen.

In den Gebieten der **arithmetischen** und **geometrischen** Addition existierte der grundlegende Satz, dafs je **zwei** Strecken durch **eine** Strecke ersetzbar waren und daraus folgte als Endergebnis der Transformation unter allen Umständen **eine** einzelne Strecke. Es liegt demnach nahe, zunächst die Gültigkeit jenes grundlegenden Satzes für das Gebiet der **mechanischen** Addition zu prüfen.

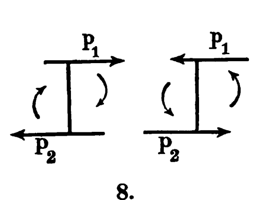
Das Ergebnis dieser Prüfung ist folgendes: Zwei Strecken lassen sich hier entweder durch **eine** Strecke oder durch **ein** Paar gleich langer Strecken von entgegengesetzter Richtung oder durch **ein** solches Paar **und** durch **eine** Strecke ersetzen.

Demnach kann man bei der Transformation eines beliebigen Streckensystemes immer zunächst zu **einer** einzigen Strecke und zu einer Gruppe von Strecken-Paaren kommen und es entsteht nun wiederum die Frage nach der Reduktion einer solchen Gruppe.

Das Endergebnis der Untersuchung ist, dafs **alle** Strecken-Systeme in **drei** Klassen geteilt werden können, weil sie entweder in **eine** Strecke oder in **ein** Paar oder in **eine** Strecke **und** in **ein** Paar transformierbar sind.

*Ein Strecken-Paar und eine Strecke sind einander nie äquivalent, so lange man im Gebiete des **Endlichen** bleibt. Darum ist das Strecken-Paar neben der Einzel-Strecke als besonderes Element der Strecken-Systeme einzuführen.*

Die Einführung des Paares verdankt man Poinsot [1].



8.

*Man nennt die beiden gleichen **Strecken** die **Seiten** des Paares und bezeichnet den Normalabstand derselben als **Arm** oder **Breite** des Paares. Das Produkt aus der Mafs-Zahl der **Länge** einer Seite und der Mafs-Zahl der **Länge** des Arms heifst das **Moment** des Paares.*

*Die Graden, auf denen die Seiten eines Paares liegen, grenzen in der Ebene ein unendlich grofses Stück ab, welches der **Parallel-Streifen** des betreffenden Paares genannt werden mag.*

Denkt man ein Strecken-Paar (Figur 8) um die Mitte seines Armes gedreht und zwar in dem Sinne, welchen die Richtungen seiner Seiten (markiert durch die Pfeilspitzen) bezeichnen, so gelangt man zur Vorstellung einer drehenden Bewegung, welche im Sinne

---

[1] Vergl. Lionville's Journal, 1834 und 1851. Théorie nouvelle de la rotation des corps.

eines Uhrzeigers oder diesem entgegen zu Stande kommt, je nachdem man sich auf der einen oder auf der andern Seite der Paar-Ebene als Zuschauer denkt.

Wenn man den einen Drehungs-Sinn, z. B. den, welcher mit der Bewegung eines Uhrzeigers übereinstimmt, als positiven fixiert, so kann man die Seite der Paar-Ebene, auf welcher ein Zuschauer eine Drehung von positivem Sinne bemerken müfste, die ***positive*** *Seite (+) der Ebene nennen.*

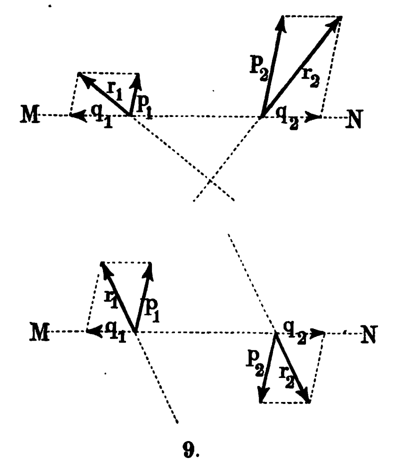
Errichtet man nun auf der Ebene des Paares eine Normale und fixiert deren Richtung so, dafs dieselbe einem Durchgange von — nach + entspricht, so giebt dieselbe den Sinn des Paares an. Trägt man auf dieser Graden, welche die ***Achse*** *des Paares heifst, eine Strecke gleicher Richtung ab, deren Mafs-Zahl zugleich die Mafs-Zahl des Momentes ist, so ist diese Strecke, welche das* ***Achsen-Moment*** *des Paares genannt wird, gewissermafsen ein* ***Symbol*** *des Strecken-Paares.*

Es seien nun zunächst **zwei** Strecken vorgelegt.

Die Graden, auf welche dieselben angewiesen sind, schneiden sich entweder im Endlichen oder sie sind parallel oder sie kreuzen sich.

Im **ersten** Falle kann man den beiden Strecken (p_1 und p_2) durch Verschiebung denselben Ausgangs-Punkt geben. Da man dieselben in dieser Lage geometrisch addieren darf, so gelangt man hier zu **einer** resultierenden (r) Strecke.

Im **zweiten** Falle (Figur 9) kann man die Anfangs-Punkte der parallelen Strecken (p_1 und p_2) durch eine Grade MN verbinden und in dieser zwei gleich lange Hülfs-Strecken (q_1 und q_2) von entgegengesetzter Richtung annehmen, welche sich aufheben. Indem man die eine derselben mit der einen gegebenen Strecke und die andere mit der anderen gegebenen Strecke vereinigt, gelangt man zu zwei Resultanten (r_1 und r_2), welche sich im allgemeinen schneiden und daher zum ersten Fall zurückführen.



9.

Das tritt bei **gleicher** Richtung von p_1 und p_2 immer ein, bei **entgegengesetzter** dagegen nur, wenn die Länge der Strecken verschieden sind.

In dem einen hiermit ausgeschlossenen Falle hat man:

Zwei **Parallel-Strecken** von **gleicher** Länge und **entgegengesetzter** Richtung gehen bei der Transformation in zwei andere **Parallel-Strecken** von **derselben Beschaffenheit** über.

Darauf beruht die Berechtigung hier ein **neues** Element, das **Strecken-Paar** einzuführen.

Im **dritten** Falle kann man durch den Anfangs-Punkt der einen Strecke (p_1) eine Parallele zu der andern Strecke (p_2) legen und in dieser zwei Hülfs-Strecken einführen, die in ihrer Länge mit p_2 übereinstimmen und von entgegengesetzter Richtung sind.

Man kann nun eine der Hülfs-Strecken mit p_2 zu einem Paare zusammenfassen und die andere derselben mit p_1 zu einer resultierenden Strecke vereinigen, d. h. man kommt zu **einem** Paare und **einer** Strecke.

Da nun die Transformation irgend eines Strecken-Systems, indem man immer je zwei Strecken behandelt, zunächst nur zu **einer** Strecke und einer **Gruppe von Paaren** führen kann, so hat man des weiteren die Frage nach der Transformation von **Strecken-Paaren** in Angriff zu nehmen.

Hier gilt der Satz: **Strecken-Paare** werden addiert, indem man ihre **Achsen-Momente** wie **einzelne Strecken** behandelt, welche **geometrisch** (nicht mechanisch) zu addieren sind, und die **eine** dabei resultierende Strecke als Achsen-Moment **eines** Paares auffafst, das als **Summe aller Paare** zu bezeichnen ist.

Der Beweis des Satzes zerfällt in mehrere Teile.

I. Jedes Strecken-Paar darf in seiner Ebene beliebigen Lagen-Änderungen unterworfen werden.

*Um dieses Theorem nachzuweisen, zeigt man zunächst, dass zwei Paare von gleicher Seite und gleichem Arme einander in **jeder** Lage aufheben, wenn sie entgegengesetzten Sinnes sind.*

*Wenn sich die Parallel-Streifen (I und II) zweier solcher Paare schneiden, so kann man unter den vier Schnittpunkten zwei gegenüberstehende auswählen, dieselben zu Anfangs-Punkten je zweier Strecken machen und an ihnen Resultanten-Bildung eintreten lassen. Die beiden so entstandenen Resultanten heben sich auf, da sie gleiche Strecken von entgegengesetzter Richtung sind und in **eine und dieselbe** Grade fallen.*

Wenn sich die Parallel-Streifen (I und II) nicht schneiden, so schneidet man dieselben durch einen dritten Parallel-Streifen (III) von gleicher Breite und nimmt auf dessen Grenze zwei Strecken-Paare an, welche von den gegebenen nur in der Lage abweichen. Auf je zwei der somit gegebenen Paare wendet man die vorige Betrachtung an.

Wenn die Parallel-Streifen (I und II) im besonderen zusammenfallen, so bedarf man keiner Hülfs-Konstruktion.

Fügt man nun einem Strecken-Paare zwei Hülfs-Paare von entgegengesetztem Sinne hinzu, welche mit demselben in Seite und Arm übereinstimmen, so hebt das eine derselben das gegebene Paar auf und statt dessen bleibt ein gleiches Paar in anderer Lage übrig.

II. Die Ebene jedes Strecken-Paares darf parallel mit sich verschoben werden.

Um dieses Theorem nachzuweisen, benutzt man wiederum die eben durchgeführten Überlegungen. Man nimmt zunächst zwei Strecken-Paare von g l e i c h e r *Seite und* g l e i c h e m *Arme an, welche* e n t g e g e n g e s e t z t e n *Sinn haben und in parallelen Ebenen liegen, und weist nach, dafs sich dieselben aufheben. Zu dem Ende bringt man die Grenzlinien der beiden Parallel-Streifen in parallele Lage (I) und konstruiert zwei Diagonal-Ebenen der so bezeichneten parallelepipedischen Säule. In jeder Diagonal-Ebene liegen nun zwei* **gleichgerichtete** *Strecken, deren Resultante in einer Diagonal-Achse der Säule liegt. Die beiden Resultanten heben sich auf, da sie gleiche Strecken von entgegengesetzter Richtung sind und in* **eine und dieselbe** *Grade fallen.*

III. Jedes Strecken-Paar darf allen Lagen-Änderungen unterworfen werden, bei denen seine Achse **dieselbe** *Richtung behält.*

Dieses Theorem fafst die Ergebnisse von I und II zusammen.

Würde man die Richtung der Achse in die entgegengesetzte verwandeln, so würde man den Sinn des Strecken-Paares umkehren, d. h. man würde seine Ebene nicht blofs verschieben, sondern auch umklappen.

Jede andere Richtungs-Änderung der Paar-Achse würde einer anderen Drehung der Paar-Ebene um eine in ihr gelegene Achse entsprechen. Solche Drehungen sind ausgeschlossen.

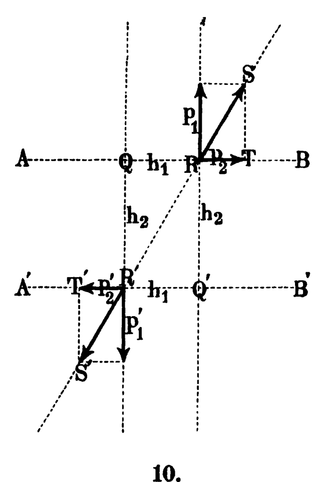
IV. Strecken-Paare von gleichem Momente, deren Achsen gleiche Richtung haben, sind einander äquivalent.

Um dieses Theorem nachzuweisen, zeigt man, dafs zwei Paare von g l e i c h e m *Moment und* e n t g e g e n g e s e t z t e m *Sinne sich aufheben, wenn sie in* d e r s e l b e n *Ebene liegen.*

Das eine Paar habe (Figur 10) die Seiten p_1 *und* p'_1 *und den Arm* h_1, *das andere Paar habe die Seiten* p_2 *und* p'_2 *und den Arm* h_2, *so dafs man also die Gleichungen*

$$p_1 \,.\, h_1 = p'_1 \,.\, h_1 = p'_2 \,.\, h_2 = p_2 \,.\, h_2$$

anzusetzen hat.



10.

Man verschiebt die beiden Parallel-Streifen (I und II), so dafs sich dieselben rechtwinklig schneiden und bildet an zwei gegenüberstehenden Schnittpunkten (R und R') die Resultanten RS und R' S', welche gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet sind. Kann man zeigen, dafs die beiden Resultanten in **eine und dieselbe** *Grade fallen, so ist der Satz erwiesen. Wenn die Verlängerung von SR den Punkt Z der Linie A' B' trifft, so hat man*

wegen der Ähnlichkeit von $\triangle SRT$ *und* $\triangle RZQ'$ *die Proportion* $\frac{RT}{TS} = \frac{ZQ'}{Q'R}$, *d. h. es ist* $ZQ' = \frac{RT}{TS} \cdot Q'R = \frac{p_2}{p_1} \cdot h_2$: *Da nach Voraussetzung* $R'Q' = h_1 = \frac{p_2}{p_1} \cdot h_2$ *ist, so fällt* Z *in den Punkt* R', *d. h. die Verlängerung von* SR *geht durch* R'. *Ebenso weist man nach, dafs die Verlängerung von* $S'R'$ *durch* R *geht.*

Man darf demnach Seite und Arm eines Strecken-Paares verändern, wenn man nur dabei das Moment und die Achsen-Richtung ungeändert läfst.

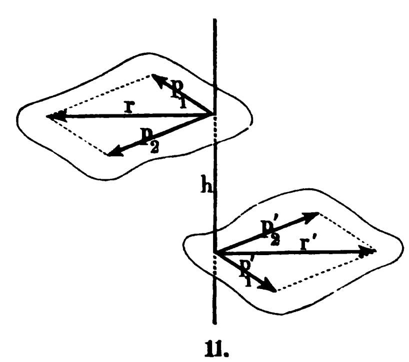
V. Strecken-Paare, deren Achsen gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, werden vereinigt, indem man ihre Achsen-Momente geometrisch addiert.

Dieses Theorem folgt unmittelbar aus III und IV. Man bringt alle Strecken-Paare durch Verschiebung in e i n e Ebene und giebt ihnen in dieser d e n s e l b e n (nach Gröfse und Lage) Arm. Da nun alle Strecken auf den Grenzen eines Parallel-Streifens liegen, so kann man für jede Grenze eine geometrische Addition der Strecken eintreten lassen, wobei man zu e i n e m Paare gelangt. Da Strecken-Paare von e n t g e g e n g e s e t z t e m Sinne Achsen-Momente von entgegengesetzter Richtung haben, so ist das Theorem hiermit erwiesen.

VI. Strecken-Paare werden vereinigt, indem man ihre Achsen-Momente geometrisch addiert.

Es bleibt nur noch übrig, den Nachweis für zwei Paare zu führen, deren Ebenen sich unter einem Winkel α *schneiden, da dann der Übergang von je zweien zu je zweien im Verein mit V die gesuchte Erweiterung giebt.*

Man macht (Figur 11) eine Strecke (h) der Schnittlinie beider Paar-Ebenen zum gemeinsamen Arme beider Paare, indem man diese verschiebt, und verwandelt. Jeder Endpunkt der Strecke h ist dann der Ausgangs-Punkt je zweier Strecken p_1, p_2 *und* p'_1, p'_2, *welche auf h senkrecht stehen. Diese liefern zwei resultierende Strecken* (r, r') *von g l e i c h e r Länge und e n t g e g e n g e s e t z t e r Richtung, welche auf h in deren Endpunkten senkrecht stehen und also ein Paar vom Arm h bilden. Die Ebenen der gegebenen Paare und des gefundenen Paares bilden unter einander dieselben Winkel wie die Achsen-Momente (Normalen) derselben, welche den Strecken* p_1, p_2 *und* r *beziehungsweise* p'_1, p'_2 *und* r' *nach irgend einem Verhältnisse* $q : 1$ *proportional sind. Das Summations-Dreieck,*



11.

welches aus den Achsen-Momenten gebildet werden kann, ist also dem Summations-Dreieck, welches aus den Strecken gebildet wurde, ähnlich und zwar stehen die homologen Seiten beider Dreiecke auf einander senkrecht. Da der Ähnlichkeits-Faktor hier $q:1$ ist, so hat die Resultante in dem aus den Achsen-Momenten gebildeten Dreiecke den Wert $q.r$ beziehungsweise $q.r'$. Dieselbe bestimmt somit das resultierende Paar nach **Gröfse** *und* **Richtung.**

Da nun die Transformation eines Strecken-Systemes entweder auf **eine** Strecke oder auf **ein** Strecken-Paar oder auf **eine** Strecke **und** auf **ein** Strecken-Paar zurückgeführt werden kann, so scheinen sich in der That drei verschiedene Formen von Strecken-Systemen zu ergeben. Um hier zu entscheiden mufs man untersuchen, ob jene drei verschiedenen Formen auf einander zurückgeführt werden können oder nicht.

I. ***Eine*** *Strecke und* ***ein*** *Strecken-Paar sind* ***nie*** *äquivalent, solange es sich um* ***Endliches*** *handelt.*

Wenn die Strecke der Paar-Ebene parallel ist, so kann man sie durch eine entgegengesetzt gerichtete Strecke zu einem Paare ergänzen, welches dem gegebenen Paare äquivalent ist. Da beide Strecken in ihrer Verbindung das Paar ersetzen und die Hülfs-Strecke für sich nicht der „Null“ äquivalent ist, so kann die gegebene Strecke das gegebene Paar ***nicht*** *ersetzen.*

Wenn die Strecke die Paar-Ebene schneidet, so kann man dieselbe in zwei Strecken zerlegen, von denen die eine der Paar-Ebene parallel ist und in Verbindung mit einer Hülfs-Strecke dem Paare äquivalent ist. Da diese Hülfs-Strecke allein der andern Komponente der gegebenen Strecke nicht äquivalent ist, da beide ***nicht*** *auf derselben Graden liegen, so ist auch hier ein Ersatz* ***eines*** *Paares durch* ***eine*** *Strecke nicht möglich.*

Da für ein Paar eine im Unendlichen gelegene Resultante „Null“ eintreten kann, so ist die Beschränkung auf Endliches geboten.

II. Eine Strecke und ein Strecken-Paar sind nur dann in ***eine*** *Strecke transformierbar, wenn die Strecke der Ebene des Paares parallel ist.*

Da die Strecke nicht für sich der „Null“ äquivalent sein kann, so ist die Transformation in ***ein*** *Paar von vornherein ausgeschlossen.*

Bei Parallelität verwandelt man das Paar zunächst in ein anderes, das die gegebene Strecke zur Seite hat, und verschiebt das transformierte Paar so, dafs die eine Seite desselben die Strecke aufhebt, dafs also überhaupt nur ***eine*** *Strecke übrig bleibt. Diese Strecke stimmt mit der ursprünglich gegebenen bis auf die Lage überein, so dafs diese in einer, der Paar-Ebene parallelen, Ebene parallel mit sich um die Breite des transformierten Paares verschoben erscheint.*

Schneidet die Strecke die Paar-Ebene, so kommt man bei jeder Transformation auf zwei windschiefe Strecken, welche wiederum zu einem Paare und zu einer Strecke zurückführen.

Demnach giebt es **drei** verschiedene Formen von Strecken-Systemen, welche als die **einfachsten** erscheinen und **nicht** in einander transformiert werden können.

Kommt man auf eine Strecke und ein Paar, für welche Parallelität nachzuweisen ist, so hat man die Reduktion noch nicht beendet.

Obwohl im Vorangegangenen zugleich der Weg angedeutet ist, auf welchem die **Transformation** eines beliebigen Strecken-Systemes wirklich durchgeführt werden kann, so bedarf doch die **Geometrie des Mafses** bei einheitlicher Entwicklung einer Methode, welche die Mafs-Zahlen der Lagen-Bestimmung neben den Mafs-Zahlen der Länge für eine solche Transformation verwendet.

Die bisher gegebenen Konstruktionen, welche die Sache sehr gut veranschaulichen, können eine solche Methode bei Rechnungen nicht ersetzen.

Diese Methode geht von folgender Überlegung aus:

Wenn eine Strecke von der Länge l in ihrer Lage zu einem rechtwinkligen Koordinaten-Kreuze durch Angabe der Richtung (α, β, γ) und durch Angabe des Situations-Punktes (x, y, z) gegeben ist, so ist dieselbe im allgemeinen äquivalent **drei** Strecken, welche in den Graden OX, OY und OZ liegen, und **drei** Paaren, welche in den Ebenen YOZ, ZOX und XOY gelegen sind.

Die Strecken sind auf den Achsen der Gröfse und Richtung nach bestimmt durch die Ausdrücke:

$$l \, . \cos\alpha, \; l \, . \cos\beta, \; l \, . \cos\gamma.$$

Die Paare sind in den Ebenen dem Momente und dem Sinne nach bestimmt durch die Ausdrücke:

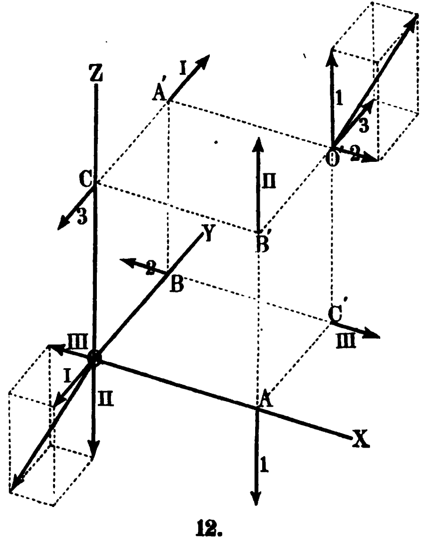
$$l\,(y \, . \cos\gamma - z \, . \cos\beta), \; l\,(z \, . \cos\alpha - x \, . \cos\gamma),$$
$$l\,(x \, . \cos\beta - y \, . \cos\alpha).$$

Um dieses Theorem zu beweisen konstruiert man im Situations-Punkt der Strecken ein Koordinaten-System O', dessen Achsen dem Kreuze O parallel sind und zerlegt die Strecken nach den Achsen von O' in die drei Strecken $l_x = l \, . \cos\alpha$, $l_y = l \, . \cos\beta$ *und* $l_z = l \, . \cos\gamma$. *Fügt man jetzt innerhalb der Achsen von O drei Strecken von derselben Länge und entgegengesetzter Richtung hinzu, so entstehen drei Strecken-Paare und diese sind im Verein mit drei weiteren Strecken, welche man innerhalb der Achsen von O hinzuzufügen hat um den ersten Zusatz aufzuheben, der gegebenen Strecke äquivalent. Die drei zuletzt bezeichneten Strecken werden der Gröfse und Richtung nach durch* $l_x = l \, . \cos\alpha$, $l_y = l \, . \cos\beta$ *und* $l_z = l \, . \cos\gamma$ *gegeben.*

Die drei Strecken-Paare lassen sich nun folgendermafsen umformen:

Man fügt dem Systeme innerhalb der Graden BC', CA' und AB' — man könnte statt dieser auch die Graden B'C, C'A und A'B benutzen — je zwei Strecken von entgegengesetzter Richtung hinzu, deren Längen beziehungsweise l_x, l_y *und* l_z *sind.*

In der Ebene YOZ (Figur 12) liegt nur ein Paar, dessen Seite l_y und dessen Arm z ein Moment $l_y \,.\, z$ liefern, während in der Parallel-Ebene von YOZ ein Paar vom Momente $l_z \,.\, y$ in Rechnung zu bringen ist; beide Paare haben entgegengesetzten Sinn, so daſs deren Vereinigung $\pm\,(l_y \,.\, z - l_z \,.\, y)$ giebt. Für die anderen Ebenen findet man ebenso beziehungsweise $\pm\,(l_z \,.\, x - l_x \,.\, z)$ und $\pm\,(l_x \,.\, y - l_y \,.\, x)$. Die Bestimmung des Vorzeichens erledigt sich durch die früher gemachte Bestimmung, wenn man hinzufügt, daſs ein Achsen-Moment als positiv in Rechnung zu bringen ist, wenn es mit einer Koordinaten-Achse gleichgerichtet ist, daſs es aber als negativ angesehen werden soll, wenn es in seiner Richtung der Richtung einer Achse entgegengesetzt ist. Wenn man sich also in einer Achse auf der Koordinaten-Ebene stehend denkt, so hat man in dieser den Drehungen im Sinne eines Uhrzeigers das positive Vorzeichen zu geben, wodurch sich auch die Vorzeichen für Ebenen, die den Koordinaten-Ebenen parallel sind, erledigen, wenn man dieselben in die Koordinaten-Ebenen verschoben denkt.



12.

Je zwei Strecken, welche zu einem Paare zusammenzufassen sind, tragen dieselbe Ziffer und zwar bezeichnen die römischen Ziffern die Paare der Achsen-Ebenen, während die entsprechenden arabischen Ziffern die entsprechenden Paare der Parallel-Ebenen andeuten.

Diese Überlegung entscheidet hier in allen drei Fällen für das positive Vorzeichen.

Setzt man nun für l_x, l_y und l_z die Werte $l \,.\, \cos\alpha$, $l \,.\, \cos\beta$ und $l \,.\, \cos\gamma$ ein, so erhält man für die **drei** *(neben den* **drei** *Strecken) resultierenden Paare, den oben gegebenen Ausdruck.*

Wenn nun ein Strecken-System gegeben ist, so führt man für jede Strecke die eben bezeichnete Zerlegung aus, so daſs man bei n Strecken zu 3n Hülfsstrecken und 3n Hülfs-Paaren kommt, von denen immer n in einer Achse beziehungsweise in einer Achsen-Ebene gelegen sind. Indem man nun für jede Achse beziehungsweise für jede Achsen-Ebene geometrische Addition eintreten läſst, gelangt man zu drei Strecken L_x, L_y und L_z und zu drei Paaren P_x, P_y und P_z. Für die Vereinigung jeder dieser Tripel gelten dann die früher gegebenen Formeln.

Man findet die **Länge** (L) der resultierenden Strecke und das **Moment** (P) des resultierenden Paares durch die Gleichungen:

$$L^2_x + L^2_y + L^2_z = L^2 \text{ und } P^2_x + P^2_y + P^2_z = P^2.$$

Die **Lage** (α, β, γ) der resultierenden Strecke und die **Lage** (λ, μ, ν) der resultierenden Paar-Achse findet man dagegen durch die Gleichungen:

$$\frac{\cos\alpha}{L_x} = \frac{\cos\beta}{L_y} = \frac{\cos\gamma}{L_z} = \frac{1}{L} \text{ und } \frac{\cos\lambda}{P_x} = \frac{\cos\mu}{P_y} = \frac{\cos\nu}{P_z} = \frac{1}{P}.$$

Dabei ist zu bemerken, dafs sowohl die Summen L_x, L_y und L_z, als auch die Summen P_x, P_y und P_z durch das resultierende Vorzeichen zugleich die Lage der Strecken und Paar-Achsen auf den Koordinaten-Achsen angeben, dafs aber in den Formeln zur Winkel-Bestimmung $\frac{1}{L}$ und $\frac{1}{P}$ nur als Zahl zu gelten hat.

Die resultierende Strecke ist durch (L; α, β, γ; O) gegeben; sie darf nur in der durch O gehenden Graden, auf welcher sie liegt, verschoben werden.

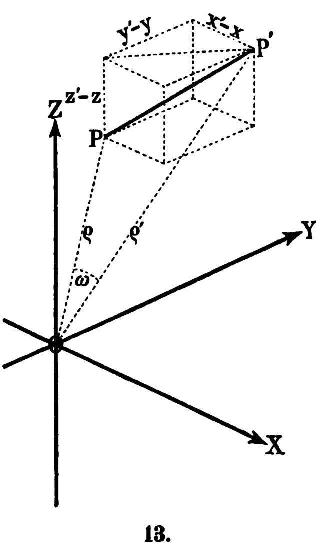
Das resultierende Achsen-Moment ist durch (P; λ, μ, ν; O) gegeben, es darf in der durch O gehenden Graden, auf welcher es liegt, **und** parallel mit dieser verschoben werden.

Es hat ein gewisses Interesse, sich von der Annahme des bestimmten Kreuzes O frei zu machen, indem man die gegenseitige Lage der Strecke und des Strecken-Paares dadurch fixiert, dafs man die Grade, auf welcher die Strecke liegt, als gegeben annimmt und den Winkel ω bestimmt, welchen die Paar-Achse mit dieser Graden bildet.

Der Winkel zwischen Strecke und Achse ist gegeben durch:

$$\cos\omega = \cos\alpha \,.\, \cos\lambda + \cos\beta \,.\, \cos\mu + \cos\gamma \,.\, \cos\nu.$$

Dabei ist ω ein Winkel im ersten oder zweiten Quadranten, je nachdem sich $\cos\omega > o$ oder $\cos\omega < o$ ergiebt.



13.

Für $\omega = 90^0$ ist die oben erwähnte Reduktion auf **eine** *Strecke möglich.*

Um diese Relationen nachzuweisen, verschiebt man das Paar so, dafs seine Achse den Anfangs-Punkt O erhält und nimmt auf derselben einen beliebigen Punkt P an, während man auf der resultierenden Strecke einen beliebigen Punkt P' annimmt (Figur 13). Bezeichnet man $\overline{OP}$ mit ρ und $\overline{OP'}$ mit ρ', so ist:

$$\overline{PP'}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\,\rho\,\rho' \,.\, \cos\omega.$$

Andrerseits ist PP' Diagonale eines Parallelepipeds, welches man gewinnt, wenn man durch P und P' Parallel-Ebenen zu den

Achsen-Ebenen legt. Wenn die Punkte P und P' die Koordinaten x, y, z und x', y', z' haben, so sind die Kanten des Parallelepipeds der Gröfse nach gegeben durch $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ und man hat demnach:

$$\overline{PP'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2) + (x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2\,(xx' + yy' + zz').$$

Setzt man für x, y, z und x', y', z' die Werte $\rho . \cos\lambda$, $\rho . \cos\mu$, $\rho . \cos\nu$ und $\rho . \cos\alpha$, $\rho . \cos\beta$, $\rho . \cos\gamma$ ein, so erhält man:

$$\overline{PP'}^2 = \rho^2\,(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) + \rho'^2\,(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2)$$
$$- 2\,\rho\rho'\,(\cos\lambda\,\cos\alpha + \cos\mu\,\cos\beta + \cos\nu\,\cos\gamma)$$
$$= \rho^2 + \rho'^2 - 2\,\rho\rho'\,(\cos\lambda . \cos\alpha + \cos\mu . \cos\beta + \cos\nu . \cos\gamma).$$

Die Vergleichung mit $\overline{PP'}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' . \cos\omega$ liefert die gesuchte Formel.

Die **Transformation** ist von der **Lage des Koordinaten-Kreuzes** in Bezug auf das gegebene Strecken-System abhängig.

Man darf also zunächst nicht schliefsen, dafs sich die Form, welche man bei **irgend einer** Reduktion eines Strecken-Systems erhält, für dieses bei **andern** Reduktionen auch einstellen wird.

Allgemein darf man behaupten, dafs die resultierende Strecke, welche durch geometrische Summation aller Strecken des Systems entstanden ist, stets dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben wird, während ihre Lage durch O bestimmt ist.

Daraus folgt, dafs für alle Punkte der so gegebenen Graden, in welcher die Resultante verschoben werden darf, dieselbe Transformation gültig ist, dafs hingegen für andere Punkte O Änderungen eintreten können.

Es giebt demnach für jedes System ein Parallel-Strahlenbündel, dessen Richtung durch die resultierende Strecke des Systems gegeben wird. Für verschiedene Strahlen desselben kann die Transformation eine andere sein, während für Punkte eines und desselben Strahles dasselbe Ergebnis herauskommt.

Geht man von einem Strahle OS, für welchen die Transformation (L, P) gilt, zu einem Strahle O'S' über, für welchen die Transformation (L', P') gilt, so ist L = L'. Wenn man nun auf O'S' die Strecken + L und — L aufträgt, so bildet die Strecke L auf OS mit der Strecke — L auf O'S' ein Paar, dessen Arm die Entfernung (s) der beiden Graden OS und O'S' ist.

Demnach ist bei **geometrischer** Addition:

$$P' = P + L . s.$$

Die Achse des ergänzenden Paares L . s steht auf der Ebene von OS und O'S' senkrecht. Bildet man nun für alle von OS um s entfernten Strahlen O'S' die Transformation, so füllen die beziehungsweise ergänzenden Achsen-Momente in O eine Kreisfläche aus, welche auf OS senkrecht steht, während das gegebene Achsen-Moment (P) mit OS den Winkel ω bildet.

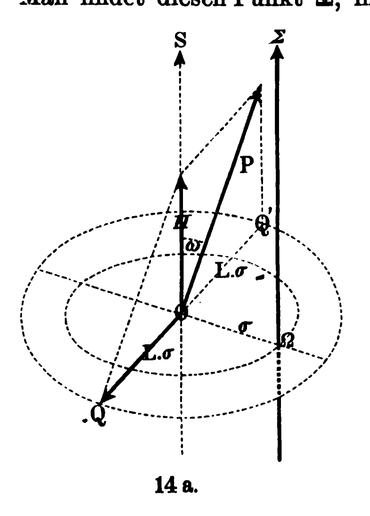
Die verschiedenen Resultanten aus P und L . s bilden einen Kegel, welcher seine Spitze in O hat.

Es frägt sich, ob jemals irgend eine Seite eines solchen Kegels mit O P zusammenfallen kann, d. h. ob es für irgend ein s ein resultierendes Paar giebt, dessen Ebene auf O S normal steht.

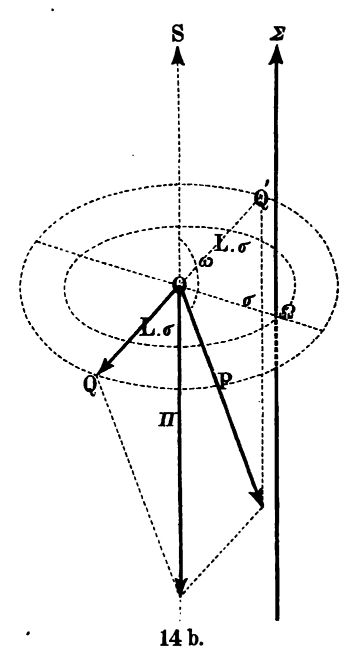
Wenn man durch das gegebene Achsen-Moment (P) und durch O S eine Ebene legt, so steht dieselbe auf jener Kreisfläche senkrecht und deshalb mufs sie die Achse des fraglichen Paares aufnehmen. Diese Ebene schneidet die Kreisfläche in zwei Strahlen O Q und O Q′ von der Länge L . s. Soll nun die Resultante von P und O Q, beziehungsweise von P und O Q′ in die Richtung O S fallen, so mufs die Projektion von P auf Q O Q′ den Punkt Q, beziehungsweise den Punkt Q′ treffen, d. h. es mufs $P . \sin \omega = L . s$ sein.

Es giebt also **einen und nur einen** Wert $\sigma = \frac{P}{L} . \sin \omega$, für welchen die Transformation ein Strecken-Paar liefert, dessen Ebene senkrecht auf O S steht und zwar tritt dieses Ergebnis nur für **einen** Punkt des Kreises vom Radius σ ein (Figur 14 a und 14 b).

Man findet diesen Punkt Ω, indem man die Kreisfläche, deren



14 a.



14 b.

Radius σ ist, durch ein Paar auf einander senkrecht stehender Ebenen aus O S schneidet, von denen eine die Strecke P in sich aufnimmt. Unter den (4) so bestimmten Teil-Punkten der Peripherie hat man denjenigen (Ω) auszuwählen, welcher zur rechten Hand liegt, wenn man sich auf der Kreisfläche so stehend denkt, dafs die Richtung O S vom Fufs zum Kopfe geht, und wenn man dabei die Richtung von P mit den Augen verfolgt.

Die Parallele Ω Σ zu O S, welche durch den so bestimmten Punkt Ω geht, heifst die **Central-Achse** des Systems.

Als Moment für die Central-Achse ergiebt sich:

$$\Pi = \pm \sqrt{P^2 - (L \cdot \sigma)^2} = \pm P \cdot \cos \omega$$

und zwar gilt das obere Zeichen, da für $\omega = 0$ resultieren mufs $P = \Pi$.

Geht man von der Central-Achse aus, für welche die Transformation L und Π gilt, so ist für alle Strahlen im Abstande σ von der Central-Achse

$$P^2 = \Pi^2 + (L \cdot \sigma)^2 \text{ und } \operatorname{tang} \omega = \frac{L}{\Pi} \cdot \sigma.$$

Für jeden Punkt O giebt die Transformation eines Streckensystemes eine resultierende Strecke von unveränderlicher Länge (L) und unveränderlicher Richtung (O S) und aufserdem ein Strecken-Paar von veränderlichem Momente (P) und veränderlicher Achsen-Richtung (ω).

Unter allen Graden, welche O S parallel sind, geniefst eine $\Omega\Sigma$ den Vorzug einer **Central-Achse**, weil sich die anderen Strahlen in gleichem Abstande um dieselbe auf Kreis-Cylinder-Flächen [1]) gruppieren, so zwar, dafs für **jede** Grade **eines** Cylinders P und ω denselben Wert haben.

Die Ebene des zur Central-Achse gehörigen Strecken-Paares steht auf dieser senkrecht.

Wenn die Transformation für die Central-Achse die Werte L und Π liefert, so erhält man für **jede** Grade eines Cylinders vom Radius σ die Gleichungen:

$$P^2 = \Pi^2 + (L \cdot \sigma)^2 \text{ und } \operatorname{tang} \omega = \frac{L}{\Pi} \cdot \sigma.$$

Aus diesen Formeln folgt:

Das **Moment für die Central-Achse** ist das **kleinste** unter allen Momenten.

*Das Moment kann demnach für **keine** Achse verschwinden, wenn es **nicht** für die Central-Achse verschwindet.*

Da die Natur eines Systems von den Werten L und Π abhängt, so ergiebt sich folgende Einteilung:

1) $L = 0$, $\Pi = 0$. Das System ist für **jede** Transformation äquivalent Null.
2) $L = 0$, $\Pi \lessgtr 0$. Das System ist für **jede** Transformation demselben Paare Π äquivalent.
3) $L \lessgtr 0$, $\Pi = 0$. Das System ist für **eine** Grade, nämlich für die **Central-Achse** einer auf dieser gelegenen Strecke äquivalent, während für alle anderen Graden aufserdem Strecken-Paare auftreten, deren Achsen Normalen der Central-Achse sind. Das stimmt überein damit, dafs jede Strecke äquivalent ist einer Parallel-Strecke von gleicher Länge und einem Paare, dessen Ebene beide Strecken in sich aufnimmt.
4) $L \lessgtr 0$, $\Pi \lessgtr 0$. Das System ist für jede Grade einer

1) Ein Cylinder ist ein Kegel, dessen Spitze ins Unendliche fällt.

Strecke und einem Paare oder auch zwei windschiefen Strecken äquivalent.

Ad 1. Die Bedingung $L = 0$, $\Pi = 0$ weist zurück auf $L_x = L_y = L_z = 0$ und $P_x = P_y = P_z = 0$, d. h.: die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs ein System äquivalent Null ist, sind, dafs die Projektionen des Polygons der Strecken und des Polygons der Achsen-Momente für die drei Achsen eines Koordinatenkreuzes verschwinden.

Ad 2. Hier müssen die Projektionen des Strecken-Polygons für die drei Achsen eines Koordinaten-Kreuzes verschwinden.

Ad 3. Interessant ist der Specialfall des Parallel-Systems.

Wenn die gegebenen Strecken alle einander parallel sind, so kann man die Richtung der Achse OZ mit der einen der hier in Frage kommenden Richtungen in Übereinstimmung bringen. Es resultiert eine Strecke, welche auf OZ gelegen ist und ein Paar, dessen Achse OZ unter rechtem Winkel schneidet, so dafs hier L und Π in einer Ebene liegen.

Wenn L nicht verschwindet, so gelangt man stets zu einer resultierenden Strecke, welche aus L und Π entspringt (3). Wenn L verschwindet, so gelangt man stets zu einem resultierenden Paare (2), das im besonderen (1) den Wert „Null“ haben kann.

Zwei Parallel-Strecken L_1 und L_2 von gleicher Richtung ergeben stets eine resultierende Strecke L, welche in der durch L_1 und L_2 bestimmten Ebenen-Streifen liegt, dessen Begrenzungs-Graden (L_1 und L_2) parallel ist und denselben im Verhältnisse $\frac{L_2}{L_1}$ teilt.

Man findet $L = L_1 + L_2$.

Für ungleiche Parallel-Strecken von entgegengesetzter Richtung gilt Analoges, falls man L_1 und L_2 geometrisch addiert, während gleiche Parallel-Strecken ein Strecken-Paar liefern.

Der Beweis dieser Relationen folgt leicht, wenn man die Parallelen durch eine Grade schneidet und wenn man ferner in dieser zwei gleiche Strecken von entgegengesetzter Richtung einführt.

Dieselben Sätze weist man auch folgendermafsen nach: In Bezug auf ein dreiachsiges Kreuz ist die eine Richtung des Systems durch die Kosinus $-a$, $-b$, $-c$ ausdrückbar, wenn die andere Richtung durch die Kosinus $+a$, $+b$, $+c$ gegeben ist.

Aus $L_x = a\Sigma l_i$, $L_y = b\Sigma l_i$, $L_z = c\Sigma l_i$ folgt $L = \Sigma l_i$ und $\cos\alpha = \pm a$, $\cos\beta = \pm b$, $\cos\gamma = \pm c$, d. h. die Resultante, welche die eine Richtung des Systems hat, ist die algebraische Summe der Komponenten.

Man findet ferner

$$P_x = c\Sigma l_i . y_i - b\Sigma l_i . z_i,\ P_y = a\Sigma l_i . z_i - c\Sigma l_i . x_i,$$
$$P_z = b\Sigma l_i . x_i - a\Sigma l_i . y_i.$$

$$\text{d. h. } \cos\omega = \frac{L_x P_x + L_y P_y + L_z P_z}{L . P} = \frac{0}{L . P}.$$

Wenn L von Null verschieden ist, folgt also $\cos\omega = 0$, d. h. $\omega = 90^0$. In diesem Falle, der z. B. für gleichgerichtete Strecken stets eintritt, läfst sich L und P zu einer Strecke vereinigen, deren Lage die Central-Achse des Systems bestimmt; man hat hier $P = 0$ zu setzen.

Auf der Central-Achse liegt ein merkwürdiger Punkt, welcher das **Centrum** *des Parallel-Strecken-Systems genannt werden kann.*

Zerlegt man nämlich die Strecke L der Central-Achse, welche das ganze System ersetzt, im Situations-Punkte (ξ, η, ζ) für eine Reduktion aus O, so findet man

$$P_x = c \,.\, L \,.\, \eta - b \,.\, L \,.\, \zeta, \quad P_y = a \,.\, L \,.\, \zeta - c \,.\, L \,.\, \xi,$$
$$P_z = b \,.\, L \,.\, \xi - a \,.\, L \,.\, \eta.$$

Vergleicht man diese Werte von P_x, P_y, P_z mit ihrer früheren Darstellung, so sieht man, dafs z. B.

$$c \,.\, L \,.\, \eta - b \,.\, L \,.\, \zeta = c \Sigma l_i \,.\, y_i - b \Sigma l_i \,.\, z_i$$

für jeden Punkt (ξ, η, ζ) der Central-Achse erfüllt sein mufs und dafs man dieser Forderung im besonderen durch den Punkt

$$\xi' = \frac{\Sigma l_i \,.\, x_i}{L}, \quad \eta' = \frac{\Sigma l_i \,.\, x_i}{L}, \quad \zeta' = \frac{\Sigma l_i \,.\, z_i}{L}$$

Genüge leisten kann.

Die Lage dieser Punkte (ξ', η', ζ') hängt **nicht** *von a, b, c ab: sie bleibt* **dieselbe,** *so lange $l_1 \,.\,.\, l_n$ und $(x_1, y_1, z_1) \,.\,.\, (x_n, y_n, z_n)$ dieselben Werte haben, d. h. man kann die Strecken des Systems um ihre Zerlegungs-Punkte drehen, ohne dadurch die Lage des Centrums zu ändern, falls nur die Strecken stets unter sich parallel bleiben.*

Da die Zerlegungs-Punkte auf den Graden, aus denen die Strecken ausgeschnitten sind, willkürlich gewählt werden können, so gelangt man zu dem Satze:

Die Central-Achsen (Resultanten) aller Parallel-Strecken-Systeme, deren Elemente durch **beliebige,** *im Gebiete der mechanischen Addition erlaubte, Verschiebungen und durch* **eine** *Drehung der oben bestimmten Art in einander übergeführt werden können, schneiden sich in einem Punkte, der für jedes System als Centrum zu bezeichnen ist.*

Die Existenz des Centrums kann man auch nachweisen ohne sich der Rechnung zu bedienen, indem man folgenden Satz benutzt:

Wenn **zwei** *Strecken-Systeme, deren jedes sich auf e i n e Strecke reducieren läfst, durch* **ein** *drittes System von gleicher Beschaffenheit ersetzbar sind, so schneiden sich die Resultanten der drei Systeme in einem Punkte* [1]*.*

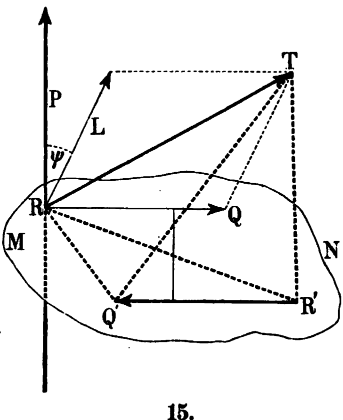
Dieser Satz ist eine Folgerung aus der Thatsache, dafs **zwei** *windschiefe Grade niemals* **einer** *dritten äquivalent sind.*

Ad 2 und 3. *Ein ebenes System, welches sich nicht auf Null reduciert, ist entweder e i n e r Strecke* **oder** *e i n e m Paar äquivalent.*

---

1) Diese einfachen Beziehungen scheinen bisher nicht bemerkt worden zu sein.

Wenn bei einer Reduktion eine Strecke **und** *ein Paar gewonnen wird, so kann man zunächst die eine Strecke des Paares und die resultierende Strecke vereinigen, um dann noch die neu gewonnene Resultante mit der anderen Strecke des Paares zusammenzusetzen.*



15.

Ad 4. *Ein solches System kann auf unendlich viele Weisen durch zwei sich kreuzende Strecken dargestellt werden. Verbindet man die 4 Endpunkte zweier solcher Strecken durch 4 Grade, so entsteht ein* **Tetraëder**, *welches für jedes System von* **konstanter** *Gröfse* $\left(\frac{1}{6} L . \Pi\right)$ *ist.*

Diesen Satz von Chasles beweist man so: Wenn MN die Ebene eines Paares vom Achsen-Momente P ist, so kann man die eine Seite RQ desselben (Figur 15) mit L zu RT zusammensetzen. Die Pyramide aus RT und R'Q' hat die Höhe L . cos ψ und die Grundfläche △ RR'Q', so dafs ihr Volumen

$$\frac{1}{3} . L . \cos\psi . \frac{1}{2} (2 \triangle RR'Q') = \frac{1}{6} L . P . \cos\psi = \frac{1}{6} L . \Pi \text{ ist.}$$

Die Gesamtheit der Paare von windschiefen Strecken, welche ein solches Strecken-System ersetzen, hat eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften.

Führt man für alle Punkte einer beliebigen Ebene ε die Transformation aus, so findet man hier stets **einen und nur einen** *Punkt (E), in welchem das Achsen-Moment der Transformation auf der Ebene senkrecht steht, während ja andererseits die Transformation für einen beliebigen Punkt (E')* **eine und nur eine** *zugehörige Paar-Ebene (ε') liefert.*

Es entsprechen sich also hier Ebenen und Punkte in völlig eindeutiger Weise, eine Zusammengehörigkeit, welche man durch die Wort-Verbindungen Pol und Polar-Ebene ausdrücken kann.

Unter zwei reciproken räumlichen Systemen versteht man zwei räumliche Systeme, in welchen jedem Punkte des einen eine und nur eine Ebene des andern und jeder Ebene des einen ein und nur ein Punkt des andern zugeordnet werden kann.

Das Strecken-System stellt den denkbar einfachsten Fall vor, weil hier die zusammengehörigen Elemente in einander liegen; man nennt ein solches System ein **Null-System** *(Möbius) oder ein Polar-System.*

* * *

Für das Studium dieser Verhältnisse mag aufser auf Möbius, Die Elemente der Mechanik des Himmels (1843), verwiesen werden auf:

Grafsmann, Lineale Ausdehnungslehre (1843 und 1862), Reye, Geometrie der Lage, Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, Unverzagt, Quaternionen (1876), Kummer, Streckensysteme (Crelle, Bd. 57).

Von Werken ausländischen Textes seien erwähnt:

Hamilton, Lectures on Quaternions und Elements of Quaternions, Kelland and Tait, Introduction to Quaternions, Chelini, Arbeiten in den mem. dell' Academia di Bologna, Hamilton, Optic (Transactions of the R. Irish Academy).

3. Die Momente der Punkt-Systeme und die Drehungs-Momente.

§. 1. Allgemeine Theorie der Momente.

Bisher wurden nur **homogene** Gebilde vorausgesetzt, d. h. Gebilde, in denen **alle** Punkte von **gleichem** Werte angenommen wurden.

Jetzt soll von der Verallgemeinerung Gebrauch gemacht werden, wonach **jedem** Punkte ein **bestimmter** Koëfficient seines Wertes zugeordnet werden kann, so dafs homogene Gebilde nur als Specialfälle heterogener Gebilde auftreten können.

Unter dem **Moment eines Punktes** versteht man eine Strecke von bestimmter Lage, deren Länge das **Produkt** aus dem **Werte** des Punktes (P) in irgend einer Potenz der Mafs-Zahl seines **Abstandes** von einem andern Punkte (Q) ist. Im Hinblick auf den Exponenten der Potenz unterscheidet man Momente 1ten, 2ten etc. Grades.

Wenn mehrere Punkte (P_1, P_2 . . . P_n) vorhanden sind, so werden in Bezug auf die Lage der zugehörigen (Q_1, Q_2 . . . Q_n) mannigfache Festsetzungen möglich sein.

Wenn diese Punkte (Q_1, Q_2 . . Q_n) in **einen Punkt** (Q) zusammenfallen, so handelt es sich um die Momente von Punkten (P_1, P_2 . . P_n) für denselben Punkt Q, welcher dann „**Pol**“ genannt wird.

Wenn diese Punkte (Q_1, Q_2 . . Q_n) auf einer **bestimmten Linie** angenommen werden müssen, so handelt es sich um die Momente von Punkten (P_1, P_2 . . . P_n) in Bezug auf eine bestimmte Linie.

Hier wird der Specialfall der graden Linie von besonderer Wichtigkeit sein.

Wenn diese Punkte (Q_1, Q_2 . . . Q_n) auf einer **bestimmten Fläche** angenommen werden müssen, so handelt es sich um die Momente von Punkten (P_1, P_2 . . . P_n) in Bezug auf eine bestimmte Fläche.

Hier wird der Specialfall der Ebene von besonderer Einfachheit sein.

Unter dem **Moment eines Punkt-Aggregates** versteht man die Summe der Momente seiner Punkte: für die Lage dieser Summe können bestimmte Bedingungen vorgeschrieben werden.

Je nachdem nun die Momentenbildung in Bezug auf einen Punkt oder eine Linie oder eine Fläche zu erfolgen hat, unterscheidet man drei verschiedene Arten des Momentes von Punkt-Systemen.

Es genügt im allgemeinen Punkt, Grade und Ebene auszuwählen.

Im Hinblick auf diese Festsetzung unterscheidet man **polare, lineale** und **planare** Momente ersten, zweiten etc. Grades.

Bezeichnet man irgend einen Punkt aus der Reihe $P_1, P_2 .. P_n$ mit P_i und ordnet man ihm ferner den Wert-Koëfficienten m_i zu, so ist bei einem Momente pten Grades der Teil, welcher von P_i abhängt, der Länge und Lage nach gegeben durch eine Strecke von der Mafs-Zahl $m_i . \overline{Q_i P_i}^p$ und der Lage von $Q_i P_i$, falls Q_i den Punkt bezeichnet, dessen Entfernung von P_i gemessen werden soll.

Bei den **polaren** Momenten fallen alle Punkte Q_i in **einen** Punkt Q zusammen, so dafs man hier als Summanden für das Gesamt-Moment $m_i . \overline{QP_i}^p$ anzusehen hat. Um dieses der Gröfse und Lage nach zu bestimmen, verfährt man so: Man zieht von Q aus durch alle Punkte P_i Strahlen und trägt auf ihnen von Q aus Strecken auf, deren Längen die Mafs-Zahl von $m_i . \overline{QP_i}^p$ haben und deren Richtung endgültig (es ist nach Auswahl zwischen zwei grade entgegengesetzten Richtungen) dadurch bestimmt wird, dafs bei positivem m_i die Richtung QP_i, bei negativem m_i dagegen die Richtung $P_i Q$ in Rechnung zu bringen ist.

Die geometrische Summe QR dieser Strecken bezeichnet in bestimmter Lage das polare Moment des Systems: sie mufs Q als Ausgangs-Punkt behalten.

Für das polare Moment **ersten** Grades existiert **ein** merkwürdiger Punkt, welcher **Polar-Punkt ersten Grades** oder auch schlechthin **Polar-Punkt**[1]) genannt werden soll: Ein Punkt M auf QR, für welchen $QM . \sum_{i=1}^{n} m_i = QR = \sum_{i=1}^{i=n} m_i . QP_i$ ist, hat nämlich für jeden Punkt Q dieselbe Lage in Bezug auf das gegebene Punkt-System.

*Die Lage des Punktes M, welcher bei gewissen Punkt-Systemen „**Schwer-Punkt**" heifst, hängt nur von den Wert-Koëfficienten und der gegenseitigen Lage der gegebenen Punkte ab.*

Man beweist dies durch folgende Überlegung: Für einen andern Punkt Q' hätte man $Q'M' . \Sigma m_i = Q'R' = \Sigma m_i . Q'P_i$, während aufserdem bei geometrischer Addition $Q'P_i = Q'Q + QP_i$ ist. Daraus folgt

$$Q'M' . \Sigma m_i = \Sigma m_i (Q'Q + QP_i) = Q'Q . \Sigma m_i + \Sigma m_i . QP_i = Q'Q . \Sigma m_i + QM . \Sigma m_i, \text{ d. h. } Q'M' = Q'Q + QM.$$

Es fallen also M und M' auf einander.

Wenn man nun dem Punkte M den Koëfficienten $\sum_{i=1}^{n} m_i$ giebt, so ist das **Moment von M** dem Momente des Punkt-Systems gleich, d. h.:

Giebt man dem Polar-Punkte ersten Grades (M) die Summe

1) Da hier nur Polar-Punkte ersten Grades in Frage kommen werden.

der Koëfficienten aller Punkte des Systems als Koëfficienten, so ist für **jeden** Punkt das polare Moment ersten Grades des Systems durch das polare Moment ersten Grades von M ersetzbar.

Für polare Momente höherer Grade gelten ähnliche Sätze, bei denen übrigens der Polar-Punkt ersten Grades stets eine grofse Rolle spielt.

Hier soll noch das polare Moment **zweiten Grades** betrachtet werden: es ist $\Sigma m_i . \overline{QP}^2_i$ zu bilden.

Führt man den Punkt M ein, so hat man in jedem Dreiecke MQP_i gegeben:

$$\overline{QP}^2_i = \overline{MQ}^2 + \overline{MP}^2_i - 2\,\overline{MQ}\,.\,\overline{MP}_i\,.\cos QMP_i.$$

Setzt man $MQ = R$, so folgt für alle Dreiecke:

$$\Sigma m_i . \overline{QP}^2_i = R^2 . \Sigma m_i + \Sigma m_i . \overline{MP}^2_i - 2\,R\,\Sigma m_i . MP_i . \cos QPM_i.$$

Das letzte Glied verschwindet, weil jeder Summand die Projektion einer Strecke auf MQ darstellt und alle diese Strecken zusammen zu einem Polygon gestaltet werden können, das sich in M schliefst, dessen Summe also Null ist. Danach hat man:

$$\Sigma m_i . \overline{QP}^2_i = \Sigma m_i . \overline{MP}^2_i + R^2 . \Sigma m_i.$$

Das polare Moment **zweiten Grades** eines Punkt-Systems für einen Punkt Q ist gleich dem (ein für alle Mal festzustellenden) polaren Momente **zweiten** Grades des Systems für den Punkt M, vermehrt um das polare Moment **zweiten** Grades des (mit den Koëfficienten Σm_i behafteten) Punktes M für den Punkt Q.

Das Minimum des Momentes tritt für den Punkt M ein. Für alle Punkte einer Kugel-Oberfläche (R) hat das Moment denselben Wert.

Wenn man die Momentbildung nicht für einen Punkt Q, sondern für Punkte einer Kurve eintreten läfst, so gelangt man zur zweiten Klasse der Momente, aus der nur die Momente für grade Linien, die **linealen Momente,** ausgewählt werden sollen.

Der Abstand je zweier Punkte P_i und Q_i wird hier bestimmt als Abstand des Punktes P_i von einer Graden, welche man **Achse** nennt.

Das **lineale Moment ersten Grades** hat die Form $\sum_{i=1}^{n} m_i . d_i$, falls man den Abstand des Punktes P_i von der Achse durch d_i bezeichnet.

Von hoher Bedeutung ist das **lineale Moment zweiten Grades,** welches nach dem Vorgange Eulers **Trägheits-Moment** genannt wird. Es hat die Form $\sum_{i=1}^{n} m_i . d^2_i$.

Wenn dasselbe für eine Achse den Wert $\Sigma m_i . d^2_i$ hat, so hat es für eine Parallel-Achse (d'_i) in der Entfernung σ den Wert:

$$\Sigma m_i . d'^2_i = \Sigma m_i . d^2_i + \sigma^2 \Sigma m_i - 2\,\sigma\,\Sigma m_i d_i \cos(\sigma, d_i).$$

Dieser Ausdruck erhält seinen einfachsten Wert, wenn man von einer Achse ausgeht, welche durch den Polar-Punkt geht, weil dann wieder der letzte Summand verschwindet Nennt man das Trägheits-Moment für eine Achse (α, β, γ) durch diesen Punkt

$T_{\alpha, \beta, \gamma}$, so gilt für jede Parallel-Achse im Abstande σ die Beziehung:

$$T'_{\alpha, \beta, \gamma} = T_{\alpha, \beta, \gamma} + \sigma^2 . \Sigma m_i.$$

Macht man nun einen Punkt einer solchen Achse zum Anfangs-Punkt eines rechtwinkligen Kreuzes, so kann man unter besonderen Umständen jedes Trägheits-Moment $T'_{\alpha, \beta, \gamma}$ auf die Trägheits-Momente für drei bestimmte Koordinaten-Achsen zurückführen.

Wenn hier der Punkt P_i die Koordinaten x_i, y_i, z_i hat, so ist:

$$P_i Q_i = d'_i = O P_i . \sin(O P_i, O Q_i).$$

Bezeichnet man die Richtung von $O P_i$ gegen die Achsen durch $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, so ist:

$$\cos(O P_i, O Q_i) = \cos\alpha . \cos\alpha_i + \cos\beta . \cos\beta_i + \cos\gamma . \cos\gamma_i = \frac{x_i . \cos\alpha + y_i . \cos\beta + z_i . \cos\gamma.}{\sqrt{x^2_i + y^2_i + z^2_i}.}$$

Daraus folgt $\sin^2(O P_i, O Q_i) = 1 - \cos^2(O P_i, O Q_i) =$

$$\frac{x^2_i(1-\cos^2\alpha)+y^2_i(1-\cos^2\beta)+z^2_i(1-\cos^2\gamma)-2x_iy_i\cos\alpha.\cos\beta+\ldots.}{x^2_i + y^2_i + z^2_i.}$$

Ersetzt man nun $1 - \cos^2\alpha$ durch $\cos^2\beta + \cos^2\gamma$, $1 - \cos^2\beta$ durch $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$, $1 - \cos^2\gamma$ durch $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$, so findet man bei leicht verständlicher (δ) Abkürzung $\overline{P_i Q_i}^2 = d'^2_i = \cos^2\alpha\,(y^2_i + z^2_i) + \cos^2\beta\,(z^2_i + x^2_i) + \cos^2\gamma\,(x^2_i + y^2_i) - 2\,\delta.$

Man hat nun:

$T'_{\alpha, \beta, \gamma} = \Sigma m_i . d'^2_i = \cos^2\alpha . T'_x + \cos^2\beta . T'_y + \cos^2\gamma . T'_z - 2\triangle$, falls man die Trägheits-Momente für die drei Achsen mit T'_x, T'_y und T'_z bezeichnet.

Die Bestandteile von $\triangle$, d. h. die Gröfsen

$$D_z = \Sigma m_i . x_i . y_i,\ D_y = \Sigma m_i . x_i . z_i,\ D_x = \Sigma m_i . y_i . z_i,$$

welche eigentümliche Momente zweiten Grades sind, kann man mit Rankine **Deviations-Momente** nennen.

Es giebt im Punkte O **ein und nur ein Koordinaten-Kreuz,** für welches die **Deviations-Momente „Null“** sind, es mag das System der drei **Haupt-Achsen** für den Punkt O heifsen.

Für die Haupt-Achsen erhält man:

$$T'_{\alpha, \beta, \gamma} = \cos^2\alpha . T'_x + \cos^2\beta . T'_y + \cos^2\gamma . T'_z.$$

Wählt man im besonderen die Haupt-Achsen des Polar-Punktes ersten Grades, so ist:

$$T_{\alpha, \beta, \gamma} = \cos^2\alpha . T_x + \cos^2\beta . T_y + \cos^2\gamma . T_z.$$

Wenn man also die Trägheits-Momente für die Haupt-Achsen des ausgezeichneten Punktes M, d. h. die Gröfse T_x, T_y, T_z, kennt, so giebt die Formel

$$T'_{\alpha, \beta, \gamma} = \sigma^2 . \Sigma m_i + \cos^2\alpha . T_x + \cos^2\beta . T_y + \cos^2\gamma\, T_z$$

das Trägheits-Moment für jede Achse (α, β, γ) an, welche in der Entfernung σ parallel zu der durch M gehenden Achse (α, β, γ) gezogen werden kann.

Den Beweis für die Existenz der Haupt-Achsen liefert man so:

Man lege durch O ein Strahlenbündel und trage auf jedem

Strahle (α, β, γ) *eine Länge* OE *ab, deren Mafs-Zahl der Quadrat-Wurzel des Trägheits-Momentes für den betreffenden Strahl umgekehrt proportional ist. Es entsteht auf diese Weise eine zweifach unendliche Schar von Punkten* E, *welche eine bestimmte Fläche ausfüllen.*

Bezeichnet man die Koordinaten von E *mit* ξ, η, ζ, *so ist*

$$OE = \rho = \frac{\xi}{\cos\alpha} = \frac{\eta}{\cos\beta} = \frac{\zeta}{\cos\gamma} = \frac{\text{constans}}{\sqrt{T'_{\alpha,\beta,\gamma}}}.$$

Man hat $T_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\text{constans}}{\rho^2}$ *und gewinnt daher aus dem Ausdruck von* $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ *für die Lagen von* E *die Bedingung: constans =*

$$\xi^2 . T_x + \eta^2 . T_y + \zeta^2 . T_z - 2\xi\eta . D_z - 2\zeta\xi . D_y - 2\eta\zeta . D_x.$$

Von einer solchen diophantischen Gleichung in ξ, η, ζ *weifs man aber, dafs dieselbe stets auf die Form* $\mathfrak{x}^2 . T_\mathfrak{x} + \mathfrak{y}^2 . T_\mathfrak{y} + \mathfrak{z}^2 . T_\mathfrak{z} =$ *constans gebracht werden kann und daraus ergiebt sich eine bestimmte Achsenlage, für welche* D_x, D_y, D_z *verschwinden.*

Setzt man nämlich

$$\xi = p_1 \mathfrak{x} + q_1 \mathfrak{y} + r_1 \mathfrak{z}, \quad \eta = p_2 \mathfrak{x} + q_2 \mathfrak{y} + r_2 \mathfrak{z},$$
$$\zeta = p_3 \mathfrak{x} + q_3 \mathfrak{y} + r_3 \mathfrak{z},$$

so kann man die Gröfsen p_i, q_i, r_i *so bestimmen, dafs die Gleichung in* ξ, η, ζ *zu einer Gleichung in* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ *von der gewünschten Form wird.*

Man hat in leicht verständlicher (A, B, C) *Abkürzung:*

$$\mathfrak{x}^2 (p^2_1\, T_x + p^2_2\, T_y + p^2_3\, T_z) + \mathfrak{y}^2 (q^2_1\, T_x + q^2_2\, T_y + q^2_3\, T_z) + \mathfrak{z}^2 (r^2_1\, T_x + r^2_2\, T\ + r^2_3\, T_z) + 2\mathfrak{x}\mathfrak{y} . A + 2\mathfrak{x}\mathfrak{z} . B + 2\mathfrak{y}\mathfrak{z} . C = \text{constans}.$$

Dabei sind die Gröfsen p_i, q_i, r_i *so zu bestimmen, dafs die Gleichungen* $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ *erfüllt werden, eine Forderung, welcher sich stets auf mannigfache Weise genügen läfst.*

Wenn man also die Punkte E *der konstruierten Oberfläche durch die Koordinaten* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ *ausdrückt, d. h. wenn man ein Kreuz* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *für deren Darstellung verwendet, so gelangt man zu jener einfacheren Form der diophantischen Gleichung.*

Hätte man von vornherein im Punkte O *ein Koordinaten-Kreuz* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *benutzt, so würde man zu einer Bedingungs-Gleichung*

$$\mathfrak{x}^2 . T_\mathfrak{x} + \mathfrak{y}^2 . T_\mathfrak{y} + \mathfrak{z}^2 . T_\mathfrak{z} - 2\mathfrak{x}\mathfrak{y} . \mathfrak{D}_\mathfrak{z} - 2\mathfrak{x}\mathfrak{z} . \mathfrak{D}_\mathfrak{y} - 2\mathfrak{y}\mathfrak{z} . \mathfrak{D}_\mathfrak{x} = \text{constans}.$$

gekommen sein und hier müfste[1]

$$\left.\begin{aligned} p^2_1\, T_x + p^2_2\, T_y + p^2_3\, T_z &= T_\mathfrak{x} \\ q^2_1\, T_x + q^2_2\, T_y + q^2_3\, T_z &= T_\mathfrak{y} \\ r^2_1\, T_x + r^2_2\, T_y + r^2_3\, T_z &= T_\mathfrak{z} \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D}_\mathfrak{z} &= 0 \\ \mathfrak{D}_\mathfrak{y} &= 0 \\ \mathfrak{D}_\mathfrak{x} &= 0 \end{aligned}\right.$$

sein.

---

1) Das erste Formel-Tripel stellt die Gröfsen p_i, q_i, r_i als Cosinus der Winkel zwischen den alten und neuen Achsen dar.

Die Bedingung, dafs die Koordinaten-Ebenen von (𝔵, 𝔶, 𝔷) einander normal schneiden, führt dazu mit Hülfe dieser Gleichungen ***ein*** *und nur* ***ein*** *Haupt-Achsen-Kreuz auszuscheiden.*

Das unterbestimmte Gleichungs-System für E ist hier eine Gleichung zweiten Grades: sie bezeichnet eine Fläche, welche bei positiven Werten von T_x, T_y, T_z ein Ellipsoid darstellt und dann das Cauchy-Poinsot'*sche Ellipsoid oder auch das Trägheits-Ellipsoid genannt wird*[1]).

Für die **linealen Momente höherer Grade** existieren interessante Sätze, auf welche hier nicht eingegangen werden soll.

Was nun die **planaren Momente** anlangt, so hängt die Theorie derselben eng zusammen mit den **polaren** Momenten **ersten** und den **linealen** Momenten **zweiten** Grades.

Bildet man hier für eine Ebene, welche als eine der Koordinaten-Ebenen z. B. als YOZ eingeführt werden kann, das Moment ersten Grades, so gelangt man zu der Form $\Sigma m_i \,.\, x_i$.

Bildet man für ein Koordinaten-Kreuz die drei Momente und setzt $x \,.\, \Sigma m_i = \Sigma m_i \,.\, x_i$, $y \,.\, \Sigma m_i = \Sigma m_i \,.\, y_i$ und $z \,.\, \Sigma m_i = \Sigma m_i \,.\, z_i$, so wird dadurch ein bestimmter Punkt (x, y, z) gegeben, welcher der **Polar-Punkt ersten Grades** ist.

Legt man demnach das Kreuz durch den Polar-Punkt selbst, so mufs $\Sigma m_i \,.\, x_i = \Sigma m_i \,.\, y_i = \Sigma m_i \,.\, z_i = 0$ sein.

Bezeichnet man die Koordinaten von M mit x', y', z', so wird für irgend einen Punkt Q, dessen Koordinaten ξ, η, ζ sein mögen, der Polar-Punkt ersten Grades gefunden, indem man $\Sigma m_i \,.\, Q P_i = Q R$ bildet und auf $Q R$ die Strecke $Q M \,.\, \Sigma m_i = Q R$ bestimmt. Die Projektionen der einzelnen Seiten des Summations-Polygons sind für die Achse $O X$ von der Form $m_i (x_i - \xi)$, während sich die Projektion des ganzen Polygons beziehungsweise seiner Schlufslinie $Q R = Q M \,.\, \Sigma m_i$ für dieselbe Achse als $(x' - \xi)\, \Sigma m_i$ darstellt, so dafs man hat:

$$\Sigma m_i (x_i - \xi) = (x' - \xi)\, \Sigma m_i, \text{ d. h. } \Sigma m_i \,.\, x_i = x' \Sigma m_i.$$

Ebenso ist $\Sigma m_i \,.\, y_i = y' \,.\, \Sigma m_i$ und $\Sigma m_i \,.\, z_i = z' \,.\, \Sigma m_i$.

Man hat also den Satz: Das **planare Moment ersten Grades** ist für jede durch den **Polar-Punkt** gelegte Ebene **Null** und für jede andere Ebene gleich dem bezüglichen Momente des Polar-Punktes in Bezug auf die Ebene.

Eine solche Ebene, für welche sich das Moment annuliert, heifst ***Schwer-Ebene****, falls der Polar-Punkt ersten Grades als* ***Schwer-Punkt*** *bezeichnet werden darf. Zwei Schwer-Ebenen schneiden sich in einer* ***Schwer-Linie****, d. h. in einer Graden, welche den Schwer-Punkt enthält.*

Das **planare Moment zweiten Grades** läfst sich für jede

---

1) Dasselbe wurde von Cauchy, Exercises de Mathématiques, tom. II, p. 93, 1827 eingeführt und von Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps, 1834, in hervorragender Weise verwendet. Über die Trägheits-Linien gewisser Oberflächen etc. vergl. W. 3.

Ebene aus den bezüglichen Momenten für die Ebenen eines rechtwinkligen Kreuzes und aus den Deviations-Momenten für die entsprechenden Achsen herleiten.

Wenn die Normale der Ebene die Richtung (α, β, γ) hat, so ist der Abstand eines Punktes P_i von der Ebene in einem Koordinaten-System, dessen Anfangs-Punkt in der gegebenen Ebene gelegen ist: $P_i Q_i = x_i \,.\, \cos\alpha + y_i \,.\, \cos\beta + z_i \,.\, \cos\gamma$.

Die Normale $P_i Q_i$ hat als Seite des Dreiecks $P_i O Q_i$ den Wert [1])

$$O P_i \,.\, \cos(O P_i, P_i Q_i) = O P_i \,.\, \frac{x_i \,.\, \cos\alpha + y_i \,.\, \cos\beta + z_i \,.\, \cos\gamma}{\sqrt{x^2_i + y^2_i + z^2_i}}$$
$$= x_i \,.\, \cos\alpha + y_i \,.\, \cos\beta + z_i \,.\, \cos\gamma.$$

Demnach ist $\Sigma m_i \,.\, \overline{P_i Q}^2_i =$
$$\cos^2\alpha \, \Sigma m_i \,.\, x^2_i + \cos^2\beta \, \Sigma m_i \,.\, y^2_i + \cos^2\gamma \, \Sigma m_i \,.\, z^2_i + 2 \triangle.$$

Bezeichnet man die planaren Momente zweiten Grades mit P_x, P_y, P_z, so hat man:
$$P_x + P_y + P_z = \Sigma m_i (x^2_i + y^2_i + z^2_i), \text{ d. h.}$$
die **Summe der planaren Momente zweiten Grades** für das Ebenen-Tripel eines rechtwinkligen Kreuzes ist gleich dem polaren Moment zweiten Grades für den Anfangspunkt und hat infolge dessen für **jedes** Ebenen-Tripel mit **demselben** Anfangspunkt **denselben** Wert.

Man hat ferner:
$$2 (P_x + P_y + P_z) = 2 \Sigma m_i (x^2_i + y^2_i + z^2_i) = T_x + T_y + T_z.$$

Die **Summe der Trägheits-Momente** für das Achsen-Tripel eines rechtwinkligen Kreuzes ist gleich dem doppelten polaren Momente zweiten Grades für den Anfangspunkt und hat infolge dessen für **jedes** Achsen-Tripel mit **demselben** Anfangspunkt **denselben** Wert.

Endlich ist:
$$P_x + P_y = T_z,$$
d. h. das Trägheits-Moment für eine Achse ist gleich der Summe der planaren Momente zweiten Grades für zwei in der Achse normal zu einander konstruierte Ebenen.

Auch hier mag auf die Besprechung der **Momente höheren Grades** verzichtet werden.

Alle diese Betrachtungen gelten zunächst für **Punkt-Aggregate** beziehungsweise für **heterogene Punkt-Kontinua**, in denen nur **einzelne** Punkte **nicht** den Koëfficienten **„Null“** haben.

Läſst man nun die Anzahl der Punkte im Aggregate mehr und mehr wachsen, oder läſst man, was dasselbe ist, im heterogenen Punkt-Kontinuum mehr und mehr Koëfficienten von Null verschieden werden, so gelten zunächst dieselben Schlüsse.

Wenn die Strecken (r_i), welche in den Momenten als Ab-

---

1) Die folgende Formel begründet man ebenso wie die entsprechende auf Seite 118: die Diagonale OP_i des Achsenparallelepipeds durch P_i bildet mit den Achsen Winkel, deren Kosinus beziehungsweise $\frac{x_i}{OP_i}$, $\frac{y_i}{OP_i}$, $\frac{z_i}{OP_i}$ sind.

stände vorkamen, alle endlich bleiben, so erreicht eine unter ihnen (beziehungsweise mehrere) ein bestimmtes Maximum, welches ρ_i heifsen mag. Es ist also hier $\Sigma m_i . r_i < \Sigma m_i . \rho_i < \rho_i . \Sigma m_i$, d. h. $\Sigma m_i . r_i$ bleibt endlich, solange Σm_i endlich bleibt.

Wenn bei Beschränkung auf endliche Abstände ein Moment für unendlich viele Punkte noch Bedeutung haben soll, so mufs Σm_i endlich bleiben.

Wenn die Glieder der Reihe der r_i und wenn aufserdem Σm_i endlich bleibt, so ist $\Sigma m_i . r_i$, da es $< \rho_i . \Sigma m_i$ bleibt, eine endliche Gröfse.

Ob in anderen Fällen der Ausdruck $\Sigma m_i . r_i$ noch eine Bedeutung behält, das läfst sich nicht allgemein bestimmen.

Die gegebene Betrachtung gestattet die Momente der Punkt-Kontinua neben den Momenten der Punkt-Aggregate einzuführen.

Entsprechende Rechnungen werden oft nur mit Hülfe des Infinitesimal-Kalküls (Differential- und Integral-Rechnung) möglich sein, da es sich hier zumeist um Betrachtungen des Unendlich-Kleinen handelt.

Wenn man stetige Systeme durch Grenz-Übergänge aus unstetigen Systemen herleitet, so mufs man an der Vorstellung festhalten, dafs **gleiche** Raumteile eines Kontinuums Aggregaten von **gleicher** Punkt-Zahl entsprechen.

Im besonderen müssen für ***gleiche*** *Strecken Reihen von* ***gleicher*** *Punkt-Zahl als erzeugende Aggregate eingeführt werden, so dafs man die* ***Länge*** *einer Strecke der* ***Summe*** *der hier zusammentretenden Punkte* ***proportional*** *setzen darf.*

Ebenso entsprechen ***gleichen*** *Flächen-Räumen Netze von* ***gleicher*** *Punkt-Zahl als erzeugende Aggregate, so dafs man den Inhalt einer Fläche der* ***Summe*** *der hier zusammentretenden Punkte* ***proportional*** *setzen darf.*

Analoges gilt für die dreifach ausgedehnten Kontinua.

In allen Fällen hat man zu beachten, dafs die stetigen Systeme erst durch den Grenz-Übergang entstehen.

Diese Vorstellung begründet im Gebiete der homogenen Kontinua ohne weiteres das sogenannte Cavalleri'sche Princip, welches folgendermafsen lautet:

Zwei Körper haben **gleiche** Volumina, wenn in ihnen durch jedes Element eines Parallel-Ebenen-Büschels Querschnitte von **gleichem** Inhalte erzeugt werden.

Bekanntlich [1] *liefert man durch jenes Princip eine äufserst einfache und vollständig elementare Herleitung des Inhaltes einer Voll-Kugel, eines Kugel-Segments, einer Kugel-Zone etc.*

Im Gegensatz zu **allen** hier betrachteten Momenten spricht man in der Theorie der Strecken-Systeme von Momenten einer

1) Vergl. z. B. Mehler-Schellbach, Hauptsätze der Elementar-Mathematik, S. 148.

homogenen Strecke in Bezug auf einen Punkt oder in Bezug auf eine Achse.

Wenn hier die homogene Strecke als Punkt-Kontinuum angesehen wird, so sind diese Momente bereits definiert, da es sich dann in jedem Falle nur um das Moment eines speciellen Punkt-Systemes handelt. Diese Auffassung hat unter Umständen ihre Berechtigung und für solche Fälle mögen auch die eben gebrauchten Namen, welche in das Gefüge der sonst gegebenen Nomenklatur wohl hineinpassen, ihre Stelle behalten.

Diese Momente von Strecken sollen **Drehungs-Momente** genannt werden, weil dieselben stets auf **Strecken-Paare** hinweisen, denen man ja einen **Drehungs-Sinn** beilegen durfte.

Unter dem **Drehungs-Moment** einer Strecke in Bezug auf einen **Punkt** soll das Produkt aus der Strecke und dem Normal-Abstande des Punktes von derselben verstanden werden. Die Richtung der Strecke giebt diesem Momente einen bestimmten Drehungs Sinn.

Diese Momente sind Strecken-Paare, für welche der Dreh-Punkt fixiert ist, d. h. sie sind Strecken-Paare mit einer Special-Bedingung. Für ihre Vereinigung und Zerlegung in demselben Punkte O gilt demnach innerhalb eines Strecken-Systems im besonderen, was im allgemeinen über Strecken Paare gesagt wurde.

Bei der Reduktion eines Strecken-Systems für einen bestimmten Punkt O ist das für O resultierende Achsen-Moment gleich der Summe der Drehungs-Momente aller Strecken in Bezug auf O.

Unter dem **Drehungs-Moment** einer Strecke in Bezug auf eine **Grade** (Achse) versteht man das Produkt aus dem kürzesten Abstand von Strecke und Achse und aus der Projektion der Strecke auf eine zur Achse normal gelegene Ebene.

Zerlegt man eine Strecke l in einem Koordinaten-System parallel und senkrecht zur Z-Achse, so bestimmt die Ebene der Zerlegung zugleich den kürzesten Abstand der Strecke von der Z-Achse.

Die Komponente, welche normal zur Z-Achse gelegen ist, bildet den einen, der Abstand dieser Komponente von der Z-Achse bildet den andern Faktor des gesuchten Drehungs-Momentes, welches sich somit als Strecken-Paar darstellt.

Gehört die Strecke einem Systeme an, für welches die mechanische Gleichheit gilt, so ist eine Zerlegung möglich, welche dem Momente eine geeignete Darstellung zu geben gestattet.

Bezeichnet man die Komponenten der gegebenen Strecken (l) nach den drei Achsen mit l_x, l_y, l_z, so stellen l_x und l_y in ihrer Vereinigung die Komponente dar, welche normal zur Z-Achse ist. Fügt man in O auf den Achsen OX und OY die Strecken $-l_x$ und $-l_y$ hinzu, so bilden die beiden Paare (l_x, $-l_x$) und (l_y, $-l_y$) in ihrer Vereinigung das gesuchte Drehungs-Moment.

Für dieses findet man also den Wert $x \, . \, l_y - y \, . \, l_x$, falls man die Koordinaten des Zerlegungs-Punktes von l mit x, y, z bezeichnet.

Dieser Zerlegungs-Punkt darf auf der Strecke l willkürlich angenommen werden, während natürlich der Wert des Momentes von dieser Wahl unabhängig sein mufs. Für einen Punkt x', y', z' gelangt man zu $x' \, . \, l_y - y' \, . \, l_x$ und es mufs daher $x \, . \, l_y - y \, . \, l_x = x' \, . \, l_y - y' \, . \, l_x$ oder $l_y \, (x - x') = l_x \, (y - y')$ d. h. $\frac{x - x'}{y - y'} = \frac{l_x}{l_y}$ sein; man bemerkt leicht, dafs diese Relation stets erfüllt ist.

Zerlegt man den Abstand der Strecke von der Z-Achse in die beiden Komponenten ξ und η, so entsprechen diese einem solchen x' und y', d. h. man hat im besonderen $\xi \, . \, l_y - \eta \, . \, l_x$ als Wert des Drehungs-Momentes gegeben.

Für ein Strecken-System läfst sich bei der Reduktion für O die Z-Komponente des Achsen-Momentes als Summe der Drehungs-Momente in Bezug auf die Z-Achse auffassen.

Zum Schlusse ist noch von dem **Momente** einer **Strecke** in Bezug auf eine **Ebene** zu sprechen.

Dieses Moment steht zwischen der ersten und zweiten Klasse von Momenten, insofern zwar einerseits ein bestimmter **Punkt** der Strecke für die Abstands-Bestimmung mafsgebend ist und insofern doch andrerseits die **Länge** der Strecke als zweiter Faktor eingeführt werden mufs.

Man kann dieses Moment zur ersten Klasse rechnen, indem man für die dort gebräuchlichen ***Punkt-Koëfficienten*** *die Mafs-Zahlen von* ***Längen*** *eingeführt denkt, man kann dieses Moment zur zweiten Klasse rechnen, indem man den Abstand der* ***Strecke*** *durch die Entfernung eines ihrer* ***Punkte*** *zu ersetzen gestattet.*

Unter dem **Momente** einer **Strecke** in Bezug auf eine **Ebene** versteht man das Produkt aus der **Länge** der Strecke in den **Abstand** eines ihrer **Punkte**.

Dabei ist die Strecke nach Länge und Lage völlig bestimmt zu denken, d. h. es gilt für zwei Strecken weder die arithmetische noch die geometrische noch endlich die mechanische Form der Gleichheit.

Dieses Moment bedarf zu seiner **Bestimmung** stets einer Angabe über den Punkt der Strecke, welcher gewählt werden soll: hier mag ein für alle Mal der **Anfangs-Punkt** der Strecke ausgezeichnet werden.

Für ein Parallel-Strecken-System gilt im Hinblick auf diese Momente folgender Satz:

In Bezug auf eine beliebige Ebene ist das Moment der Resultante gleich der algebraischen Summe der einzelnen Momente.

Dabei sind die ***Abstände*** *aller* ***Anfangs-Punkte*** *für die eine Seite der Ebene mit dem Zeichen + und für die andere Seite der Ebene mit dem Zeichen — in Rechnung zu bringen.*

Aufserdem sind die ***Längen*** *der einzelnen Strecken mit dem Zeichen + oder mit dem Zeichen — einzuführen, je nachdem sie die eine oder die andere von den beiden hier möglichen Richtungen haben.*

In Bezug auf diese Zeichen bedarf es einer ursprünglichen Festsetzung, welche übrigens auch für die Resultante bindend ist.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dafs die Resultante hier auch in Bezug auf ihren Anfangs-Punkt bestimmt zu denken ist, dagegen mufs betont werden, dafs es sich hier im allgemeinen nicht um ein Strecken-System handelt, welches überhaupt durch mechanische Addition reduciert werden könnte.

Um den Beweis des Satzes zu liefern, schliefst man von zwei Strecken auf je zwei und betrachtet zunächst zwei Strecken, deren Anfangs-Punkte auf derselben und dann zwei Strecken, deren Anfangs-Punkte auf entgegengesetzter Seite der Ebene gelegen sind.

Den letzteren Fall reduciert man auf den ersteren, indem man die Ebene parallel mit sich verschiebt, so dafs alle Abstände um dieselbe Länge (algebraisch) zunehmen. Innerhalb jedes der beiden Fälle ist zu unterscheiden, ob gleich gerichtete oder ob entgegengesetzt gerichtete Komponenten vorliegen.

§. 2. Der Schwer-Punkt.

Wenn die Koëfficienten eines Punkt-Systems alle von **gleichem** Zeichen sind, so erhält der **Polar-Punkt** ersten Grades, dem dabei ein für alle Mal der Koëfficient Σm_i zugeordnet werden mufs, den Namen **Schwer-Punkt.**

Wenn man einen physikalischen Körper als ein Punkt-Kontinuum auffafst, so darf man der Gröfse Σm_i die Bedeutung der Masse geben und in diesem Falle sind alle m_i positiv. Der Polar-Punkt ersten Grades ist dann der ***Punkt,*** *in welchem der* ***schwere*** *Körper unterstützt werden mufs, um* ***nicht*** *zu fallen.*

Es handelt sich bei dieser Festsetzung (Σm_i = Masse) nur um eine specielle Deutung gewisser allgemeiner Sätze.

Die ***Bestimmung des Schwer-Punktes*** *ist durchaus ein* ***geometrisches*** *Problem.*

Im besonderen ist der Polar-Punkt ersten Grades für **homogene** Systeme stets als **Schwer-Punkt** zu bezeichnen.

Die Lage des Polar-Punktes ersten Grades in Bezug auf ein Koordinaten-Kreuz bestimmt sich bei Punkt-Aggregaten (S. 120) durch die Formeln:

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y = \frac{\Sigma m_i . y_i}{\Sigma m_i}, \quad z = \frac{\Sigma m_i . z_i}{\Sigma m_i}.$$

Die Lage des **Schwer-Punktes** für ein **homogenes** System aus n Punkten ergiebt sich im besonderen als:

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n}, \quad y = \frac{\Sigma y_i}{n}, \quad z = \frac{\Sigma z_i}{n}.$$

Man hat $\Sigma m_i . x_i = m_i \Sigma x_i$ *und* $\Sigma m_i = n . m_i$.

Die Formeln müssen für Punkt-Kontinua umgestaltet werden, da es sich hier um unendlich viele Summanden handelt.

Die Umgestaltung geschieht im allgemeinen mit Hülfe des Infinitesimal-Kalküls (der Differential- und Integral-Rechnung), sie läfst sich aber im besonderen auch ohne die dort gegebene Art der Betrachtung durchführen.

Es giebt für Punkt-Aggregate eine Reihe von Sätzen über die Lage des Polar-Punktes ersten Grades, welche für den Schwer-Punkt natürlich im besonderen gelten.

1. Die **Projektion** des **Schwer-Punktes** eines Punkt-Systems ist zugleich der **Schwer-Punkt** der **Projektion** des Punkt-Systems.

Dabei ist wiederum vorausgesetzt, dafs die Projektion eines Punktes P_i *den Koëfficienten* m_i *des Punktes hat.*

Der Satz, welcher für rechtwinklige und schiefwinklige Projektionen gilt, wie unmittelbar zu ersehen ist, läfst eine Reihe von Folgerungen zu: Projiciert man z. B. eine Ebene als Grade und eine Grade als Punkt, so folgt nach obigem Satze, dafs jedes Gebilde in der Ebene, beziehungsweise in der Graden einen Schwer-Punkt hat, welcher innerhalb der Ebene, beziehungsweise innerhalb der Graden gelegen ist.

2. Der Schwer-Punkt eines Systems, das in mehrere Unter-Systeme zerfällt, ist zugleich der Schwer-Punkt der Schwer-Punkte dieser Unter-Systeme.

Über die Zuordnung der Koëfficienten kann kein Zweifel obwalten, da der Schwer-Punkt ein für alle Mal mit Σm_i *behaftet gedacht wird.*

Der Beweis des Satzes ergiebt sich unmittelbar durch Bildung der planaren Momente ersten Grades.

3. Jede Symmetrie-, im besonderen jede Diametral-Ebene eines Punkt-Systems ist für dasselbe Schwer-Ebene, jede Symmetrie-, im besonderen jede Diametral-Achse ist für dasselbe Schwer-Linie und ein Symmetrie- oder Diametral-Punkt ist für dasselbe Schwerpunkt.

Wenn sich alle Punkte des Systems in Paare von gleichen Koëfficienten zerlegen lassen, wie es z. B. bei homogenen Gebilden stets der Fall ist, so ***kann*** *Symmetrie eintreten.*

Wenn die Mittel-Punkte der Verbindungs-Graden aller Punkt-Paare von gleichen Koëfficienten in einer Ebene liegen, so wird dieselbe eine Symmetrie-Ebene genannt[1]. *Wenn dabei die Ver-*

---

1) **Gewöhnlich nennt man Symmetrie-Ebene, was hier Normal-Diametral-Ebene genannt wird, während man dennoch mit der hier gegebenen Definition**

bindungs-Graden alle einander parallel sind, so spricht man im besonderen von einer Diametral-Ebene, die auch einmal als Normal-Diametral-Ebene auftreten kann.

Wenn jene Mittelpunkte alle auf einer Graden liegen, so wird dieselbe eine. Symmetrie-Achse genannt.

Wenn dabei die Verbindungs-Graden innerhalb jeder, durch die Achse gelegten, Ebene einander parallel sind, so spricht man im besonderen von einer Diametral-Achse (Durchmesser), die gelegentlich auch einmal als Normal-Diamentral-Achse auftreten kann.

Wenn jene Mittelpunkte alle in einen Punkt zusammenfallen, so wird derselbe Symmetrie- oder Diametral-Punkt (Mittelpunkt) genannt.

Der Beweis der Sätze, welche diese Definitionen benutzen, ist äufserst einfach.

Im ersten Falle bildet man für die Symmetrie-Ebene, die man als YZ-Ebene eines Kreuzes einführen kann, die Summe $\Sigma m_i \,.\, x_i$, *welche sich annulliert.*

Im zweiten Falle legt man durch die Achse eine Ebene. Für alle Punkte innerhalb dieser ist eine zweite, senkrecht dazu durch die Achse gelegte Ebene, eine Symmetrie-Ebene. Wiederholt man diese Konstruktion, so stellt sich die Achse als Schnittlinie von Symmetrie-Ebenen dar und mufs also den Schwerpunkt enthalten. Liegt ein ebenes System vor, bei welchem die Konstruktion nicht wiederholt werden kann, so benutzt man den Satz von der Projektion des Schwerpunktes, um zu demselben Ergebnis zu gelangen.

Im dritten Falle schliefst man ähnlich wie im zweiten.

Diese Sätze gelten auch für Punkt-Kontinua, so lange in diesem Σm_i einen endlichen Wert hat.

Denkt man die Kontinua vermittelst eines Grenz-Überganges aus Aggregaten (durch Einschaltung von Zwischen-Punkten) entstanden, so mufs man, wie schon erwähnt wurde, an der Vorstellung festhalten, dafs gleiche Raumteile eines Kontinuums Aggregaten von gleicher Punkt-Zahl entsprechen.

Im besonderen hat man gleiche Raumteile eines homogenen Kontinuums aus homogenen Aggregaten von gleicher Punkt-Zahl entstanden zu denken.

Die erwähnten (drei) Sätze gestatten des öfteren ohne weiteres den Schwerpunkt für ein Kontinuum zu bestimmen, während man dazu im allgemeinen einen Grenz-Übergang durchführen mufs.

Als Beispiel für einen solchen Grenz-Übergang soll folgende Aufgabe behandelt werden: Es ist der Schwerpunkt einer heterogenen Strecke AB zu bestimmen, in welcher jeder Punkt einen

---

der Symmetrie-Achse in Übereinstimmung ist. Dieser Inkonsequenz sollte hier entgangen werden.

Koëfficienten hat, der seinem Abstande von dem einen Endpunkte A der Strecke proportional (k) ist.

Teilt man die Strecke AB, deren Länge l heifsen mag, durch die Punkte P_1, P_2 ... P_{n-1} in n Teile von gleicher Länge $\frac{l}{n}$, so gelangt man zu dem Aggregate A, P_1, P_2 ... P_{n-2}, P_{n-1}, B.

Setzt man $AP_i = x_i$, wobei B als P_n aufzufassen ist, so findet man für dieses Aggregat den Abstand (AS) des Schwerpunktes S durch die Formel

$$\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = AS.$$

Man hat $m_i = k . x_i$ und $x_i = i . \frac{l}{n}$, so dafs $m_i = i . \frac{kl}{n}$ und $m_i x_i = i^2 . k \left(\frac{l}{n}\right)^2$ resultiert.

Demnach ist:

$$AS = \frac{1+4+9+..n^2}{1+2+3+..n} . \frac{l}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3n(n+1)} . \frac{l}{n} = \frac{2}{3} l \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Setzt man nun der Reihe nach n = 2m, 4m, 8m ...., so schaltet man immer zwischen je zwei Punkten einer Teilung je einen Punkt ein und gelangt so zu einer neuen Teilung, für welche dasselke gilt etc.

An der Grenze, d. h. für $n = \infty$ findet man

$$AS = \frac{2}{3} l,$$

d. h. der Schwerpunkt der heterogenen Strecke AB ist von A um $\frac{2}{3}$ der Länge AB entfernt:

Wenn die Koëfficienten der Punkte von AB nicht den Abständen, sondern deren Quadraten proportional sind, so hat man zunächst:

$$AS = \frac{1+8+27+..n^3}{1+4+9+..n} . \frac{l}{n} = \frac{3}{2} l . \frac{n+1}{2n+1} = \frac{3}{4} l \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)$$

An der Grenze, d. h. für $n = \infty$ findet man

$$AS = \frac{3}{4} l.$$

Wendet man dieselbe Betrachtung[1] *auf eine homogene Grade an, so findet man $AS = \frac{1}{2} l$.*

Die Mittelpunkte einer homogenen **Strecke**, einer homogenen **Kreislinie**, einer homogenen **Kreisfläche**, einer homogenen **Kugel-**

1) Vergl. hiezu Phoronomie des Punktes, A, §. 2.

oberfläche, eines homogenen **Kugelvolumens** etc. sind zugleich Symmetrie-Punkte und demnach die Schwerpunkte dieser Gebilde.

Wenn man durch den Diagonal-Punkt eines homogenen **Parallelogramms** Parallelen zu den Seiten zieht, so sind diese sowohl für die Begrenzung als auch für die Fläche Symmetrie-Achsen, d. h. der Diagonal-Punkt ist in beiden Fällen Schwerpunkt.

Analoges gilt für das homogene **Parallelepiped**.

Die Bestimmungen der Schwerpunkte des homogenen Dreiecks-Umfanges und der homogenen Dreiecks-Fläche erfordern gesonderte Betrachtungen.

Die Mittellinien des **Dreiecks** sind für die **Fläche** desselben Symmetrie-Achsen, so dafs also der Schnittpunkt derselben zugleich der Schwerpunkt der Fläche wird.

Eine ähnliche Überlegung ist für den **Umfang** des **Dreiecks nicht** statthaft.

Es könnte zunächst scheinen, dafs eine Mittellinie auch für den Umfang Symmetrie-Achse ist, weil jede Parallele zur zugehörigen Seite von der Mittellinie in einem Punkte geschnitten wird, der von ihren Schnittpunkten mit den beiden andern Seiten gleiche Abstände hat. Dagegen ist zu bemerken, dafs bei dieser Auffassung gleichen Strecken auf jenen beiden Seiten nicht gleiche Mengen von Punkten in Bezug auf den Grenz-Übergang aus dem Aggregate entsprechen würden, dafs also die drei Seiten des Dreiecks hier nicht als Stücke einer und derselben homogenen Graden aufgefafst werden dürften.

Beim gleichschenkligen Dreieck ist dagegen die Mittellinie aus der Spitze auch für den Umfang Symmetrie-Achse, weil hier je zwei Parallelen zur Basis auf den Schenkeln gleiche Stücke abschneiden.

Das gleichseitige Dreieck bietet im besondern drei solche Symmetrie-Achsen dar.

Dafs man für die Dreiecksfläche in den Mittellinien unter allen Umständen Symmetrie-Achsen gegeben hat, läfst sich streng begründen, indem man die Fläche durch Parallelen zu einer Seite in n Streifen zerlegt und statt jedes Streifens ein Parallelogramm in Rechnung bringt, dessen Grundlinie mit der einen Seite des Streifens nach Gröfse und Lage übereinstimmt, während seine Seiten der Mittellinie des Dreiecks parallel sind; der Fehler bei dieser Substitution wird um so kleiner, je gröfser n angenommen wird.

Um den Schwerpunkt des homogenen **Dreiecks-Umfanges** zu gewinnen, bedient man sich des zweiten der oben erwähnten Sätze, indem man zunächst für jede Seite den Schwerpunkt aufsucht und dann den Schwerpunkt dieser drei Punkte bestimmt.

Dafs die drei zunächst gesuchten Schwerpunkte die Mittelpunkte der drei Seiten sind, ist nach dem oben Bemerkten

klar und es fragt sich nur, welche Koëfficienten man denselben zu geben hat.

Aus der oben festgestellten Anschauung, der gemäfs gleiche Raumteile homogener Kontinua gleichen Mengen von Punkten der erzeugten Aggregate entsprechen müssen, folgt, dafs Σm_i *für eine Strecke ihrer Länge proportional ist.*

Man hat die Koëfficienten der drei Punkte, beziehungsweise den Längen der drei Seiten des Dreiecks (a, b, c) proportional (k) zu setzen, so dafs nur noch übrig bleibt den Schwerpunkt dreier Punkte von den Koëfficienten k . a, k . b, k . c zu bestimmen.

Nennt man diese Schwerpunkte der drei Seiten M_a, M_b, M_c, *so wird S gefunden als der Schwerpunkt von* S_a *und* M_a *oder* S_b *und* M_b *oder* S_c *und* M_c, *wobei* S_a *den Schwerpunkt von* M_b *und* M_c *etc. bezeichnet.*

Der Schwerpunkt S_a *von* M_b *und* M_c, *der den Koëfficienten* $k.b + k.c$ *hat, liegt auf der Verbindungslinie* $M_b M_c$ *und zwar ist*

$$\Sigma m_i . \overline{M_b S_a} = \Sigma m_i x_i, \text{ d. h. } (k.b + k.c)\, \overline{M_b S_a} = k.b.\overline{M_b M_b} + k.c.\overline{M_b M_c}$$

und

$$\Sigma m_i . \overline{M_c S_a} = -\Sigma m_i . x_i \text{ d. h. } (k.b + k.c)\, \overline{M_c S_a} = k.c.\overline{M_c M_c} + k.b.\overline{M_c . M_b}.$$

Man hat also: $\dfrac{\overline{M_b S_a}}{\overline{S_a M_c}} = \dfrac{c}{b}$.

Die Punkte S_a, S_b, S_c *sind also auf* $M_b M_c$, $M_c M_a$, $M_a M_b$ *gelegen und teilen diese Strecken, beziehungsweise in den Verhältnissen* $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$, *d. h. sie sind die Fufspunkte der Winkelhalbierungs-Linien des Dreiecks* $M_a\ M_b\ M_c$, *welches dem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.*

Der **Schwerpunkt** des homogenen **Dreiecks-Umfanges** ist der **Mittelpunkt des Kreises**, welcher dem zugehörigen **Median-Dreiecke** eingeschrieben werden kann.

Unter dem Median-Dreiecke eines Dreiecks hat man das Dreieck zu verstehen, welches durch die Fufspunkte seiner Medianen (Mittellinien) gebildet wird.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen **Kurve** zu bestimmen, denkt man derselben ein Polygon von n Seiten eingeschrieben, sucht die Rechnung für dieses durchzuführen, indem man die Momente ersten Grades für drei Ebenen bildet, und läfst schliefslich n mehr und mehr wachsen.

Hier liegt die Vorstellung zu Grunde, welche in der Elementar-Geometrie das erste Mal bei der Berechnung von π *vorzukommen pflegt: man sieht jede Kurve als ein Polygon aus unendlich vielen Seiten von unendlich kleiner Länge an. Diese Vorstellung wird später (Phoronomie) vielfach wiederkehren.*

Wenn die Kurve in einer Ebene liegt, so wählt man diese Ebene als Koordinaten-Ebene, z. B. als Ebene XOY.

Von den drei Gleichungen für die Lage des Schwerpunktes fällt hier $z = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}$ *aufser Rechnung.*

Als Beispiel soll die Bestimmung des Schwerpunktes eines homogenen **Kreisbogens** durchgeführt werden.

Die Achsen des Kreuzes, deren eine parallel (OX) *und deren andere senkrecht* (OY) *zur Sehne des Bogens in dessen Ebene angenommen werden mag, sollen sich im Centrum* (O) *des Kreises schneiden.*

Die Achse OY *ist Symmetrie-Achse.*

Es handelt sich nur darum, den Abstand des Schwerpunktes von der Achse OX *zu finden.*

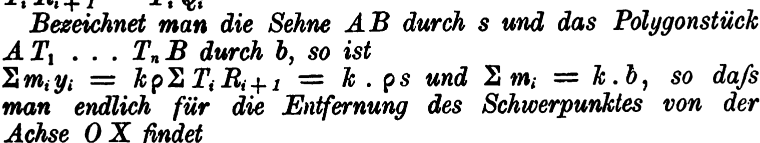
Denkt man den Kreisbogen AB *vom Radius* r *— derselbe mag zunächst kleiner als der Halb-Kreis sein — durch ein Sehnen-Polygon* $AT_1 T_2 .. T_n B$ *ersetzt, dessen* n *Seiten alle von gleicher Länge* l *sind, so hat man die Schwerpunkts-Bestimmung für die* n *Mittel-Punkte* $P_1, P_2 \dots P_n$ *der* n *Seiten durchzuführen, nachdem man jedem dieser Punkte einen Koëfficienten, proportional der Länge* l*, gegeben hat.*

Hier ist $\Sigma m_i y_i = k \Sigma l . P_i Q_i$ *zu berechnen, wobei* $OP_i = \rho$ *sein mag.*

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_i Q_i O$ *und* $T_i R_{i+1} T_{i+1}$ *folgt:*

$\frac{T_i T_{i+1}}{T_i R_{i+1}} = \frac{OP_i}{P_i Q_i}$, *d. h.* $l . P_i Q_i = \rho . T_i R_{i+1}$.

16.



Bezeichnet man die Sehne AB *durch* s *und das Polygonstück* $AT_1 \dots T_n B$ *durch* b*, so ist*
$\Sigma m_i y_i = k \rho \Sigma T_i R_{i+1} = k . \rho s$ *und* $\Sigma m_i = k . b$, *so dafs man endlich für die Entfernung des Schwerpunktes von der Achse* OX *findet*

$$y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} = \frac{\rho s}{b}.$$

Zieht man die (auf der Seite des Bogens gelegene) Parallele zu OX *vom Abstande* $y = \frac{\rho s}{b}$, *so gelangt man zu einer zweiten Schwer-Achse, welche in Verbindung mit der ersten* (OY) *den Schwerpunkt bestimmt.*

Dieses Resultat ändert sich nicht, wenn man n *mehr und mehr wachsen* $(r = \rho)$ *läfst, d. h. es gilt auch für den Bogen* AB.

Für den Halbkreis ist $s = 2r$ *und* $b = \pi r$, *so dafs hier im besonderen*

$$y = \frac{2r}{\pi}$$

resultiert, wofür man angenähert $y = \frac{7}{11} r$ *schreiben darf.*

Bezeichnet man den Centriwinkel des Bogens mit 2α *in Bogen-Maſs, so ist*

$$y = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Man erweitert die Betrachtung leicht für Bogen, welche das Maſs des Halbkreises überschreiten.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen **Fläche** zu bestimmen, muſs man im allgemeinen Betrachtungen anwenden, welche den für Linien durchgeführten analog sind.

Man kann des öfteren auch mit Erfolg ein Verfahren benutzen, welches die Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen auf die Bestimmung des Schwerpunktes von Linien zurückführt. Dieses Verfahren läſst sich leicht für beliebige Flächen darstellen, obwohl es hier nur für einfache zusammenhängende Ebenenstücke gegeben werden soll.

Zerlegt man ein solches Ebenenstück durch ein System von $n - 1$ *Parallel-Ebenen in* n *Parallel-Streifen, so läſst sich jeder derselben für ein bestimmtes* n *mit einer gewissen Annäherung als Parallelogramm oder als grades Parallel-Trapez auffassen, so daſs sein Schwerpunkt bestimmt werden kann.*

Diese Schwerpunkte bilden ein einfach ausgedehntes Aggregat, welches sich bei wachsendem n *mehr und mehr einem Kontinuum von einer Dimension, d. h. einer Linie nähert. Der Schwerpunkt dieser Linie ist nach einem oben erwähnten Satze zugleich der gesuchte Flächen-Schwerpunkt.*

Für eine beliebige Fläche, bei deren Zerlegung keine ebenen Figuren auftreten, wird diese Linie im allgemeinen nicht innerhalb der Fläche liegen.

Kann man zwei solche Linien auffinden, welche sich als Strecken darstellen, so liegt der Schwerpunkt in ihrem Schnitt-Punkte. Für diese Betrachtung bedarf man des öfteren der Kenntnis des Schwerpunktes eines ***Trapezes.***

Denkt man dasselbe zu einem Dreieck vervollständigt, so liefert die Mittel-Linie aus der ergänzten Ecke eine Schwer-Linie des Trapezes, während man eine zweite Schwer-Linie findet, indem man das Trapez durch eine Diagonale teilt und für jedes Teil-Dreieck den Schwerpunkt bestimmt. Konstruktion?

Man sucht ganz allgemein bei der Schwerpunkts-Bestimmung für ebene Flächen durch Zerlegung in Dreiecke schlieſslich zu zwei Schwer-Linien zu gelangen, deren Schnitt-Punkt das Gesuchte liefert.

Als Beispiel für eine solche Betrachtung mag die Schwerpunktsbestimmung für den **Kreisausschnitt** durchgeführt werden.

Ersetzt man den begrenzenden Bogen, dessen Centri-Winkel 2β sein mag, durch ein Sehnen-Polygon von n gleichen Seiten, so kann man dieses durch Strahlen aus dem Centrum in n Dreiecke zerlegen und für jedes den Schwerpunkt bestimmen. Man gelangt dabei zu einem Aggregat von n Punkten, welche mit gleichen Koëfficienten (proportional der Fläche eines Teil-Dreiecks) behaftet sind und welche auf einem Kreisbogen liegen, welcher mit dem Radius $\frac{2}{3}(r - \varepsilon)$ *beschrieben ist, falls man den Radius des Sektors mit r bezeichnet.*

Läfst man n mehr und mehr wachsen, so wird die Korrektur ε kleiner und kleiner, während sich das Aggregat mehr und mehr einem Kontinuum nähert.

Der Schwerpunkt der gegebenen Fläche stimmt also überein mit dem Schwerpunkte eines Kreisbogens vom Radius $\frac{2}{3}r$ *und dem Centri-Winkel* 2β, *d. h. er ist von O um* $\frac{2}{3}\frac{r \sin\beta}{\beta}$ *entfernt.*

Dadurch ist die Lage des gesuchten Punktes gegeben, da man aufserdem eine Schwer-Linie in der Verbindungs-Linie zwischen Bogen-Mitte und Centrum gegeben hat.

Für den **Ausschnitt** eines **Kreisringes** von dem Radius r_1 und r_2 und dem Centri-Winkel 2β gilt folgende Betrachtung:

Bestimmt man den Schwerpunkt des gröfseren Kreis-Sektors (r_1) *und den Schwerpunkt des kleineren Kreis-Sektors* (r_2) *für sich, deren Flächen beziehungsweise* $r^2_1\beta$ *und* $r^2_2\beta$ *sind, so ist der Schwerpunkt S für das Ringstück aus diesen beiden Schwerpunkten zu konstruieren, nachdem man den Koëfficienten des einen proportional (k) zu* $r^2_1\beta$ *und den Koëfficienten des andern proportional (k) zu* $r^2_2\beta$ *gesetzt hat.*

Man hat:

$$OS = \frac{k \cdot r^2_1 \beta \cdot \frac{2}{3}\frac{r_1 \sin\beta}{\beta} - k \cdot r^2_2 \beta \cdot \frac{2}{3}\frac{r_2 \sin\beta}{\beta}}{k \cdot r^2_1 \beta - k\, r^2_2 \beta} = \frac{2}{3}\frac{\sin\beta}{\beta} \cdot \frac{r^3_1 - r^3_2}{r^2_1 - r^2_2}.$$

Für den ***Kreis-Abschnitt*** *gilt ein ähnliches Verfahren.*

Die Fläche desselben läfst sich als Differenz zwischen dem entsprechenden Sektor und dem zugesetzten Dreieck oder als Summe dieser Teile darstellen, je nachdem dieselbe kleiner oder gröfser als der Halbkreis ist.

Im ersten Falle ist $OS = \frac{(2r \sin\beta)^3}{12(r^2\beta - r^2 \sin\beta \cos\beta)}$.

Im zweiten Falle kann man auch den ganzen Kreis um einen Abschnitt vom Centri-Winkel $2.\beta' = 360 - 2\beta$ *vermindert denken, um zum gegebenen Kreis-Abschnitt zu gelangen, d. h. man findet* $OS' = \frac{(2r \sin\beta')^3}{12(r^2\beta + r^2 \sin\beta' \cos\beta')}$.

Bezeichnet man die Sehne und die Fläche des Abschnittes in

beiden Fällen, beziehungsweise durch s und F, so ist für beide Fälle

$$OS = \frac{s^3}{12 F}.$$

In Bezug auf die Schwerpunkts-Bestimmung für eine homogene **Kugelmütze** (Kalotte) mag bemerkt werden, daſs eine Parallelebene zur Basis, welche durch die Mitte der Höhe geht, den Schwerpunkt enthält.

Ein elementarer Beweis dieses Satzes von hinreichender Strenge scheint nicht zu existieren [1]).

Da die Höhe der Kalotte wegen der Symmetrie des Gebildes Schwer-Linie ist, so liegt der gesuchte Schwerpunkt im Halbierungs-Punkte der Höhe.

Die Schwerpunkts-Bestimmung der ***Kugel-Zone*** *folgt leicht aus den eben erwähnten Sätzen.*

Bei der Schwerpunkts-Bestimmung für beliebige **Körper** kann des öfteren eine Reduktion eintreten, welche den in Bezug auf die Flächen gegebenen analog ist.

Als Beispiel mag die Schwerpunkts-Bestimmung für eine homogene **Pyramide** durchgeführt werden.

Teilt man dieselben durch Parallel-Ebenen zur Basis in Schichten von gleicher Höhe, so bildet die Parallel-Begrenzung derselben ein Aggregat von Ebenen, aus dem das Kontinuum der Pyramide durch einen Grenz-Übergang hergeleitet gedacht werden kann.

Die Schwerpunkte der einzelnen Glieder des Ebenen-Aggregates liegen auf der Strecke s, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte der Basis verbindet: Schwer-Achse der Pyramide.

Die Koëfficienten der einzelnen Schwerpunkte sind der Reihe nach (von der Spitze zur Basis) proportional zu 0, 1, 4, 9, 16, ... n^2 anzusetzen, so daſs der Schwerpunkt des Ebenen-Aggregates einer früheren Bestimmung (S. 128) gemäſs um $\frac{3}{2} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \cdot s$ *von der Spitze der Pyramide entfernt ist und demnach für wachsendes n dem Abstande* $\frac{3}{4}$ *s näher und näher kommt.*

Der Schwerpunkt einer Pyramide teilt deren Schwer-Achse (in der Richtung von Spitze zur Basis) im Verhältnis 3 : 1.

Derselbe Satz gilt für jedes homogene ***Kegel-Volumen****, d. h. für den endlichen Raumteil, welchen ein geschlossener Kegel-Mantel und eine Ebene begrenzt. Die Specialisierung des Kegels, bei welcher die Spitze ins Unendliche rückt, macht eine doppelte Begrenzung (Cylinder-Volumen) nötig.*

---

1) Wenigstens kenne ich keinen solchen oder genauer gesprochen nur einen solchen, der wegen seiner Komplikation ziemlich unbrauchbar ist.

Wendet man dieselbe Methode auf ein **Prisma** von parallelen End-Ebenen an, so sind die Koëfficienten der einzelnen Glieder des Ebenen-Aggregates von gleicher Gröfse anzusetzen.

Der Grenz-Übergang giebt hier $\frac{1}{2}$ *s statt* $\frac{3}{4}$ *s.*

Der Schwerpunkt eines Prisma beziehungsweise eines Cylinders von parallelen End-Ebenen teilt deren Schwer-Achse im Verhältnis 1 : 1.

Die Bestimmung des Schwerpunktes eines **Kugel-Ausschnittes** führt man durch Zerlegung auf die Bestimmung des Schwerpunktes einer Kalotte zurück.

Teilt man die begrenzende Kalotte (z. B. durch ein Orthogonal-System von Parallel-Kreisen und Meridianen) in eine Schar von n^2 Flächenteilen, so kann man jede derselben in einer gewissen Annäherung als eben ansehen und ihn zur Basis einer Pyramide machen, welche ihre Spitze im Kugel-Centrum hat.

Die Schwerpunkte der einzelnen Pyramiden $\left(\frac{3}{4}\right)$ *erfüllen nach dem Grenz-Übergange für n eine Kalotte, welche auf einer Kugel liegt, deren Radius* (r') *zum Halbmesser der gegebenen Kugel* (r) *im Verhältnisse 3 : 4 steht.*

Hat die begrenzende Kalotte vom Radius r die Höhe h, so hat die Kalotte vom Radius r' *die Höhe* $\frac{3}{4}$ *h, weil hier ähnliche Systeme mit dem Modul* $\frac{3}{4}$ *vorliegen.*

Der Schwerpunkt der Kalotte, welche den Kugel-Ausschnitt ersetzt, hat demnach vom Centrum der Kugel die Entfernung $\frac{3}{4} r - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} h$, *d. h.* $\frac{3}{8} (2r - h)$.

Der gesuchte Schwerpunkt liegt auf der Schwer-Achse des Kugel-Ausschnittes und ist vom Centrum der Kugel um $\frac{3}{8}$ (2 r — h) entfernt, wenn man den Radius und die Höhe des Ausschnittes beziehungsweise mit r und h bezeichnet.

Für die Halbkugel ist $h = r$, *d. h. der Schwerpunkt eines Halbkugel-Volumens vom Radius r ist vom Mittelpunkte um* $\frac{3}{8} r$ *entfernt.*

Für einen Kugel-Abschnitt, den man als Differenz beziehungsweise als Summe eines Sektors und eines Kegels auffassen kann, findet man den Schwerpunkts-Abstand vom Centrum als

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Zum Beweise hat man zunächst den Fall der Differenz und den Fall der Summe von einander zu scheiden.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen sollen noch die sogenannten[1]) Guldinschen Sätze angeführt werden.

1. Die Gröfse einer Umdrehungs-Fläche wird erhalten, indem man die Länge der Erzeugungs-Linie mit dem entsprechenden Erzeugungs-Wege ihres Schwerpunktes multipliciert.

2. Der Inhalt eines Umdrehungs-Körpers wird erhalten, indem man die Gröfse der Erzeugungs-Fläche mit dem entsprechenden Erzeugungs-Wege ihres Schwerpunktes multipliciert.

Eine Umdrehungs-Fläche entsteht, wenn eine ebene Kurve (Erzeugungs-Linie) um eine Grade ihrer Ebene (Achse) rotiert.

Ein Umdrehungs-Körper entsteht, wenn eine ebene Fläche (Erzeugungs-Fläche) um eine Grade ihrer Ebene (Achse) rotiert.

Die Bahn des Schwerpunktes der rotierenden Kurve oder der rotierenden Fläche wird der Erzeugungs-Weg genannt, welcher der Rotation entspricht.

Zum Beweise der Sätze betrachtet man den Mantel und das Volumen eines abgestumpften Kreis-Kegels von den Radien ρ_1 *und* ρ_2 *und der Seitenlänge* s.

Denkt man den Kegel-Stumpf durch Rotation der Seite (s) *um die Achse entstanden, so beschreibt der Schwerpunkt der Seite die Bahn* $2\pi \,.\, \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \pi\,(\rho_1 + \rho_2)$, *während* $s \,.\, \pi\,(\rho_1 + \rho_2)$ *die Gröfse des Kegelmantels darstellt.*

Da man jede Umdrehungs-Fläche durch ein System von Parallel-Ebenen, welche die Achse normal schneiden, in Flächenteile zerlegen kann, welche in einer gewissen Annäherung als die Mäntel abgestumpfter Kegel angesehen werden können, so führt der in Rede stehende Special-Satz durch einen Grenz-Übergang zum ersten Guldinschen Theoreme, dessen Gültigkeit allerdings zunächst nur für geschlossene Rotations-Flächen erwiesen ist.

Um weiter zu verallgemeinern, geht man von dem Satze aus, dafs zwei Meridian-Ebenen (durch die Achse) vom Neigungs-Winkel α *aus einer Umdrehungs-Fläche einen Teil herausschneiden, der sich zur geschlossenen Fläche verhält*[2]) *wie* $\alpha : 4\,R$.

Im zweiten Falle ist der Erzeugungs-Weg des Schwerpunktes (Trapez) als $\frac{2\pi}{3} \,.\, \frac{\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2}$ *gegeben, während die rotierende Fläche die Gröfse* $\frac{h}{2}\,(\rho_1 + \rho_2)$ *hat, so dafs hier nach dem zweiten Theoreme* $\frac{h\pi}{3}\,(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)$ *für das Volumen*

1) Vergl. Pappus, Collectiones mathematicae, lib. VII. Guldin hat in seinen Werken: De centro gravitatis (1635) und Centrobaryca (1643), die Sätze des Pappus erwähnt.

2) Ist α in Bogen-Mafs gegeben, so tritt für $\frac{\alpha}{4\,R}$ ein $\frac{\alpha}{2\,\pi}$.

zu berechnen wäre, eine Berechnung, welche dem Thatsächlichen durchaus entspricht.

Die Erweiterung geschieht hier durch analoge Schlüsse.

Zu bemerken ist, dafs bei Umdrehungs-Flächen zu je einem Paare schneidender Parallel-Ebenen auch mehrere Kegelmäntel etc. gehören können (z. B. beim Kreis-Ring), und dafs man dann die hier im einzelnen durchgeführte Betrachtung mehrere Male anzuwenden hat.

Die Bestimmung der Kugel-Oberfläche und des Kugel-Volumens läfst sich mit grofser Leichtigkeit als Anwendung der Guldinschen Sätze geben.

Läfst man einen Kalbkreis rotieren, so sind die Erzeugungs-Wege des Schwerpunktes für den Bogen und die Fläche beziehungsweise $2\pi \cdot \frac{2r}{\pi}$ *und* $2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi}$, *während die Gröfsen des Bogens und der Fläche sich beziehungsweise als* $r\pi$ *und* $\frac{1}{2} r^2 \pi$ *ergeben, so dafs die bekannten Werte* $4r^2\pi$ *und* $\frac{4}{3} r^3 \pi$ *resultieren.*

Um noch eine andere Anwendung der Schwerpunkts-Theorie zu zeigen, welche auch den rein geometrischen Charakter derselben hervortreten läfst, mag die Berechnung von **Volumen** und **Mantel** für **schief abgeschnittene Prismen** (beziehungsweise Cylinder) mit Hülfe der sogenannten **Schwerpunkts-Achsen** durchgeführt werden.

Die End-Flächen eines Prismas schneiden auf jedem Parallel-Strahl der Kanten eine Strecke ab. Unter der Schar dieser Strecken haben zwei für bestimmte Messungen von Prismen eine gewisse Bedeutung: die Strecke, welche durch den Schwerpunkt der Fläche (f) des Normalschnittes geht und die Strecke, welche den Schwerpunkt des Umfanges (u) des Normalschnittes trifft.

Bezeichnet man die Länge dieser Strecken, welche als **Flächen-Schwerpunkts-Achse** und als **Umfangs-Schwerpunkts-Achse** des Prismas unterschieden werden, mit s_f und s_u, so sind Inhalt und Mantel des Prismas beziehungsweise als $f \cdot s_f$ und $u \cdot s_u$ gegeben.

Die Formeln gelten im besonderen auch für geschlossene Cylinder-Flächen, welche durch zwei Ebenen-Stücke zu einer allseitig geschlossenen Fläche ergänzt werden.

Zum Beweise teilt man das n-seitige Prisma durch einen Normalschnitt in zwei Teile, nachdem man dasselbe durch Ebenen aus einer Kante fächerartig in $n - 2$ *dreiseitige Prismen zerlegt hat, und behandelt jeden der beiden Teile für sich.*

Bezeichnet man die (im Normal-Schnitte gelegenen) Grundflächen der Teil-Prismen mit $f_1, f_2, \ldots f_{n-2}$, *so sind die Endflächen für die obere Gruppe* $f_1 \overline{\cos}^1 \alpha$, $f_2 \overline{\cos}^1 \alpha$, $\ldots f_{n-2} \overline{\cos}^1 \alpha$,

für die untere Gruppe dagegen $f_1 \overline{\cos}^1 \beta$, $f_2 \overline{\cos}^1 \beta \ldots f_{n-2} \overline{\cos}^1 \beta$, *falls man unter* α *und* β *die bezüglichen Neigungen gegen den Normalschnitt versteht.*

Bezeichnet man nun die Schwer-Achsen für die obere Gruppe, beziehungsweise mit $p_1, p_2 \ldots p_{n-2}$, *für die untere Gruppe, beziehungsweise mit* $q_1, q_2 \ldots q_{n-2}$, *so sind die planaren Momente ersten Grades in Bezug auf den Normalschnitt für die beiden Gruppen von Endflächen, beziehungsweise*

$$p_1 f_1 \overline{\cos}^1 \alpha + p_2 f_2 \overline{\cos}^1 \alpha + \ldots p_{n-2} f_{n-2} \overline{\cos}^1 \alpha \text{ und}$$
$$q_1 f_1 \overline{\cos}^1 \beta + q_2 f_2 \overline{\cos}^1 \beta + \ldots q_{n-2} f_{n-2} \overline{\cos}^1 \beta.$$

Betrachtet man jede Gruppe der Endflächen je als ein Ganzes, so resultieren dieselben Gröſsen als $p f \cos \alpha$ *und* $q f \cos \beta$, *falls man die Schwer-Achsen für das ganze obere und für das ganze untere Teil-Prisma beziehungsweise mit* p *und* q *bezeichnet.*

Da für e i n *dreiseitiges Prisma von den Kanten* a, b, c *einerseits die Inhalts-Berechnung zu* $f \cdot \frac{a+b+c}{3}$ *führt, während sich andererseits* $\frac{a+b+c}{3}$ *als Wert der Schwer-Achse ergiebt, so stellt* $f\,(p+q) = f \cdot s_f$, *im Hinblick auf die obige Summation den Inhalt des vorgelegten Prismas dar.*

Um den entsprechenden Satz in Bezug auf den Mantel zu erhalten, bildet man die linealen Momente (ersten Grades) der Umgrenzung des Normalschnittes für dessen Schnittlinie mit der oberen und unteren Grenzfläche.

Dabei ist zu bemerken, daſs die Umfangs-Schwerpunkts-Achse im allgemeinen nicht durch die Schwerpunkte der Endflächen geht, während die Flächen-Schwerpunkts-Achse deren Polar-Punkte in sich aufnimmt.

§. 3. Das Trägheits-Moment.

Das Trägheits-Moment für **jede** beliebige Achse (S. 118) läſst sich durch **drei** bestimmte Trägheits-Momente ausdrücken.

Mit Hülfe der Formel

$$T'_{\alpha,\beta,\gamma} = \sigma^2 . \Sigma m_i + \cos^2 \alpha . T_x + \cos^2 \beta . T_y + \cos^2 \gamma . T_z$$

bestimmt man das Trägheits-Moment für eine Achse, welche gegen die Haupt-Achsen des Polar-Punktes die Neigung (α, β, γ) zeigt und von diesem ausgezeichneten Punkte den Abstand σ hat.

Es verdient bemerkt zu werden, daſs man zwar für jeden beliebigen Punkt drei Haupt-Achsen findet, daſs aber nur für den Schwerpunkt jene einfache Übertragung[1]) *auf parallele Achsen besteht.*

---

1) Die Formel $\Sigma m_i . d'^2_i = \Sigma m_i . d^2_i + \Sigma^2 . \Sigma m_i$ gilt allerdings auch dann noch, wenn diejenige Normal-Ebene der Ebenen der beiden Achsen A und A', welche die Achse A enthält, durch den Polar-Punkt geht.

Alle Achsen derselben Neigung (α, β, γ), welche auf einem Kreis-Cylinder vom Radius σ liegen, dessen Achse durch den Polar-Punkt geht, haben dasselbe Trägheits-Moment.

Alle Schwer-Linien, für deren Neigung

$$\cos^2_\alpha . T_x + \cos^2_\beta . T_y + \cos^2_\gamma . T_z = \text{constans}$$

erfüllt ist, haben gleichfalls dasselbe Trägheits-Moment: dieselben bilden eine geschlossene Kegel-Fläche.

Durch die Substitution $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$ *geht letztere Bedingung über in*

$$\cos^2\beta\,(T_y - T_x) + \cos^2\gamma\,(T_z - T_x) = \text{constans}.$$

Da diese Gleichung diophantisch (β, γ) *ist, so erhält man ein Kontinuum von Strahlen.*

Da diese Strahlen alle durch den Polar-Punkt gehen, so gelangt man zu einer Kegel-Fläche, welche übrigens vom zweiten Grade ist.

Konstruiert man um alle Seiten einer solchen Kegel-Fläche Kreis-Cylinder vom Radius σ, *so sind deren Erzeugungs-Linien durchweg Achsen von gleichem Trägheits-Moment.*

Wenn die Punkte des Systems alle von positivem oder von negativem Koëfficienten sind, so haben T_x, T_y, T_z gleiches Vorzeichen.

In diesem Falle, der bei homogenen Systemen stets eintritt, führt die oben erwähnte Konstruktion von Cauchy zu einem Ellipsoide [1]).

Erwähnt mag werden, daſs eine ähnliche Konstruktion auch für die planaren Momente zweiten Grades ausführbar ist: man gelangt dabei zum Binetschen Ellipsoid [2]).

Die Gleichung

$$T = R^2 . \Sigma m_i$$

definiert für ein System von Koëfficienten Σm_i eine Gröſse R, welche **Trägheits-Radius** genannt wird.

Die **radii** vectores des Cauchy-Poinsotschen Ellipsoides sind den **Trägheits-Radien** für die entsprechenden Achsen (Verlängerung der radii vectores) **umgekehrt proportional.**

Jeder Achse entspricht ein bestimmter Radius der Trägheit.

Trägt man auf allen Achsen eines Punktes die bezüglichen Trägheits-Radien auf, welche proportional mit $\sqrt{T}$ *sind, so gelangt man zu einer Fläche, deren radii vectores den radii vectores des Cauchy-Poinsotschen Ellipsoides, beziehungsweise umgekehrt proportional sind:*

Es existiert für jeden Punkt ein bestimmtes Ellipsoid (Reciprokal-Ellipsoid), dessen Achsen-Richtungen mit denen des Cauchy-Poinsotschen Ellipsoids übereinstimmen, während seine Achsen-Längen den Haupt-Trägheits-Radien direkt, also den Haupt-Trägheits-Momenten indirekt proportional sind.

---

1) Dessen absolutes Glied eventuell negativ angesetzt werden muſs.

2) Vergl. Journal de l'école polytechnique, Cahier XVI. Mém. sur la théorie des axes.

Werden **zwei** Haupt-Trägheits-Radien einander **gleich**, so nimmt das Cauchy-Poinsotsche Ellipsoid die Specialform eines **Rotations-Ellipsoides** an.

Es giebt in jedem Systeme zwei Kurven, für deren Punkte zwei Haupt-Trägheits-Momente einander gleich werden[1].

Werden **drei** Haupt-Trägheits-Radien einander **gleich**, so nimmt das Rotations-Ellipsoid die Specialform einer **Kugel** an.

Es giebt in jedem Systeme höchstens einzelne Punkte der vorausgesetzten Beschaffenheit: diese treten nur auf, wenn das Ellipsoid für den Schwerpunkt ganz bestimmte Eigenschaften zeigt.

Besitzt das Punkt-System eine **Normal-Diametral-Ebene**, für welche die entsprechenden Elemente gleiche Koëfficienten haben, so ist jede **Normale** dieser ausgezeichneten Ebene eine Haupt-Achse für ihren Fuſs-Punkt.

Ergänzt man Normale (Z) *und Ebene* ($X\,O\,Y$) *zu einem dreiachsigen Koordinaten-Systeme, so haben entsprechende Punkte die Koordinaten* ($x_i, y_i, +z_i$) *und* ($x_i, y_i, -z_i$), *d. h. die Elemente von* $D_y = \Sigma m_i . x_i z_i$ *und* $D_x = \Sigma m_i . y_i z_i$ *heben sich paarweise auf.*

Daraus ($D_y = 0$, $D_x = 0$) *folgt die Behauptung, wenn man bedenkt, daſs innerhalb eines Haupt-Achsen-Kreuzes die Drehung einer Achsen-Ebene* ($X\,O\,Y$) *nur auf die entsprechende Deviation* (*hier* D_z) *Einfluſs hat und die andern beiden Momente ungeändert läſst, wie man leicht im Hinblick auf die Konstruktion des Cauchy-Poinsotschen Ellipsoides nachweisen kann.*

Besitzt das System **zwei** auf einander senkrecht stehende **Normal-Diametral-Ebenen**, für welche die entsprechenden Elemente gleiche Koëfficienten haben, so führt deren **Durchschnitts-Linie** im Verein mit **jeder** ihrer **Normal-Ebenen** zu einem Haupt-Kreuze, dessen andere beiden Achsen, beziehungsweise auf den Normal-Diametral-Ebenen senkrecht stehen.

Beweis folgt aus der doppelten Anwendung des vorigen Satzes.

Besitzt das System **drei** auf einander senkrecht stehende Normal-Diametral-Ebenen, für welche die entsprechenden Elemente gleiche Koëfficienten haben, so bilden deren Durchschnitts-Linien ein Haupt-Achsen-Kreuz, dessen Centrum der Polar-Punkt ist.

Drei Symmetrie-Ebenen schneiden sich stets im Polar-Punkte. Sonst folgt der Beweis leicht aus der dreifachen Anwendung des vorigen Satzes.

Man nennt das Cauchy-Poinsotsche Ellipsoid für den Polar-Punkt das **Central-Ellipsoid** des Systems.

Bei der Berechnung von Trägheits-Momenten hat man zunächst

---

1) Das folgt aus der Eigenschaft der Focal-Flächen. Vergl. Schell, Theorie I, S. 126. Bemerkenswert ist, daſs überhaupt nicht jede Grade des Raumes für ein bestimmtes System Haupt-Achse ist und daſs die Graden, welche hier Haupt-Achsen sind, diese Eigenschaft entweder nur für einen Punkt oder für alle Punkte haben und daſs diese im letzteren Falle durch den Polarpunkt gehen.

die Achsen des **Central-Ellipsoides** der Lage und Gröſse nach zu bestimmen.

Sind die Achsen der Lage nach gefunden, so berechnet man für ihre Ebenen die planaren Momente zweiten Grades, d. h. die Gröſsen P_x, P_y, P_z — es ist z. B. $P_y = \Sigma m_i y^2_i$ — und setzt aus ihnen $T_x = P_z + P_y$, $T_y = P_y + P_z$, $T_z = P_x + P_y$ zusammen.

Im Gebiete der **homogenen** Gebilde sind nach dem Vorangegangenen die Central-Haupt-Achsen für das **Orthogonal-Parallelepiped** und für das **Ellipsoid** sofort gegeben.

Beim Rotations-Ellipsoid bildet die Drehungs-Achse mit jedem Graden-Paare, welches dieselbe zu einem orthogonalen Kreuze ergänzt, ein System von Haupt-Achsen. Rotations-Körper.

Für die Kugel ist jedes orthogonale Kreuz, dessen Anfangs-Punkt im Centrum der Kugel liegt, ein centrales Haupt-Achsen-System.

Beim Orthogonal-Parallelepiped mit quadratischem Querschnitt ist das Central-Ellipsoid ein Rotations-Ellipsoid.

Beim Würfel ist das Central-Ellipsoid eine Kugel.

Im Gebiete der **homogenen** Gebilde gilt folgender Satz:

Homologe Raumteile zweier ähnlichen Systeme, welche nach dem Modulus α konstruiert sind, stehen zu einander in dem Verhältnisse $\alpha^m : 1$, falls man ihre Dimension mit m bezeichnet

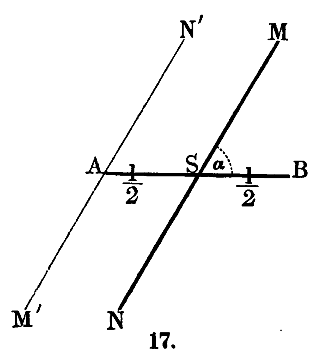
Danach hat man [1]) unter analogen Bedingungen:

In ähnlichen Systemen stehen die **Trägheits-Momente** homologer Raumteile für homologe Achsen im Verhältnisse $\alpha^{m+2} : 1$.

Wenn homologe Strecken ähnlicher Systeme nach dem Verhältnisse $\alpha : 1$ konstruiert sind, so stehen die Flächen homologer Dreiecke im Verhältnisse $a^2 : 1$, während die Volumina homologer Tetraëder das Verhältnis $\alpha^3 : 1$ zeigen.

Das Central-Ellipsoid einer homogenen **Strecke** l stellt sich als ein Kreis-Cylinder dar, dessen Achsen jene Strecke ist.

Um hier das Trägheits-Moment (T) für eine Schwer-Achse (α) zu bestimmen, zieht man zu dieser eine Parallele durch den einen Endpunkt der Strecke: Das Moment (T_1) von AB für M′N′ muſs sich zu dem Momente (T_2) von SB für MN verhalten ($\alpha = 2$, m = 1) wie $2^3 : 1$. (Figur 17).



17.

Andererseits gelten für das gesuchte Moment (T) die Gleichungen

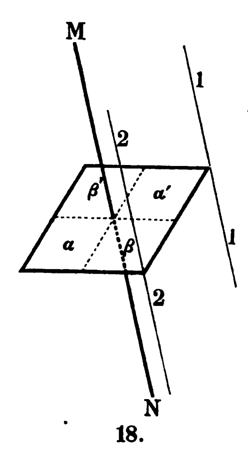
$$T_1 = T + \left(\frac{l}{2} . \sin\alpha\right)^2 . \Sigma m_i \text{ und}$$

$$T = 2\,T_2.$$

Demnach ist: $T = \frac{l^2}{12} . \sin^2\alpha . \Sigma m_i$.

---

1) Vergl. Schell, Theorie I, S. 134.



18.

Von Σm_i kann im allgemeinen nur behauptet werden, dafs Proportionalität zu l vorliegt.

Für $\alpha = 0$ ist $T = 0$: der entsprechende radius vector des Cauchy-Poinsotschen Ellipsoids ist unendlich grofs.

Eine analoge Betrachtung läfst sich für das **Parallelogramm** durchführen, indem man dasselbe durch die beiden Mittellinien in 2 Paare vom Parallelogramm α, α' und β, β' teilt.

Das Trägheits-Moment (T_α) von α in Bezug auf MN verhält sich zu dem Trägheits-Momente (T_1) der ganzen Fläche in Bezug auf Achse 1 wie $1 : 2^4$ (Figur 18).

Ebenso ist $T_\beta : T_2 = 1 : 2^4$.

Andererseits hat man $T_1 = T + p^2 . \Sigma m_i$ und $T_2 = T + p^2_2 . \Sigma m_i$ zu berücksichtigen, wenn man die Abstände des Schwerpunktes S von den Achsen 1 und 2, beziehungsweise mit p_1 und p_2 bezeichnet.

Demnach ist:

$$T_1 + T_2 = 16\,(T_\alpha + T_\beta) = 2\,T + (p^2_1 + p^2_2)\,\Sigma m_i,$$

während man andererseits $T = T_\alpha + T_{\alpha'} + T_\beta + T_{\beta'} = 2\,(T_\alpha + T_\beta)$ in Rechnung zu bringen hat, so dafs

$$T = \frac{1}{6}\,(p^2_1 + p^2_2)\,\Sigma m_i$$

resultiert.

Wenn MN normal zur Fläche des Parallelogramms errichtet wird, so erreichen p_1 und p_2 und demnach auch T ihr Maximum.

Für ein Rechteck von den Seiten a und b ergeben sich die bekannten Formeln $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 . \Sigma m_i$, beziehungsweise $\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \Sigma m_i$, in Bezug auf eine Schwer-Achse, welche der einen, beziehungsweise der andern Seite parallel ist und $\frac{a^2 + b^2}{12} . \Sigma m_i$ in Bezug auf eine zur Fläche normal konstruierte Achse durch S.

Die vorige Untersuchung liefert für eine durch den Schwerpunkt gezogene Achse unmittelbar das Trägheits-Moment (T) des **Dreiecks,** dessen Fläche proportional zu Σm_i sein mag.

Zieht man durch die Mitte (M_c) von AB die Parallele zu MN (Figur 19), so ist für diese Achse das Trägheits-Moment (T'') des Parallelogramms ACBC′ doppelt so grofs als das Trägheits-Moment (T') des Dreiecks ACB, d. h. man hat:

$$\frac{T''}{2} = T' = \frac{1}{6}\,(p^2_1 + p^2_2)\,\Sigma m_i.$$

Betrachtet man die Proportion $MS:SC = 1:2$, so findet man sofort:

$$T = T' - \left(\frac{p_1}{3}\right)^2 . \Sigma m_i = \frac{1}{6}\left(\frac{p^2_1}{3} + p^2_2\right)\Sigma m_i.$$

Projiciert man $\triangle ACB$ auf eine Normal-Ebene von MN, so entsteht ein Dreieck $A_0 C_0 B_0$, dessen Seiten und Medianen beziehungsweise mit a_0, b_0, c_0 und t_a, t_b, t_c bezeichnet werden mögen.

Man hat $p_1 = t_c$ und $p_2 = \frac{c_0}{2}$ und findet demnach:

$$T = \frac{1}{6}\left(\frac{t^2_c}{3} + \frac{c^2_0}{4}\right)\Sigma m_i.$$

19.

Es ist also auch:

$$3\,T = \left(\frac{t^2_a + t^2_b + t^2_c}{18} + \frac{a^2_0 + b^2_0 + c^2_0}{24}\right)\Sigma m_i.$$

Da nun die Gleichung

$$a^2_0 + b^2_0 + c^2_0 = \frac{4}{3}\,(t^2_a + t^2_b + t^2_c)$$

für jedes Dreieck besteht, so ist

$$T = \frac{1}{36}\,(a^2_0 + b^2_0 + c^2_0)\,\Sigma m_i \quad \text{oder}$$

$$T = \frac{1}{27}\,(t^2_a + t^2_b + t^2_c)\,\Sigma m_i.$$

Steht MN senkrecht auf der Fläche des Dreiecks, so ist $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.

Fällt MN in die Fläche hinein, so geht man auf die ursprünglichen Formeln zurück.

Wenn man die Mittelpunkte der drei Seiten mit den Koëfficienten $\frac{\Sigma m_i}{3}$ *versieht, so gelangt man zu einem Aggregate von drei Punkten, welches das Dreieck in Bezug auf sein Trägheits-Moment ersetzt, so lange es sich um Central-Achsen handelt.*

Wenn man ein **reguläres Polygon** (n) in Radial-Dreiecke zerlegt, so läſst sich das Trägheits-Moment desselben in Bezug auf eine Central-Achse, welche auf seiner Ebene senkrecht steht, leicht bestimmen

Für ein Radial-Dreieck von den Seiten r, r und s und der Höhe $h_s = \rho$ findet man

$$\frac{1}{36}\,(s^2 + 2\,r^2)\,\Sigma' m_i + \left(\frac{2}{3}\,\rho\right)^2 . \Sigma' m_i,$$

wobei r und ρ in Bezug auf das Polygon die Radien des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises sind, während $\Sigma' m_i$ für ein Radial-Dreieck gilt.

Bezeichnet man $n . \Sigma' m_i$ mit Σm_i, so gewinnt man für das regelmäſsige Vieleck von der Seite s die Formel:

$$T = \frac{n}{36}(s^2 + 2r^2 + 16\rho^2)\,\Sigma' m_i = \frac{1}{2}\left(\rho^2 + \frac{s^2}{12}\right)\Sigma m_i.$$

Für ein Sechseck ist $r = s = \frac{2}{3}\rho\sqrt{3}$, *so daſs man hat:*

$$T = \frac{5}{12} r^2 . \Sigma m_i \text{ oder } T = \frac{5}{9}\rho^2 . \Sigma m_i.$$

Für den **Kreis** vom Radius r ist unter analogen Verhältnissen:

$$T = \frac{1}{2} r^2 . \Sigma m_i.$$

Nimmt man nun einen kontinuierlichen Teil von Radial-Dreiecken, so gelangt man zu **Polygon-Ausschnitten** und zum **Kreis-Ausschnitt:** die obigen Formeln gelten auch hier.

Von der Gröſse Σm_i *läſst sich im allgemeinen nur aussagen, daſs sie proportional zur Fläche des Ausschnittes beziehungsweise zur Fläche der ganzen Figur ist.*

Für ein **Orthogonal-Parallelepiped** von den Kanten a, b, c findet man in Bezug auf die Haupt-Central-Achsen:

$$T_a = \frac{1}{12}(b^2 + c^2)\,\Sigma m_i,\quad T_b = \frac{1}{12}(a^2_\alpha + c^2)\,\Sigma m_i,$$

$$T_c = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)\,\Sigma m_i.$$

Ersetzt man das Parallelepiped der Reihe nach in dreifacher Weise durch ein Aggregat (n) von Rechtecken ($\Sigma' m_i$), *so findet man unmittelbar z. B.:*

$$T_a = \frac{n}{12}(b^2 + c^2) . \Sigma' m_i = \frac{1}{12}(b^2 + c^2) . \Sigma m_i$$

Für jede andere Central-Achse ist:

$$T_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{12}\left\{(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma\right\} . \Sigma m_i$$

Für jede Achse gilt:

$$T'_{\alpha,\beta,\gamma} = \sigma^2 . \Sigma m_i + T_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Für die drei Kanten ist σ^2 *der Reihe nach durch* $\frac{b^2 + c^2}{4}$, $\frac{a^2 + c^2}{4}$, $\frac{a^2 + b^2}{4}$ *zu ersetzen, so daſs hier resultiert:*

$$T'_a = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) . \Sigma m_i,\quad T'_b = \frac{1}{3}(a^2 + c^2) . \Sigma m_i,$$

$$T'_c = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) . \Sigma m_i.$$

Für einen Punkt E des Cauchyschen Ellipsoids gilt die Gleichung:

$$(b^2 + c^2)\,\xi^2 + (c^2 + a^2)\,\eta^2 + (a^2 + b^2)\,\zeta^2 = constans.$$

Für ein Orthogonal-Prisma läfst sich die Bestimmung in Bezug auf eine Achse, parallel zu den Kanten, durch die bisher gegebenen Betrachtungen durchführen, falls man den Querschnitt zu behandeln versteht.

So ist z. B. für ein orthogonales Kreis-Cylinder-Volumen (r) in Bezug auf dessen Achse zunächst ein Aggregat aus Kreisflächen ($\Sigma' m_i$) einzuführen, so dafs man $\frac{n}{2} . r^2 . \Sigma' m_i$ erhält. Der Grenz-Übergang liefert:

$$T = \frac{r^2}{2} . \Sigma m_i.$$

Ebenso findet man für ein hohles Cylinder-Volumen von den Radien ρ *und* ρ' *unter gleichen Umständen:*

$$T = \frac{\rho^2}{2} . \Sigma \mu_i - \frac{\rho'^2}{2} . \Sigma' \mu_i.$$

Setzt man $\Sigma \mu_i = \varkappa \pi \rho^2 h$ *und* $\Sigma \mu'_i = \varkappa \pi \rho'^2 h'$, *so ist* $T = \frac{\varkappa \pi h}{2} (\rho^4 - \rho'^4) = \frac{\varkappa \pi h}{2} (\rho^2 + \rho'^2)(\rho^2 - \rho'^2)$, *während das Volumen des Hohl-Cylinders, d. h.* $\pi h (\rho^2 - \rho'^2)$ *in gleicher Weise proportional zu dem entsprechendeu* Σm_i *ist. Man hat also:*

$$T = \frac{1}{2} (\rho^2 + \rho'^2) \Sigma m_i.$$

Bei gleichem Σm_i *hat der volle Cylinder ein kleineres Trägheits-Moment als der Hohl-Cylinder.*

Für ein Orthogonal-Prisma, dessen Querschnitt ein reguläres Pylogon von den Radien r *und* ρ *ist, findet man für die Achse*

$$T = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} r^2 + \rho^2 \right).$$

In Bezug auf jede andere Haupt-Achse eines **Cylinder-Volumens** von der Höhe h findet man denselben Wert für T' und zwar $\frac{1}{12} (3 r^2 + h^2) . \Sigma m_i$.

Für eine Kreis-Linie in Bezug auf einen Durchmesser gilt:

$$T' = \frac{r^2}{2} . \Sigma m_i.$$

Für eine Kreis-Fläche in Bezug auf einen Durchmesser gilt:

$$T' = \frac{r^2}{4} . \Sigma m_i.$$

Für ein normales ***Kreis-Kegel-Volumen*** *gilt in analoger Weise in Bezug auf ein Haupt-Achsen-System:*

$$T = \frac{3}{10} r^2 . \Sigma m_i \text{ und } T' = \frac{1}{80} (12 r^2 + 3 h^2) . \Sigma m_i.$$

Die zuletzt genannten Momente lassen sich in elementarer Ableitung nicht mit der nötigen Strenge herstellen, weil die grundlegende Formel für das Trägheits-Moment eines Kreis-Bogens (α)

in Bezug auf einen durch einen seiner Endpunkte gehenden Durchmesser nicht elementar herleitbar ist.

Diese Formel, welche $T_\alpha = \frac{1}{2} \frac{r^2}{\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) \Sigma m_i$ *lautet, liefert für* 360^0 *den Wert* $T = \frac{1}{2} r^2 . \Sigma m_i$.

Für eine **Kugel** gilt für jede Central-Achse:

$$T = \frac{2}{5} r^2 . \Sigma m_i.$$

Wenn man im Kulminations-Punkte eines Kugel-Abschnittes (h) parallel zum Haupt-Achsen-Kreuz ein System von Achsen einführt, so ist für den Diameter der Kugel

$$T = \frac{2}{3} h \left(r - \frac{5}{12} h + \frac{1}{90} \frac{h^2}{r - \frac{1}{3} h} \right) . \Sigma m_i,$$

während man für die anderen Achsen anzusetzen hat

$$T = \frac{1}{3} h \left(r + \frac{13}{12} h - \frac{4}{45} \frac{h^2}{r - \frac{1}{3} h} \right) . \Sigma m_i.$$

Die letzten beiden Formeln gestatten, das Trägheits-Moment jeder Kugel-Linse (Pendel) herzuleiten.

II. Phoronomie.

1. Der Punkt.

Die **Bewegung** eines Punktes ist vollständig dargestellt, wenn die **Lage** desselben für jeden Zeit-Moment gegeben ist [1]).

Eine solche Darstellung ist abhängig von der Methode, welche man für die Lagen-Bestimmung wählt.

Aus der grofsen Anzahl solcher Methoden wurden **drei** herausgenommen [2]), um weitere Verwendung zu finden; jede derselben liefert ein bestimmtes Verfahren für die Darstellung der Bewegung eines Punktes.

Die **erste** Methode — sie mag im Hinblick auf die früher gewählten Bezeichnungen **Fundamental-Methode** heifsen — wird angewandt, wenn die **Bahn** der Bewegung, d. h. die Linie, welche

---

1) Da die Ausdrücke „Bewegung“ und „Lage“ überhaupt nur Sinn haben, wenn man ein Gebilde in Bezug auf ein anderes betrachtet, so genügt die im Texte angewandte kurze Bezeichnung zur Fixierung des Gedankens. Vgl. S. 9.

2) Vergl. B, I, S. 76 etc.

der bewegte Punkt durchläuft, als **gegeben** angesehen werden darf.

In **diesem** Falle hat man **unmittelbar** die Bewegung des Punktes auf seiner Bahn mit dem Flusse der Zeit zu vergleichen, welcher sich ebenfalls als eine Bewegung auf einer bestimmten Linie darstellen läſst.

Eine solche Vergleichung wird **mittelbar** auch durch die **beiden** andern Methoden vollzogen, welche übrigens erst nach Durchführung der ersten zur Behandlung kommen können, weil sie beide schlieſslich nur Anwendungen der Fundamental-Methode (auf die Bewegung von Hülfs-Punkten auf Hülfs-Bahnen) sind.

Diese beiden Methoden mögen als **Projektions-** und **Polar-**Methode eingeführt werden: die eine derselben benutzt die Bewegungen von Projektionen des Punktes, die andere verwendet die Bewegung [1]) eines von einem festen Pole aus gezogenen Radius vector um zum Ziele zu gelangen.

A. Die Fundamental-Methode.

§. 1. Das einfach ausgedehnte Kontinuum der Zeit und die Bahn der Bewegung.

1.

Die Zeit ist ein unendliches [2]) Kontinuum von einer Dimension und läſst sich infolge dessen durch gewisse einfach ausgedehnte Raum-Kontinua, d. h. durch Linien abbilden.

Die einfachste Darstellung der Zeit hat man in der graden Linie gegeben, es lieſsen sich aber eben so wohl [3]) eine Parabel, ein Hyperbel-Ast, eine Schraubenlinie etc. benutzen.

Um eine solche Darstellung durchzuführen, fixiert man zunächst auf der zu Grunde gelegten Linie — hier mag ein für alle Mal die Grade gewählt werden — einen bestimmten Sinn und läſst, mit diesem fortschreitend, auf einander folgenden Punkten auf einander folgende Zeit-Momente entsprechen. Man stellt auf diese Weise den Fluſs der Zeit durch die Bewegung eines Punktes (Z) auf einer Graden dar. Die augenblickliche Lage des Punktes (Z) bezeichnet die Gegenwart, während sich Vergangenheit und Zukunft von ihm aus nach der einen und nach der andern Seite ins Unendliche ausdehnen.

---

1) Welche auf einen Kreis und auf eine Grade als Hülfs-Bahnen zurückweist.

2) Die Begriffe des „Unbegrenzten" und des „Unendlichen" sind sorgfältig aus einander zu halten. Vergl. Riemanns Habilitations-Schrift, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854 und Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie, 1876, S. 5. So ist z. B. die Kreis-Peripherie eine unbegrenzte Linie, welche nicht unendlich ist.

3) Es lassen sich zunächst alle unendlichen Linien ohne Singularitäten verwenden. Will man andere wählen, so bedarf es gewisser Festsetzungen.

Um die Lage von Z angeben zu können, mufs man einen festen Punkt O einführen: die Strecke OZ, welche der Gröfse und Lage nach fixiert ist, bestimmt die Lage von Z in eindeutiger Weise. Die Strecke OZ mifst aufserdem durch ihre Länge die Dauer des durch OZ dargestellten Zeit-Teils und bestimmt zugleich durch ihre Lage innerhalb der Graden dessen Lage innerhalb der Zeit (Figur 20).

−∞ ······· O ——— Z — A — B ——— ······· +∞

20.

Nachdem einmal der Punkt O, dessen Lage innerhalb der Graden zunächst ganz willkürlich war, gewählt worden, ist jede Zeit-Bestimmung in eindeutiger Weise durchführbar.

Für zwei beliebige Lagen (A und B) von Z hat man die Gleichung:

$$OA + AB = OB, \text{ d. h.}$$
$$AB = OB - OA.$$

Die Strecke AB, welche der Gröfse und Lage nach bestimmt ist, mifst durch ihre Länge die Dauer des durch AB dargestellten Zeit-Teiles und bestimmt zugleich durch ihre Lage innerhalb der Graden dessen Lage innerhalb der Zeit.

Unter Umständen wird es genügen, nur die Dauer eines Zeit-Teiles zu berücksichtigen, oft aber wird man auch dessen Lage innerhalb der (ganzen) Zeit in Betracht ziehen müssen.

Im gemeinen Leben beschränkt man sich bald auf die Angabe einer Dauer von 5 Minuten, 16 Stunden, 27 Jahr etc., bald sieht man sich gezwungen Zeit-Teile zum Anfangs-Punkte unserer Zeitrechnung (Geburt Jesu) oder zu anderen bestimmten Zeit-Punkten in Beziehung zu setzen. Ersteres geschieht, wenn uns Zeit-Teile von gleicher Dauer gleichartig erscheinen, letzteres tritt ein, wenn verschiedene Zeit-Teile von gleicher Dauer in irgend welcher Hinsicht für uns verschiedenen Wert besitzen.

Für die vollständige Bestimmung eines Zeit-Teiles wendet man stets das oben (durch die Gleichung $AB = OB - OA$) bezeichnete Verfahren an: man fixiert in Bezug auf einen bestimmten Anfangs-Punkt O die beiden Zeit-Momente A und B, welche den darzustellenden Zeit-Teil AB begrenzen.

Ist z. B. der grofse Freiheitskrieg der Verbündeten gegen Napoleon I als ein solcher Zeit-Teil gegeben, so genügen die Angaben „3ter Februar 1813“ und „20ster November 1815“, wenn man ein für alle Mal den Zeit-Moment[1] *der Geburt Jesu als Anfangs-Punkt der Zeitrechnung eingeführt denkt.*

Des öfteren kann eine Verlegung des Anfangs-Punktes O zweckmäfsig erscheinen. Dieselbe läfst sich in doppelter Weise

1) Dafs dabei gewisse Korrekturen eintreten müssen, ist für die Vorstellung dieser ganzen Verhältnisse unerheblich.

ausführen: der neue Anfangs-Punkt wird von O aus entweder in der „Richtung $+\infty$“ oder in der „Richtung $-\infty$“ verschoben.

Im ersten Falle — der neue Anfangs-Punkt mag O_1 heifsen — hat man bei einer Verschiebung z für **jeden** Punkt Z die Gleichung:

$$OO_1 + O_1Z = OZ, \text{ d. h.}$$
$$O_1Z = OZ - z.$$

Im zweiten Falle — der neue Anfangs-Punkt mag O_2 heifsen — hat man bei einer Verschiebung z für **jeden** Punkt Z die Gleichung:

$$O_2O + OZ = O_2Z, \text{ d. h.}$$
$$O_2Z = OZ + z.$$

Durch eine solche Verlegung wird die **Lage** eines bestimmten Zeit-Teiles AB geändert, während dessen **Dauer** dieselbe bleibt.

In Bezug auf den **Sinn** ist Folgendes zu bemerken: Wenn Z **innerhalb** der Strecke OO_1 oder **innerhalb** der Strecke O_2O liegt, so haben OZ und O_1Z oder OZ und O_2Z **entgegengesetzten** Sinn, wenn Z **aufserhalb** der Strecke OO_1 oder **aufserhalb** der Strecke O_2O liegt, so haben OZ und O_1Z oder OZ und O_2Z **denselben** Sinn.

Dabei ergiebt sich der ein für alle Mal fixierte Sinn, in Übereinstimmung mit welchem oder im Gegensatz zu welchem der Sinn einer beliebigen Strecke festgesetzt wird, durch die an die Spitze gestellte Annahme, dafs ein Fortschreiten in demselben dem Flufse der Zeit, d. h. einem Übergange von der Gegenwart zur Zukunft entspricht.

Diesem positiven Sinne steht der negative Sinn gegenüber, in welchem man fortzuschreiten hat, wenn man einen Übergang von der Gegenwart auf die Vergangenheit darstellen will.

Bei dieser Festsetzung weisen positive Werte von OZ stets auf die Zukunft hin, während negative Werte von OZ stets auf die Vergangenheit hindeuten.

*Ein **negativer** Wert einer Zeit-Dauer, welchen die Rechnung angiebt, zeigt demnach an, dafs ein Ereignis **vor** einem bestimmten andern eingetreten ist, während ein **positiver** Wert einem Ereignisse seine Stelle **nach** einem bestimmten andern anweist.*

Bei allen diesen Lagen-Bestimmungen — es handelt sich um die Fundamental-Methode für Punkte — mufs die Festsetzung des Sinnes sorgfältig beachtet werden, so dafs AB und BA Stücke entgegengesetzten Sinnes sind, welche dieselbe Länge und Endpunkte von gleicher Lage haben.

Die **Bewegung des Punktes Z auf seiner Graden,** welche den Flufs der Zeit in räumlicher Anschauung vermittelt, ist nun das **Mafs für alle Bewegungen.**

Man nennt diese **Mafs-Bewegung,** deren **Einheit** eine bestimmte **Zeit-Dauer** ist, eine **gleichförmige** Bewegung, um dadurch ihre **Eigentümlichkeit** zu bezeichnen, welche sich zwar

des näheren erläutern aber nicht des weiteren definieren läfst.

*Die **Zeit-Dauer** tritt hier als **zweite** Einheit der Mechanik neben die **Länge**, während sich später die **Masse** als **dritte** Einheit hinzugesellt.*

Was in letzter Instanz Länge, Dauer und Masse sind, läfst sich nicht definieren, weil diese Begriffe eine grofse Schar anderer Begriffe konstituieren helfen und dabei selbst „grundlegend“ sind. Man mufs sich damit begnügen, auf diese Begriffe hinzuweisen und sie zu erläutern.

2.

Die Linie, welche ein bewegter Punkt W durchläuft, heifst die **Bahn der Bewegung.**

Indem man die Lagen-Änderung des Punktes W auf seiner Bahn mit der Lagen-Änderung des Punktes Z auf seiner Graden vergleicht, gelangt man zu einer Darstellung der Bewegung von W.

Dazu ist erforderlich, dafs man für die Bahn der Bewegung einen bestimmten Sinn fixiert, und auf ihr einen festen Punkt P einführt, von dem aus die Entfernung von W gemessen werden soll. Positive Werte von PW entsprechen dem so fixierten Sinne, negative einem entgegengesetzten Fortschreiten.

Es handelt sich um die Fundamental-Methode der Lagen-Bestimmung eines Punktes.

Am einfachsten ist es, irgend eine Lage von W, welche durch die Bewegung dargeboten wird, als Lage von P zu fixieren und durch das hier gegebene Fortschreiten von W den Sinn der Bahn bestimmt zu denken.

In einem bestimmten Zeit-Momente, welcher durch eine bestimmte Lage Z_i des Punktes Z dargestellt wird, mag der Punkt W die Lage W_i haben, so dafs der Zeit-Dauer OZ_i das Weg-Stück PW_i entspricht. Die Punkte Z_i und W_i, beziehungsweise die Strecken OZ_i und PW_i sollen zusammengehörig genannt und in ihrem Zusammenhange, wo es nötig erscheint, durch (Z_i, W_i), beziehungsweise (OZ_i, PW_i) bezeichnet werden, so dafs eine Reihe solcher zusammengehöriger Lagen von Z und W durch (Z_1, W_1), (Z_2, W_2) . . . . $Z_n, W_n)$, beziehungsweise durch (OZ_1, PW_1), (OZ_2, PW_2) . . . . (OZ_n, PW_n) dargestellt werden kann.

Wenn es nun gelingt, einen Rechnungs-Ausdruck zu finden, welcher für jedes PW_i das zugehörige OZ_i, beziehungsweise für jedes OZ_i das zugehörige PW_i zu bestimmen gestattet, so wird die in Aussicht genommene Vergleichung der Bewegung von W mit der Bewegung von Z durchgeführt sein, weil man dann im Stande ist, den Ort von W für jeden Zeit-Moment anzugeben, beziehungsweise festzustellen, welche Zeit-Dauer verflossen war, als W in diese oder jene Lage gelangte.

Die Forderung einen solchen Rechnungs-Ausdruck darzustellen, welcher eine unendliche Reihe von zusammengehörigen Werten (OZ, PW_i) zweier Gröfsen (OZ und PW) liefert, erinnert an die Verhältnisse, welche bei diophantischen Gleichungen, beziehungsweise bei unterbestimmten Gleichungs-Systemen obwalten.

Wenn man OZ mit t und PW mit s bezeichnet, so geben die diophantischen Gleichungen $at + bs + c = 0$ oder

$$at^2 + 2bts + cs^2 + 2dt + 2es + f = 0$$

etc. bestimmte Beziehungen zwischen s und t an, so dafs einem ***willkürlich*** *festgesetzten oder vorgeschriebenen Werte von* $\mathbf{t}$ *ein (beziehungsweise mehrere*[1]*) durch die Gleichung* ***gegebener*** *Wert von* $\mathbf{s}$ *entspricht und umgekehrt.*

In der That läfst sich jede irgend wie bestimmte Beziehung zwischen OZ und PW im allgemeinen durch eine diophantische Gleichung dargestellt denken, welche **unendlich viele Wert-Paare** der beiden Unbekannten liefert, wenn man die eine z. B. OZ von 0 bis a wachsen läfst und jedesmal die zugehörigen Werte von PW als ausgerechnet voraussetzt.

Eine solche Beziehung zwischen OZ und PW sei durch folgendes Schema angedeutet:

$$OZ_1 = 1,\ PW_1 = 2;\ OZ_2 = 2,\ PW_2 = 8;\ OZ_3 = 3,\ PW_3 = 18\ \ldots.$$

Man gelangt hier zu der äufserst einfachen diophantischen Gleichung:

$$2t^2 = s.$$

Dieser Gleichung entspräche dann weiter:

$$t = 0,\ s = 0;\ t = \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{8};\ t = \frac{1}{2},\ s = \frac{1}{2};$$
$$t = \frac{3}{4},\ s = 1{,}125.$$

Ist man erst zu einer ***umfassenden*** *Gleichung gelangt, so findet man für jeden willkürlich angenommenen Wert von t oder s einen (oder mehrere), durch die Gleichung gegebene, Werte von s oder t.*

Das Ziel der Untersuchung ist in jedem Falle der Nachweis einer bestimmten Gleichung zwischen OZ und PW.

Für die Herleitung einer solchen Gleichung müssen bestimmte Beziehungen zwischen **einzelnen** Wert-Paaren (OZ_i, PW_i) gegeben sein, aus denen man auf eine **allgemeine** Beziehung zwischen den Werten jedes Paares (OZ, PW) schliefsen darf.

Solche Beziehungen zwischen ***einzelnen*** *Werte-Paaren, welche z. B. für Übungs-Aufgaben willkürlich angenommen werden können, müssen bei Bewegungen, welche in der Natur gegeben sind, durch Beobachtung ermittelt werden.*

---

1) Dabei ist zu bemerken, dafs W zu einer bestimmten Zeit nur an einem Orte sein kann, dafs aber derselbe Ort in verschiedenen Zeit-Momenten erreicht werden kann.

Dabei kommt das induktiv-deduktive Verfahren der Erfahrungs-Wissenschaften zur Geltung. Aus einzelnen Beobachtungen sucht man eine allgemeine Beziehung herzuleiten, welche man wiederum an einzelnen Beobachtungen zu prüfen hat, wobei dieselbe eventuell umzugestalten ist etc.

Wenn z. B. nur $t = 2$, $s = 17$ *und* $t = 3$, $s = 34$ *durch Beobachtung gegeben ist, so wird die Annahme* $s = (t - 1)\ 17$ *genügen um für* $t = 2$ *und* $t = 3$ *die Werte* $s = 17$ *und* $s = 34$ *herzuleiten.*

Findet man nun aufserdem $t = 4$, $s = 57$, *so sieht man sich veranlafst, entweder der neuen Beobachtung zu mifstrauen oder die gemachte Annahme aufzugeben, da die Beobachtung* ($t = 4$, $s = 57$) *und das Gesetz* ($t = 4$, $s = 51$) *nicht mit einander im Einklang sind.*

Bestätigt sich nun die Beobachtung und findet man aufserdem für $t = 5$ *den Wert* $s = 86$, *so wird das anfänglich angenommene Gesetz für fehlerhaft konstruiert gelten müssen.*

Die s-Reihe 17, 34, 57, 86, welche der t-Reihe 2, 3, 4, 5 entspricht, liefert aber die Differenzen 17, 23, 29 und deutet demnach auf eine arithmetische Reihe 2ter Ordnung hin, deren allgemeines Glied $s = 17 + 14\,n + 3\,n^2$ *durch die Substitution* $n = t - 2$, *in* $s = 3\,t^2 + 2\,t + 1$ *übergeht. Dieses Gesetz, welches alle bisher gegebenen Werte-Paare umfafst, mufs nun wiederum an den Beobachtungen geprüft werden etc.*

Es bleibt noch übrig zu zeigen, inwiefern das hier eingeführte Mafs OZ durch die gebräuchliche Zeit-Messung, also im besonderen durch die Ablesung an Uhren, zu irgend welchen Längen-Mafsen PW in Beziehung gesetzt werden kann.

3.

Es wurde schon im Eingange bemerkt, dafs die Bahn von Z durchaus nicht als grade Linie angenommen werden mufste, während eine grade Zeit-Bahn für die Anschauung allerdings zunächst vom Vorteil ist.

Wenn man von einer Graden ausgeht und sich dieselbe als völlig biegsam vorstellt, so kann man aus dieser einfachsten Form unter Erhaltung aller übrigen Annahmen durch Verbiegungen eine unendliche Schar anderer Formen herleiten.

Man kann z. B. eine horizontale Grade, rechts und links von O, gleichmäfsig nach unten hin zur Form einer Parabel gekrümmt denken, so dafs deren aufsteigender Ast (links) für O die Vergangenheit bezeichnet, während ihr absteigender Ast (rechts) für O die Zukunft darstellt.

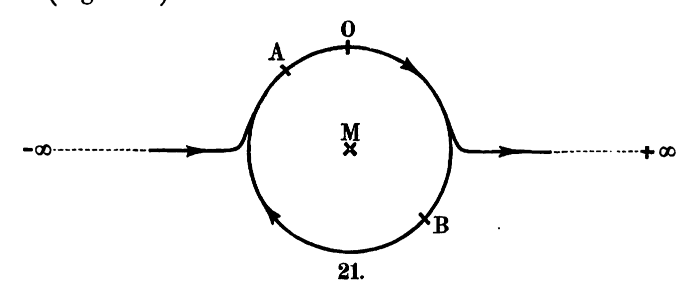
Man kann auch eine vertikale Grade, oben und unten von O, gleichmäfsig als Schrauben-Linie gewickelt denken, so dafs der untere Teil für O die Vergangenheit darstellt, während der obere Teil für O die Zukunft bezeichnet.

In beiden Fällen ist dann für Z der Sinn des Fortschreitens, welcher dem Flusse der Zeit entspricht, eindeutig gegeben.

Unter allen möglichen Verbiegungen der geraden Zeit-Bahn ist eine Art von hervorragender Bedeutung, weil dieselbe das unbegrenzt unendliche Kontinuum in ein unbegrenzt endliches Kontinuum verwandelt und daher eine volle Darstellung dieser Verhältnisse in irgend welchem physischen Material (z. B. als Zeichnung auf Papier etc.) gestattet. Wenn man nämlich eine geschlossene Kurve z. B. einen Kreis beschreibt, welcher die gerade Zeit-Bahn in O berührt und erst den „Ast O . . . . $+\infty$“ und dann den „Ast O . . . . $-\infty$“ auf die Peripherie dieses Kreises so aufgewickelt denkt, daſs die ganze Grade in einheitlichem Sinne gewunden erscheint, so wird der Punkt Z die Kreislinie stets in demselben Sinne durchlaufen und dabei mit dem festen Punkte O unendlich viele Male zusammenfallen. *Dieselbe Vorstellung ergiebt sich, wenn man die gerade Zeit-Bahn zu einer Schraubenlinie aufgewickelt und deren einzelne Windungen auf einander gepreſst denkt.*

Jeder ganze Umgang des Punktes Z, d. h. jeder Übergang von O zu O giebt eine bestimmte Zeit-Dauer an, welche für Messungen als Einheit gewählt werden kann, da sie für alle Umgänge denselben Wert hat.

Während eines Umganges wird die Zeit-Dauer durch den, von O aus bereits zurückgelegten, oder durch den, noch bis O zurückzulegenden, Bogen ZO gemessen, so daſs man bei **jeder** Zeit-Bestimmung (AB) mit dem Abzählen eine Reihe von ganzen Umläufen (n) und mit zwei Bogen-Messungen (AO und OB) auskommt (Figur 21).



21.

Bei einer gewöhnlichen Uhr mit **einem** Zeiger sind die hier dargestellten Verhältnisse ausgeführt. Wenn **ein** Umgang des Zeigers **einer** Stunde entspricht, so liefern die Bogen AO und OB Bruchteile einer Stunde.

Für die Bogen-Messung sind Teil-Striche angebracht, welche mit Zahlen versehen sind. Einteilung und Numerierung entsprechen der üblichen Zeit-Messung, d. h. Sekunden, Minuten, Stunden etc. *Bei einer Uhr mit mehreren Zeigern wird auſserdem das Abzählen der ganzen Umgänge erspart, indem das Räderwerk*

bei jedem vollen Umgange des ersten Zeigers einen zweiten Zeiger um einen Teilstrich verschiebt, um vielleicht wiederum bei jedem vollen Umfange des zweiten Zeigers einen dritten Zeiger um einen Teilstrich weiter rücken zu lassen etc.

Da nun jede Zeit-Messung im allgemeinen durch die Kreis-Bewegung der Spitze eines Uhrzeigers vermittelt wird, deren einzelne Umgänge in ihrer Gesamtheit der geraden Zeit-Bahn in einer bestimmten Form der Verbiegung entsprechen, so rechtfertigt sich auch im allgemeinen die oben ausgesprochene Behauptung, daſs die Bewegung eines Punktes W auf seiner Bahn dargestellt wird, indem man dieselbe mit der Bewegung von Z vergleicht.

In den Wasseruhren entspricht bei cylindrischem Gefäſse das Fallen oder Steigen eines Wasserspiegels, welcher eine abflieſsende Wassermenge begrenzt, der Bewegung von Z. Von den Sanduhren gilt analoges.

Da auſserdem jede Zeit-Messung in letzter Instanz auf den Sterntag zurückweist, bei dessen Feststellung die scheinbare Kreis-Bewegung eines Fixsternes (Z) und sein Durchgang durch einen bestimmten Punkt (O) des Meridianes in Frage kommt, so ist die in Rede stehende Behauptung vollständig gerechtfertigt.

Dem kreisenden Fixstern Z, auf dessen Bahn der Meridian einen bestimmten Punkt O feststellt, entspricht die kreisende Spitze eines Uhrzeigers, auf deren Bahn ein fester Punkt O als Marke vorhanden ist.

Für die Vergleichung irgend einer in der Natur gegebenen Bewegung mit der maſsgebenden Bewegung werden in verschiedenen Fällen verschieden geartete Beobachtungsmittel notwendig sein, wobei es sich stets darum handeln wird, die Zusammengehörigkeit von einzelnen Werte-Paaren ($O Z_i$, $P W_i$) **mittelbar** festzustellen, wenn dieselbe nicht unmittelbar gefunden werden kann.

Für die Erläuterung einer solchen Vergleichung ist die **Atwoodsche Fallmaschine** von hoher Bedeutung, zumal hier die gesuchte Zusammengehörigkeit fast unmittelbar gefunden werden kann.

Erfahrungsmäſsig steht fest, daſs an der Erdoberfläche zwei Körper von gleicher Masse, welche an den beiden Enden eines über eine Rolle geführten, sonst aber frei beweglichen Fadens befestigt sind, in Ruhe bleiben, während unter übrigens gleichen Umständen zwei Körper von verschiedener Masse in Bewegung geraten.

Wenn man zwei Körper (I und II) von gleicher Masse (m_1 und m_2) in der angegebenen Weise vor einer vertikalen Skala aufhängt und auſserdem eine Reihe von Körpern konstruiert denkt, deren Massen (μ_1, μ_2, μ_3 . . . μ_n) gegen die Massen (m_1 und m_2) der befestigten Körper relativ klein sind, so hat man denjenigen Teil einer Atwoodschen Maschine im Schema[1]) hergestellt, welcher zur Messung von $P W_i$ verwendbar ist (Figur 22).

1) Das Gefüge komplicierter Maschinen durch einfache Schemata dem Verständnisse des Schülers zu erschlieſsen, scheint eine immer noch nicht genugsam

Der andere Teil, welcher die Messung von OZ_i ermöglichen soll, besteht aus einer Uhr, die mit Hülfe eines Schlagwerkes für das Ohr des Beobachters immer nach Ablauf derselben kleinen Zeit-Dauer ein Zeichen giebt, so dafs man nicht gleichzeitig Zifferblatt und Skala zu übersehen gezwungen ist.

Wenn es unmöglich scheint in demselben Momente verschiedene Teilungen zu übersehen, deren Reihen doch gleichzeitig abgelesen werden sollen, so mufs man Übertragungen eintreten lassen, welche das unter diesen Verhältnissen Unmögliche unter anderen Bedingungen möglich machen.

Belastet man nun den Körper II, nachdem die Lage (W_1) eines seines Punktes W auf der Skala abgelesen wurde [1]), durch einen der Zusatzkörper μ_i, so hängt auf der einen Seite z. B. die Masse $m_2 + \mu_i$, während auf der andern Seite die Masse m_1 angebracht ist. Hält man das System während der Belastung in der ursprünglichen Lage fest, bis ein Schlag des Uhrwerks ertönt, so beginnt die Bewegung mit dem Anfange einer bestimmten, durch die Uhr angezeigten, Zeit-Dauer τ, deren Ende durch einen zweiten Schlag bezeichnet wird. Wenn man nun für jeden Schlag die Lage von W abliest, so erhält man eine Reihe von Werte-Paaren (OZ_i, PW_i), wobei zu bemerken ist, dafs der erste Schlag einem Zeit-Moment OZ_1, der zweite dem Zeit-Momente $OZ_2 = OZ_1 + \tau$, der dritte dem Zeit-Moment $OZ_3 = OZ_1 + 2\tau$ etc. entspricht.

22.

Wenn das Uhrwerk z. B. Sekunden schlägt, und man $PW_1 = 0{,}045$ m, $PW_2 = 0{,}170$ m, $PW_3 = 0{,}545$ m, $PW_4 = 1{,}170$ m findet, so hat man $W_1W_2 = 0{,}125$ m, $W_1W_3 = 0{,}500$ m, $W_1W_4 = 1{,}125$ m und $Z_1Z_2 = 1''$, $Z_1Z_2 = 2''$, $Z_1Z_3 = 3''$ gegeben. Man schliefst demnach, da

$$W_1W_2 = 1 \cdot \frac{1}{8}\ m,\quad W_1W_3 = 4 \cdot \frac{1}{8}\ m,\quad W_1W_4 = 9 \cdot \frac{1}{8}\ m$$

ist, auf ein Gesetz

$$W_1W_i = \frac{1}{8}(Z_1Z_i)^2,\ d.\,h.\ auf\ (s - PW_1) = \frac{1}{8}(t - OZ_1)^2.$$

Dieses Gesetz, welches durch Verlegung der Anfangs-Punkte

---

beachtete Forderung zu sein. Was die Technik der Ausführung anlangt, so ist dieselbe am Modell sehr leicht und durch Zeichnungen sehr schwer begreiflich zu machen.

1) Der Versuch läfst sich auch anders anordnen.

auf die Form $s' = \frac{1}{8}(t')^2$ *gebracht werden kann, ist nun des weiteren durch Beobachtungen zu prüfen.*

Dasselbe bestätigt sich übrigens in der Weise, dafs hier für jedes μ_i *eine Bewegung eintritt, für welche* $\frac{s}{t^2}$ *eine Konstante* $\left(z.\ B.\ \frac{1}{8}\right)$ *ist.*

In diesem einfachen Falle, welcher durch die Atwoodsche Maschine demonstriert werden kann, ist die Bahn von W eine vertikale Grade, welche zu den Skala-Reihen unter rechten Winkeln geneigt ist, während die Bahn von Z durch eine kreisende Uhrzeigerspitze angegeben wird.

Statt der letzten Bewegung kann man auch den Hin- und Hergang der Pendelspitze benutzen, wobei übrigens nur statt der kreisförmigen Bewegung deren Projektion verwandt wird.

Denselben einfachen Fall kann man auch dadurch erläutern, dafs man in gleichen Abständen σ an der Skala Glocken angebracht denkt, welche der bewegte Körper im Vorbeigehen zum Tönen bringt, während man selbst für jeden Glockenschlag auf dem Zifferblatte die Zeit abliest. Hier hat man, nachdem PW_1 festgestellt ist, $PW_2 = PW_1 + \sigma$, $PW_3 = PW_1 + 2\sigma$, $PW_4 = PW_1 + 3\sigma$ etc., d. h. $W_1W_2 = \sigma$, $W_1W_3 = 2\sigma$, $W_1W_4 = 3\sigma$ etc. zu setzen, während man Z_1Z_2, Z_1Z_3, Z_1Z_4 etc. proportional mit $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{2\sigma}$, $\sqrt{3\sigma}$ etc. findet.

Die Ausführung dieses Gedankenganges würde allenfalls ermöglicht, wenn an dem sinkenden oder steigenden Körper ein Metallstift angebracht wäre, welcher auf einer, in gleichen Abständen horizontal mit Metalldrähten durchzogenen, Holzskala gleitet: ein galvanischer Kontakt, welcher bei jeder Berührung von Stift und Draht ein Schlagwerk in Bewegung setzt, würde hier die Bewegung von W für das Ohr vermitteln, während das Auge die Bewegung von Z verfolgt.

Für weniger einfache Fälle, wo Vermittelungen der mannigfachsten Art notwendig sind, ist die Kenntnis allgemeiner Gesetze über den Zusammenhang zwischen je zwei beliebig herausgegriffenen Bahnstücken Z_iZ_k und W_iW_k von hoher Bedeutung.

§. 2. Die Reihe der Bahn-Inkremente.

Ein bestimmtes Stück der Bahn wird im allgemeinen [1]) in einem bestimmten Zeitteile durchlaufen; man spricht infolgedessen von zusammengehörigen Teilen der Bahn und der Zeit und drückt

1) Bewegungen, bei denen zu endlichen Bahnstücken unendlich kleine Zeitteile gehören, mögen von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben.

diese Zusammengehörigkeit, wo es nötig erscheint, durch Indices aus. Dabei macht sich das Bedürfnis geltend, Bahnstücke und Zeitteile, welche **nur** ihrer Gröfse nach bestimmt zu denken sind, in der Bezeichnung zu unterscheiden von solchen, bei welchen auch Lage und Sinn in Betracht zu ziehen ist. Erstere mögen durch s und t, letztere durch [s] und [t] dargestellt [1]) werden, so dafs s die Länge von [s] und t die Dauer von [t] zum Ausdruck bringt. *Unter diesen Voraussetzungen bedeutet z. B.* $[s_t]$ *ein vollkommen bestimmtes Stück* [s] *der Bahn, zu welchem der Zeitteil* [t] *gehört, während man umgekehrt unter* $[t_s]$ *einen vollkommen bestimmten Teil* [t] *der Zeit zu verstehen hat, in welchem das Bahnstück* [s] *zurückgelegt wird.*

Zerlegt man den Zeitteil [t], welcher zu einem bestimmten Stücke [s] der Bahn gehört, in n auf einander folgende Teilchen $[t_1]$, $[t_2]$ .... $[t_n]$ von **gleicher** [2]) Dauer τ, so entspricht denselben eine Reihe von auf einander folgenden Bahnstücken $[s_1]$, $[s_2]$ ... $[s_n]$, welche die zu [t] gehörige **Reihe der Bahn-Inkremente** [3]) heifsen mag.

Läfst man n mehr und mehr wachsen, so werden die Gröfsen $t_1, t_2 \ldots t_n$ und im allgemeinen [4]) auch die Gröfsen $s_1, s_2 \ldots s_n$ immer kleiner und kleiner .... dabei ist stets $n \cdot \tau = t$.

An der Grenze (d. h. für $\lim n = \infty$) erscheint das Bahnstück [s] in unendlich viele Stücke von unendlich kleiner Länge zerlegt. Man nennt dieselben Elemente des Bahn-Stückes [s] und bezeichnet ihre Gesamtheit in der gegebenen Aufeinanderfolge als die zu [t] gehörige **Reihe der elementaren Bahn-Inkremente.**

Während die auf einander folgenden Zeitteile $[t_1]$, $[t_2]$ ... $[t_n]$ der Bestimmung gemäfs alle von **gleicher** Dauer sind, wird die Reihe der Bahn-Inkremente — mögen dieselben von endlicher oder unendlich kleiner Länge sein — im allgemeinen **nicht** aus **gleichen** Gliedern bestehen.

Das **Gesetz einer Inkrementen-Reihe** (d. h. die Formel, welche aus jedem Gliede der Reihe das folgende Glied herzuleiten gestattet) wird durch die **Art** der zu untersuchenden Bewegung eindeutig bestimmt.

Es ist die Frage, unter welchen Umständen andererseits ein solches Gesetz dazu dienen kann, die Bewegung auf [s] **vollständig** darzustellen, d. h. die Lage des Punktes auf [s] für **jeden** Zeit-Moment (S. 146) anzugeben.

Wenn aufser dem Gesetze der Inkrementen-Reihe das erste Glied derselben (s_1) und die Anzahl (n) ihrer Glieder gegeben ist,

---

1) Im Hinblick auf spatium und tempus. Vergl. Schell, Theorie I, S. 10.

2) Wollte man dieser Zerlegung irgend ein anderes Gesetz zu Grunde legen, was vollkommen zulässig wäre, so würde man die Untersuchung unnötiger Weise verwickelter machen. Vergl. dagegen die Note 2 auf S. 11.

3) Statt der deutschen Bezeichnung „Zuwachs“ mag im Hinblick auf die Pluralbildung „Inkrement“ gewählt werden, was übrigens auch sonst üblich ist.

4) S. Anmerk. 1 S. 156.

so kann man die Lage des Punktes für den Endmoment[1]) jedes Zeitteiles aus der Reihe $[t_1]$, $[t_2]$ . . . . $[t_n]$ angeben, während für die dazwischen gelegenen Momente nichts bestimmt ist.

Man wird eine um so genauere Bestimmung erreichen, je gröfser die Anzahl (n) der gleichen Zeitteile ist und wird zu einer **vollständigen Bestimmung** gelangen, wenn man statt einer **beliebigen** Inkrementen-Reihe die **elementare** Inkrementen-Reihe wählt.

Der Umstand, dafs hier das erste (und ebenso jedes andere) Glied (s_1) unendlich klein ist, führt zu gewissen Schwierigkeiten, welche man dadurch umgeht, dafs man statt s_1, s_2 . . . . s_n die Verhältnisse $\frac{s_1}{\tau}$, $\frac{s_2}{\tau}$ . . . . $\frac{s_n}{\tau}$ betrachtet, welche endlich bleiben.

So wird man darauf geführt, Gröfsen einzuführen, welche sich als Quotienten aus Weglänge und Zeit-Dauer darstellen.

Die Zerlegung der Kreisperipherie in unendlich viele Teile von unendlich kleiner Länge ist aus der Elementar-Geometrie (Berechnung der Zahl π) bekannt. Eine solche Zerlegung ist für jede Kurve auf sehr verschiedene Weisen möglich. Bei dem Bewegungs-Probleme wurde dieselbe durch die Forderung gegeben zu Zeitteilen von gleicher Dauer die zugehörigen Bahnstücke zu bestimmen, welche im allgemeinen nicht von gleicher Länge sind.

Dafs Verhältnisse von unendlich kleinen Gröfsen endlich bleiben können, zeigt die Betrachtung eines systematisch erweiterten Bruches. Es ist z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{4\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^3}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \ldots\ldots \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Wenn n mehr und mehr wächst, so wird $3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *ebensowohl als* $4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *immer kleiner und kleiner. An der Grenze (d. h. für* $\lim n = \infty$*) werden Zähler und Nenner unendlieh klein und doch bleibt ihr Verhältnis endlich, nämlich* $\frac{3}{4}$.

Das Zeichen des Grenz-Überganges ***lim*** *ist ein Operations-Zeichen[2]) wie + und — etc. Es drückt die Forderung aus, eine Gröfse immer mehr wachsen oder immer mehr abnehmen zu lassen.*

Das Unendlich-Kleine ist ebensowenig anschaulich darstellbar, wie das Unendlich-Grofse, während man sich ein stets gesteigertes Wachstum ebensowohl wie eine immer gesteigerte Abnahme trotzdem denken kann.

---

1) Beziehungsweise Anfangs-Moment.

2) Abgeleitet von limes.

Wenn in irgend einem Rechnungs-Ausdrucke eine Gröfse n enthalten ist, welche man sich mehr und mehr gesteigert oder mehr und mehr verringert denken soll, so wird sich der Ausdruck s dabei bald in diesem, bald in jenem Sinne ändern. Unter dem Grenz-Wert (d. h. unter dem Werte an der Grenze der geforderten Steigerung oder Abnahme) des Ausdruckes hat man den Wert zu verstehen, dem sich der Ausdruck bei der durch lim bezeichneten Operation mehr und mehr nähert.

Um ein Abnehmen über alle Mafsen anzudeuten, wählt man das Zeichen 0, um ein Zunehmen über alle Mafsen anzudeuten, wählt man das Bild ∞ .... damit sind die Mittel für eine Darstellung der hier auftretenden Verhältnisse vollständig gegeben.

So stellt z. B. das Bild $\lim \left(\frac{1}{n}\right)_{n=0}$ *die Forderung dar in dem Bruche* $\frac{1}{n}$ *die Gröfse n mehr und mehr abnehmend zu denken und den Grenz-Wert dieses Wachsens, welcher hier durch ∞ bezeichnet werden mufs, festzustellen. So bezeichnet ferner das Zeichen* $\lim \left(\frac{1}{n}\right)_{n=\infty}$ *die Forderung in dem Bruche* $\frac{1}{n}$ *die Gröfse n mehr und mehr wachsend zu denken und den Grenz-Wert dieses Wachsens, welcher hier durch 0 bezeichnet werden mufs, festzustellen.*

Diese Verhältnisse treten schon in der Theorie der arithmetischen und geometrischen Reihen erster Ordnung auf, sobald es sich darum handelt, zu erforschen, ob die Wort-Verbindung „Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern“ überhaupt einen Sinn hat.

Bezeichnet man die Summe von n Gliedern $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n$ *einer Reihe mit* s_n, *so gelten für eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren Differenz d heifsen mag, die Formeln*[1]*:*

$$s_n = n \cdot u_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \text{ und } s_n = n \cdot u_n - \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$

Man überzeugt sich leicht, dafs hier $\lim (s_n)_{n=\infty}$ *zu dem Grenz-Werte ∞ führt, da* $s_n = \frac{n}{2}(2u_1 - d + n \cdot d)$ *beziehungsweise* $s_n = \frac{n}{2}(2u_n + d - n \cdot d)$ *gesetzt werden kann.*

Andrerseits gilt für eine geometrische Reihe erster Ordnung, deren Quotient q heifsen mag, die Summenformel:

$$s_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1 q^n}{1-q}.$$

1) Wenn man eine arithmetische Reihe stets in demselben Sinne verlaufen läfst, in welchem die Zahlen-Reihe verläuft, so gelangt man einerseits zu unendlichen Reihen mit Anfangs-Glied, andrerseits zu unendlichen Reihen mit End-Glied, während eine dritte Form aus der Komposition dieser beiden Formen resultiert.

Hier ist

$$lim\,(s_n)_{n=\infty} = lim\left(\frac{u_1}{1-q}\right)_{n=\infty} - lim\left(\frac{u_1\,q^n}{1-q}\right)_{n=\infty}.$$

Der erste Teil ist von n unabhängig, so dafs hier beim Wachsen oder Abnehmen von n keine Änderung eintritt.

Der zweite Teil hat die Form $\frac{u_1}{1-q}$ $lim\,(q^n)_{n=\infty}$.

Bezeichnet man den Zahlenwert von q, d. h. den absoluten Betrag dieser Gröfse durch $|q|$, *so gilt:*

Wenn $|q| < 1$ *ist, so nimmt* $|q|^n$ *ab, wenn n zunimmt und man hat* $lim\,(q^n)_{n=\infty} = 0$, *d. h.* $lim\,(s_n)_{n=\infty}$ *bleibt endlich.*

Wenn $|q| > 1$ *ist, so nimmt* $|q|^n$ *zu, wenn n wächst und man hat* $lim\,(q^n)_{n=\infty} = \infty$.

Wenn $|q| = 1$ *ist, so besteht die Reihe aus n gleichen Gliedern, so dafs auch hier* $lim\,(s_n)_{n=\infty} = \infty$ *ist.*

§. 3. Die Geschwindigkeit.

Wenn man die Länge s eines bestimmten Bahnstückes [s] durch die Dauer t des zugehörigen Zeit-Teiles [t] dividiert, so gelangt man zu einem Quotienten

$$\frac{s}{t} = \varphi_{[s]}.$$

Dieser Quotient, welcher die **mittlere Geschwindigkeit der Bewegung** für das Bahn-Stück [s] genannt wird und im allgemeinen für jedes [s] einen besonderen Wert hat, stellt eine **neue** von Längen- und Zeit-Einheiten durchaus verschiedene Einheit dar, welche sich als

$$\frac{\text{Länge}}{\text{Dauer}}$$

charakterisiert. Von der Längen-Einheit (Meile, Meter, Fufs etc.), durch welche man den Weg mifst und von der Zeit-Einheit (Jahr, Tag, Sekunde etc.), durch welche man die Zeit mifst, hängt die Einheit der Geschwindigkeit ab. Man hat z. B.

$$\frac{\text{Meile}}{\text{Minute}},\ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}},\ \frac{\text{Fufs}}{\text{Stunde}}\ \text{etc.}$$

als solche Einheiten der Geschwindigkeit gegeben.

Die **Dimension der Geschwindigkeit** ist $\mathbf{l \cdot t^{-1}}$.

*Die **Mafs-Zahl** der mittleren Geschwindigkeit für ein bestimmtes Stück [s] stellt sich dabei als ein Bruch dar, dessen Zähler durch die **Mafs-Zahl** der Länge von [s] in einer bestimmten Einheit und dessen Nenner durch die **Mafs-Zahl** der Dauer des zugehörigen [t] in einer bestimmten Einheit gebildet wird.*

Hat [s] eine Länge von 7 Metern, während das zugehörige [t] eine Dauer von 2 Sekunden besitzt, so hat man

$$\varphi_{[s]} = \frac{7}{2}\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 3{,}5\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}.$$

Ebenso wie es für die Umrechnung von Längen-Einheiten und für die Umrechnung von Zeit-Einheiten Reduktions-Formeln (z. B. 3,0784 Pariser Fufs = 3,1862 Rheinländer Fufs oder 86400 Sekunden Sternzeit = 86164 mittlere Sekunden) giebt, so giebt es auch bestimmte Formeln für die Umrechnung von Geschwindigkeits-Einheiten.

Diese Formeln entspringen stets aus Reduktions-Gleichungen für Längen- und Zeit-Einheiten. Da 1 Meter = 3,0784 Pariser Fufs und 1 mittlere Sekunde = $\frac{86400}{86164}$ *Sekunden Sternzeit ist, so ist:*

$$1 \frac{\text{Meter}}{\text{mittlere Sekunde}} = \frac{86164}{86400} \cdot 3{,}0784 \frac{\text{Pariser Fufs}}{\text{Sekunden Sternzeit}}.$$

Man kann nun jeder Reihe von Bahn-Inkrementen eine Reihe von mittleren Geschwindigkeiten

$$\frac{s_1}{\tau}, \frac{s_2}{\tau}, \ldots \frac{s_n}{\tau}$$

zuordnen. Das Gesetz dieser zugeordneten Reihe, deren Glieder im allgemeinen von einander verschieden sein werden, hängt mit dem Gesetze der Inkrementen-Reihe durch die Proportion

$$\varphi_{[s_1]} : \varphi_{[s_2]} = s_1 : s_2$$

zusammen.

Benutzt man die Reihe der elementaren Bahn-Inkremente, so gelangt man zu einer zugeordneten Reihe, deren Glieder als „mittlere Geschwindigkeiten in einem bestimmten Elemente der Bahn" zu bezeichnen sind. Für diese Gröfsen hat man einen kürzeren Ausdruck eingeführt, indem man auf die Verteilung der Bahn-Punkte auf den Bahn-Inkrementen Rücksicht nahm.

Bei einer beliebigen Inkrementen-Reihe sind zunächst die Punkte, welche auf den Inkrementen liegen, von den begrenzenden Punkten zu scheiden. Wenn man durch die Richtung des beweglichen Punktes die Richtung des durchlaufenen Inkrementes bestimmt denkt, so erscheint jeder begrenzende Punkt als Anfangs-Punkt des einen und als Endpunkt des andern von zwei benachbarten Inkrementen. Setzt man nun ein für alle Mal fest, dafs die begrenzenden Punkte durchweg als Endpunkte anzusehen sind, teilt man sie also immer dem bereits durchlaufenen Inkremente zu, so sind alle Punkte der Bahn in eindeutiger Weise auf die einzelnen Inkremente verteilt.

Unter dieser Voraussetzung darf man bei der Grenz-Betrachtung von der **Zusammengehörigkeit** eines **Punktes** der Bahn und eines **Elementes** der Bahn sprechen: das Element [a], dessen Endpunkt A ist, heifst das zu A gehörige Element.

Nun ist folgende Definition statthaft:

Die **mittlere Geschwindigkeit in dem zum Bahn-Punkte A gehörigen Elemente** wird **Wert der Geschwindigkeit im Punkte A** genannt.

Die Geschwindigkeit in einem Punkte der Bahn ist vollständig gegeben durch **Wert, Richtung** und **Situations-Punkt**, sie läſst sich infolge dessen durch eine Strecke von bestimmter **Länge** und **Richtung** und bestimmtem **Anfangs-Punkte** darstellen.

Der **Wert** der Geschwindigkeit in einem Bahn-Punkte **ist** die **mittlere** Geschwindigkeit im zugehörigen Bahn-Elemente, d. h. eine Anzahl von Geschwindigkeits-Einheiten $\left(\frac{\text{Länge}}{\text{Dauer}}\right)$.

Die **Richtung** der Geschwindigkeit in einem Bahn-Punkte **ist** die **Richtung** des zugehörigen Bahn-Elementes.

Der **Situations-Punkt** der Geschwindigkeit in einem Bahn-Punkte ist dadurch gegeben, daſs dieser **Bahn-Punkt** der zur Bezeichnung der Geschwindigkeit gewählten Strecke als **Ausgangs-Punkt** dient.

Von einer Richtung der „mittleren Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahn-Stücke“ zu sprechen, hat zunächst gar keinen Sinn. Für den Fall, daſs alle Elemente des Bahn-Stückes dieselbe Richtung haben, würde allerdings auch hier in übertragener Bedeutung von einer Richtung die Rede sein können, für jeden andern Fall aber müſste man neue Definitionen einführen.

Der Begriff der mittleren Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahn-Stücke korrespondiert dem Begriffe des Wertes der Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahn-Punkte, nicht aber dem Begriffe dieser Geschwindigkeit selbst. Unter einer bestimmten mittleren Geschwindigkeit hat man nur eine bestimmte Anzahl von Geschwindigkeits-Einheiten $\left(\frac{\textit{Länge}}{\textit{Dauer}}\right)$ *zu verstehen und eine solche Anzahl kann man zwar stets durch eine Anzahl von Längen-Einheiten, aber nicht immer durch eine Strecke von gegebener Länge und Lage darstellen.*

Es macht sich auch hier das Bedürfnis geltend, Geschwindigkeiten, welche **nur** ihrer Gröſse (d. h. dem Werte) nach bestimmt zu denken sind, in der Bezeichnung zu unterscheiden von solchen, bei welchen auch Lage und Richtung in Betracht zu ziehen ist. Erstere mögen durch v, letztere durch [v] dargestellt werden [1]), so daſs v den Wert von [v] zum Ausdruck bringt.

Eine besondere Rolle spielt die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt ein bestimmtes Bahn-Stück betritt, im Gegensatz zu der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt dasselbe verläſst. Erstere wird die, zu [s] beziehungsweise [t] gehörige, **Anfangs-Geschwindigkeit**, letztere wird die, zu [s] beziehungsweise [t], gehörige, **End-Geschwindigkeit** genannt; die Anfangs-Geschwindigkeit mag im allgemeinen durch [v_o], die End-Geschwindigkeit durch [v_t] bezeichnet werden.

---

1) Im Hinblick auf velocitas variabilis.

§. 4. Die Beschleunigungen und Verzögerungen.

Um ein Mafs für die Zunahme oder für die Abnahme des Geschwindigkeits-Wertes auf einem bestimmten, zum Zeit-Teile [t] gehörigen, Bahn-Stücke [s] zu haben, bildet man den Quotienten

$$\frac{v_t - v_0}{t} = \alpha_{[s]}.$$

Dieser Quotient, welcher die **mittlere Beschleunigung der Bewegung** oder die **mittlere Verzögerung der Bewegung** für das Bahn-Stück [s] genannt wird und im allgemeinen für jedes [s] einen besonderen Wert hat, stellt wiederum eine **neue**, von Längen-, Zeit- und Geschwindigkeits-Einheiten durchaus verschiedene Einheit dar, welche sich als

$$\frac{\text{Länge}}{(\text{Dauer}) \,.\, (\text{Dauer})}$$

charakterisiert. Von der Längen-Einheit (Meile, Meter, Fufs etc.), durch welche man den Weg mifst und von der Zeit-Einheit (Jahr, Tag, Sekunde etc.), durch welche man die Zeit mifst, hängt die Einheit dieser neuen Gröfse ab. Man hat z. B.

$$\frac{\text{Meile}}{(\text{Minute}) \,.\, (\text{Minute})}, \quad \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \,.\, (\text{Sekunde})}, \quad \frac{\text{Fufs}}{(\text{Stunde}) \,.\, (\text{Stunde})}, \text{ etc.}$$

als solche Einheiten der Beschleunigung oder Verzögerung gegeben.

Die **Dimension der Beschleunigung** ist $\mathbf{l \,.\, t^{-2}}$.

*Die **Mafs-Zahl** der mittleren Beschleunigung oder Verzögerung für ein bestimmtes Stück* [s] *stellt sich dabei als ein Bruch dar, dessen Zähler durch die **Mafs-Zahl** eines Geschwindigkeits-Wertes und dessen Nenner durch die Mafs-Zahl der Dauer eines Zeit-Teiles gebildet wird.*

Hat $[v_t]$ den Wert $9 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$, hat $[v_o]$ den Wert $4 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ und besitzt das zugehörige [t] eine Dauer von 2 Sekunden, so hat man

$$\alpha_{[s]} = \frac{9 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} - 4 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}}{2 \text{ Sekunden}} = \frac{5 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}}{2 \text{ Sekunden}} = 2{,}5 \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \,.\, (\text{Sekunde})}$$

Positive Werte von $\alpha_{[s]}$ heifsen **Beschleunigungen**, weil sie einer Zunahme der Geschwindigkeit entsprechen, **negative** Werte von $\alpha_{[s]}$ heifsen **Verzögerungen**, weil sie einer Abnahme der Geschwindigkeit entsprechen, Nullwerte von $\alpha_{[s]}$ deuten auf eine gewisse Konstanz der Geschwindigkeit hin.

Bei der Berechnung von $\alpha_{[s]}$ *mufs man des öfteren gegebene Einheiten reducieren.*

Bewegt sich z. B. irgend ein Punkt eines Schiffes am Anfange einer Stunde mit einer Geschwindigkeit, deren Wert $2{,}5\ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ *ist, am Ende derselben mit einer Geschwindigkeit, deren Wert* $16200\ \frac{\text{Meter}}{\text{Stunde}}$ *ist, so hat man sich zu fragen, ob man die mittlere Beschleunigung in* $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}$ *oder in* $\frac{\text{Meter}}{(\text{Stunde})\,.\,(\text{Stunde})}$ *angeben will. Im ersteren Falle hat man die Reduktions-Gleichung 1 Stunde = 3600 Sekunden, im letzteren Falle hat man die Reduktions-Gleichung 1 Sekunde =* $\frac{1}{3600}$ *Stunde zu benutzen. So ergiebt sich:*

$$\alpha_{[s]} = \frac{16200\ \frac{\text{Meter}}{\text{Stunde}} - 2{,}5\ \frac{\text{Meter}}{\frac{1}{3600}\ \text{Stunde}}}{1\ \text{Stunde}} =$$

$$\frac{16200\ \frac{\text{Meter}}{\text{Stunde}} - 9000\ \frac{\text{Meter}}{\text{Stunde}}}{1\ \text{Stunde}} = 7200\ \frac{\text{Meter}}{(\text{Stunde})\,.\,(\text{Stunde})}$$

oder

$$\alpha_{[s]} = \frac{16200\ \frac{\text{Meter}}{3600\ \text{Sekunden}} - 2{,}5\ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}}{3600\ \text{Sekunden}} =$$

$$\frac{4{,}5\ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} - 2{,}5\ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}}{3600\ \text{Sekunden}} = \frac{1}{1800}\ \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}$$

Übrigens folgt aus der Proportion:
$(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde}) : (\text{Stunde})\,.\,(\text{Stunde}) = 1 : (3600)\,.\,(3600)$
die Reduktions-Gleichung

$$\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})} : \frac{\text{Meter}}{(\text{Stunde})\,.\,(\text{Stunde})} = \frac{1}{12\,960\,000}.$$

Demnach mufs $7200 : \frac{1}{1800} = 12\,960\,000 : 1$ *sein, wie auch die Rechnung zeigt.*

Wollte man nun weiter zu $\frac{\text{Pariser Fufs}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}$ *übergehen, so hätte man 1 Meter = 3,0784 Pariser Fufs anzusetzen, d. h. man hätte* $1\ \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})} = 3{,}0784\ \frac{\text{Pariser Fufs}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}.$

Man kann nun jeder Reihe von Bahn-Inkrementen eine Reihe von mittleren Beschleunigungen oder Verzögerungen zuordnen.

Wenn man die Werte v_0 und v_t (d. h. die Anfangs- und End-Geschwindigkeiten) für die einzelnen Bahn-Stücke $[s_i]$ mit p_i und q_i bezeichnet, so ist die mittlere Beschleunigung, beziehungsweise die Verzögerung im 1ten, 2ten . . . nten Bahn-Stück gegeben als:

$$\frac{q_1 - p_1}{\tau}, \frac{q_2 - p_2}{\tau}, \dots\dots \frac{q_n - p_n}{\tau}.$$

Benutzt man die Reihe der elementaren Bahn-Inkremente, so gelangt man zu einer zugeordneten Reihe, deren Glieder als „mittlere Beschleunigungen in einem bestimmten Elemente der Bahn“ zu bezeichnen sind. Für diese Gröſsen hat man einen kürzeren Ausdruck eingeführt, indem man wiederum auf die oben angegebene Verteilung der Bahn-Punkte auf den Bahn-Inkrementen zurückgreift.

Es ist hier folgende Definition statthaft: Die **mittlere Beschleunigung oder Verzögerung in dem zum Bahn-Punkte A gehörigen Elemente wird Wert der Beschleunigung oder Verzögerung im Punkte A genannt.**

Die Beschleunigung oder Verzögerung in einem Punkte der Bahn ist vollständig gegeben durch **Wert, Richtung** und **Situations-Punkt**, sie läſst sich infolge dessen durch eine Strecke von bestimmter **Länge** und **Richtung** und bestimmtem **Anfangs-Punkte** darstellen.

Hier ist der Punkt, wo man sich von der Doppel-Bezeichnung „Beschleunigung oder Verzögerung“ losmachen kann, indem man festsetzt, daſs Verzögerungen als „negative Beschleunigungen“ der eigentlichen Beschleunigungen, welche stets positiv sind, entgegengestellt werden.

Der **Wert** der Beschleunigung in einem Bahn-Punkte **ist** die **mittlere** Beschleunigung im zugehörigen Bahn-Elemente, d. h. eine Anzahl von Beschleunigungs-Einheiten $\left(\frac{\text{Länge}}{(\text{Dauer}\,.\,\text{Dauer})}\right)$.

Die **Richtung** der Beschleunigung in einem Bahn-Punkte **ist** die **Richtung** des zugehörigen Bahn-Elementes.

Der **Situations-Punkt** der Geschwindigkeit in einem Bahn-Punkte ist dadurch gegeben, daſs dieser **Bahn-Punkt** der zur Bezeichnung der Beschleunigung gewählten Strecke als **Ausgangs-Punkt** dient.

Es ist auch hier zu betonen, daſs der Begriff der mittleren Beschleunigung in einem beliebigen Bahn-Stücke dem Begriffe des Wertes der Geschwindigkeit in einem beliebigen Bahn-Punkte korrespondiert.

Es macht sich auch hier das Bedürfnis geltend, Beschleunigungen, welche **nur** ihrer Gröſse (d. h. dem Werte) nach bestimmt zu denken sind, in der Bezeichnung zu unterscheiden von solchen,

bei welchen auch Lage und Richtung in Betracht zu ziehen ist. Erstere mögen durch a, letztere durch [a] dargestellt werden[1]), so dafs a den Wert von [a] zum Ausdruck bringt.

Eine besondere Rolle spielt die Beschleunigung, mit welcher der Punkt ein bestimmtes Bahn-Stück betritt, im Gegensatz zu der Beschleunigung, mit welcher der Punkt dasselbe verläfst. Erstere wird die zu [s] beziehungsweise [t] gehörige **Anfangs-Beschleunigung**, letztere wird die zu [s] beziehungsweise [t] gehörige **End-Beschleunigung** genannt; die Anfangs-Beschleunigung mag im allgemeinen durch $[a_0]$, die End-Beschleunigung durch $[a_t]$ bezeichnet werden.

Das Verfahren, welches von $\varphi_{[s]}$ über [v] zu $\alpha_{[s]}$ führt, kann offenbar in analoger Weise fortgesetzt werden.

Durch die Definition

$$\frac{a_t - a_0}{\tau} = \alpha^{II}{}_{[s]}$$

gelangt man zunächst von $\alpha_{[s]}$ über [a] zu einer Gröfse $\alpha^{II}{}_{[s]}$, welche den Zuwachs oder die Abnahme des Beschleunigungs-Wertes auf einem bestimmten, zum Zeit-Momente [t] gehörigen Bahnstücke [s] darstellt.

Wenn man die Gröfse $\alpha^{II}{}_{[s]}$ als mittlere ***Beschleunigung zweiter Ordnung*** *der Gröfse $\alpha_{[s]}$ entgegenstellt, welche dann als mittlere Beschleunigung erster Ordnung zu bezeichnen ist, so erkennt man einerseits in $\varphi_{[s]}$ die mittlere Beschleunigung nullter Ordnung, während man andrerseits des weiteren zu einer unendlichen Reihe von mittleren Beschleunigungen $\alpha^{III}{}_{[s]}$, $\alpha^{IV}{}_{[s]}$, $\alpha^{V}{}_{[s]}, \ldots$ gelangt. Man hätte dann $\varphi_{[s]}$ als $\alpha^{0}{}_{[s]}$ und $\alpha_{[s]}$ als $\alpha^{I}{}_{[s]}$ einzuführen, um die ganze Reihe*

$$\alpha^{0}{}_{[s]},\ \alpha^{I}{}_{[s]},\ \alpha^{II}{}_{[s]},\ \alpha^{III}{}_{[s]},\ \ldots.$$

in ihrem Anfange darzustellen.

Dieser Reihe von „mittleren Beschleunigungen" korrespondiert bei elementarer Teilung eine Reihe von Beschleunigungen für die einzelnen Bahn-Punkte, deren Werte als

$$a^0,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III}, \ldots.$$

einzuführen sind.

Diese Beschleunigungen höherer Ordnung, deren Dimensionen von der Form $l \,.\, t^{-\lambda}$ sind, können durch ***Strecken*** *dargestellt werden, weil ihnen* ***Wert, Richtung*** *und* ***Situations-Punkt*** *zukommt.*

Alle diese Verhältnisse sollen an der Bewegung eines Bahnzuges veranschaulicht werden.

An den Böschungen der Schienen-Stränge befinden sich gewöhnlich in Entfernungen von 100 Meter zu 100 Meter Zählsteine, welche ganze Kilometer und Zehntel von Kilometern abzulesen gestatten. Eine Person, welche sich auf dem Zuge befindet, ver-

---

1) Im Hinblick auf acceleratio.

mag ohne Schwierigkeit mit Hülfe des Sekundenzeigers einer Taschenuhr zu bestimmen, in welcher Zeit die einzelnen Hektometer durchlaufen werden.

Findet man z. B. für eine Reihe von Hektometern beziehungsweise 15″, 14″, 14″, 12″, 10″, 11″, 13″, 15″, so sind die mittleren Geschwindigkeiten für diese einzelnen Bahn-Stücke in $\frac{\textit{Meter}}{\textit{Sekunde}}$ *beziehungsweise*

$$\frac{100}{15}, \frac{100}{14}, \frac{100}{14}, \frac{100}{12}, \frac{100}{10}, \frac{100}{11}, \frac{100}{13}, \frac{100}{15}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit nimmt also vom ersten bis zum fünften Hektometer zu, um dann vom fünften bis zum achten Hektometer wieder abzunehmen.

Hier bestimmt man die Zeitteile, welche **gleichen Bahnstücken** entsprechen, während die obigen Betrachtungen fordern, dafs man für **gleiche Zeitteile** die zugehörigen Bahnstücke beobachte.

Dieser Forderung könnte man bei dem gewählten Beispiele genügen, wenn zwischen den einzelnen Hektometer-Steinen von Meter zu Meter Marken irgend welcher Art (z. B. Stangen) angebracht wären, so dafs man die Anzahl der Meter, welche in der Sekunde scheinbar vorbeilaufen, durch einfaches Abzählen finden könnte.

Wenn z. B. von Meter zu Meter im allgemeinen kleine, nach Ablauf von je 5 Metern aber gröfsere und nach Ablauf von je 10 Metern noch gröfsere Stangen aufgestellt wären, während die Hektometer durch Steine bezeichnet würden, so hätte man eine vollständige Skala gegeben, an welcher sich das Auge eines Vorüberfahrenden vorbeibewegte.

Um nun eine **Bahn-Inkrementen-Reihe** festzustellen, hätte man z. B. von 5 Sekunden zu 5 Sekunden die Anzahl der scheinbar vorüberlaufenden Meter-Steine festzustellen und eventuell Bruchteile abzuschätzen.

Eine solche Messung liefse sich in der That durchführen, wenn eine Person notierte, während eine zweite die verfliefsenden Zeit-Teile von je 5 Sekunden laut vorzählte und eine dritte die vorüberlaufenden Meter in gleicher Weise behandelte.

Die Schwierigkeiten, welche sich dem gleichzeitigen Beobachten verschiedener Gröfsen entgegenstellen, müssen beim physikalischen Arbeiten auf mannigfache Weise überwunden werden: in dem hier skizzierten Falle würde das laute Vorzählen der verfliefsenden Zeitteile das Schlagwerk einer Uhr ersetzen, durch welches also ein Beobachter ersetzt wird.

Das Resultat solcher Messungen und der anschliefsenden Rechnungen mag in der folgenden Tabelle vorliegen.

Sekunden.	Meter.	$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden.}}$	$\frac{\text{Meter}}{\text{(Sek.) . (Sek.).}}$	$\frac{\text{Meter}}{\text{(Sek.) . (Sek.) . (Sek).}}$
$t_1 = 0 \ldots 5$	$s_1 = 35$	$\varphi_1 = 7{,}0$	$\alpha_1 = \; ?$	$\beta_1 = \; ?$
$t_2 = 5 \ldots 10$	$s_2 = 35$	$\varphi_2 = 7{,}0$	$\alpha_2 = \; 0{,}00$	$\beta_2 = \; ?$
$t_3 = 10 \ldots 15$	$s_3 = 36$	$\varphi_3 = 7{,}2$	$\alpha_3 = +0{,}04$	$\beta_3 = +0{,}008$
$t_4 = 15 \ldots 20$	$s_4 = 37$	$\varphi_4 = 7{,}4$	$\alpha_4 = +0{,}04$	$\beta_4 = \; 0{,}000$
$t_5 = 20 \ldots 25$	$s_5 = 38$	$\varphi_5 = 7{,}6$	$\alpha_5 = +0{,}04$	$\beta_5 = \; 0{,}000$
$t_6 = 25 \ldots 30$	$s_6 = 40$	$\varphi_6 = 8{,}0$	$\alpha_6 = +0{,}08$	$\beta_6 = +0{,}008$
$t_7 = 30 \ldots 35$	$s_7 = 40$	$\varphi_7 = 8{,}0$	$\alpha_7 = \; 0{,}00$	$\beta_7 = -0{,}016$
$t_8 = 35 \ldots 40$	$s_8 = 40$	$\varphi_8 = 8{,}0$	$\alpha_8 = \; 0{,}00$	$\beta_8 = \; 0{,}000$
$t_9 = 40 \ldots 45$	$s_9 = 42$	$\varphi_9 = 8{,}4$	$\alpha_9 = +0{,}08$	$\beta_9 = +0{,}016$
$t_{10} = 45 \ldots 50$	$s_{10} = 41$	$\varphi_{10} = 8{,}2$	$\alpha_{10} = -0{,}04$	$\beta_{10} = -0{,}024$
$t_{11} = 50 \ldots 55$	$s_{11} = 39$	$\varphi_{11} = 7{,}8$	$\alpha_{11} = -0{,}08$	$\beta_{11} = -0{,}008$
$t_{12} = 55 \ldots 60$	$s_{12} = 37$	$\varphi_{12} = 7{,}4$	$\alpha_{12} = -0{,}08$	$\beta_{12} = \; 0{,}000$

Der Bequemlichkeit wegen ist in der Tabelle β_i statt α^{II}_i eingeführt worden.

Bei der Berechnung der Tabelle ist angenommen, dafs eine Zerlegung der Bahn, welche dem Zeit-Teile $\tau = 5''$ entspricht, innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung als elementare Zerlegung angesehen werden darf.

Damit ist gesagt, dafs φ_i als Geschwindigkeits-Wert im Punkte W_i zu gelten hat und dafs also $\alpha_i = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\tau}$ anzusetzen ist.

Damit ist aufserdem gesagt, dafs α_i als Beschleunigungs-Wert erster Ordnung (I. O.) im Punkte W_i zu gelten hat und dafs also $\alpha^{II}_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\tau}$ anzusetzen ist.

Ferner ist z. B. $\beta_6 = \alpha^{II}_6 = \frac{\alpha_6 - \alpha_5}{\tau} = \frac{0{,}08 - 0{,}04}{5}$, während α_6 als $\frac{\varphi_6 - \varphi_5}{\tau} = \frac{8{,}0 - 7{,}6}{5}$ und α_5 als $\frac{\varphi_5 - \varphi_4}{\tau} = \frac{7{,}6 - 7{,}4}{5}$ resultierte.

Analoges gilt für α^{III}, α^{IV}, etc.

Es mag betont werden, dafs α^I_1, ferner α^{II}_1 und α^{II}_2, ferner α^{III}_1, α^{III}_2 und α^{III}_3, etc. unbestimmt bleiben, weil die Werte s_i, welche s_1 vorausgehen, nicht bekannt sind.

§. 5. Die Reihen der Beschleunigungs-Inkremente.

Wenn man für jedes Glied einer Bahn-Inkrementen-Reihe die mittlere Beschleunigung pter Ordnung feststellt, so gelangt man zu einer bestimmten Reihe von mittleren Beschleunigungen, welche sich beim Übergange zur Grenze (elementare Teilung) in

die Reihen der entsprechenden Beschleunigungs-Werte für die einzelnen Bahn-Punkte verwandelt.

Da jede mittlere Beschleunigung von der Ordnung $p + 1$ aus je zwei Werten der Beschleunigung von der Ordnung p gerade so gebildet wird, wie jede mittlere Beschleunigung von der Ordnung p aus je zwei Werten der Beschleunigung von der Ordnung $p - 1$, so steht zu vermuten, daſs für den Zusammenhang der einzelnen Reihen gewisse Gesetze bestehn, welche alle auf die Bahn-Inkrementen-Reihe zurückweisen.

Wenn man den Zeit-Teil [t] in n aufeinander folgende Zeit-Teile $[t_1]$, $[t_2]$, ... $[t_n]$ von gleicher Dauer $[\tau]$ zerlegt, so wird das zu [t] gehörige Bahn-Stück $W_0 W_n$ in n Teile zerlegt, welche durch die Punkte W_0, W_1, W_2 . . . W_{n-1}, W_n begrenzt werden mögen.

Die Differenzen

$$PW_1 - PW_0,\ PW_2 - PW_1 \ldots PW_n - PW_{n-1}$$

stellen die Reihe der Bahn-Inkremente dar, welche als

$$[s_1],\ [s_2],\ \ldots\ldots\ [s_n]$$

eingeführt wurde.

Die Division durch τ^1 führt zur Reihe der mittleren Beschleunigungen von der Ordnung 0, d. h. zu der Reihe der mittleren Geschwindigkeiten: die Gröſsen s^1 und $\frac{s_1}{\tau}$ sind einander proportional.

Die **erste** Differenzen-Reihe von s_1, s_2, ... s_n lautet

$$s_2 - s_1,\ s_3 - s_2,\ \ldots\ s_{n-1} - s_{n-2},\ s_n - s_{n-1}.$$

Die Division durch die **erste** Potenz von τ liefert eine Inkrementen-Reihe, deren einzelne Glieder sich als Geschwindigkeits-Werte $\left(\frac{\text{Länge}}{\text{Dauer}}\right)$ charakterisieren:

$$\frac{s_2 - s_1}{\tau},\ \frac{s_3 - s_2}{\tau},\ \ldots\ldots\ \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{\tau},\ \frac{s_n - s_{n-1}}{\tau}.$$

Beim Grenz-Übergange (d. h. für elementare Teilung) erhält man z. B. für

$$\lim \left(\frac{s_3 - s_2}{\tau}\right) = \lim \left(\frac{s_3}{\tau} - \frac{s_2}{\tau}\right) = \lim \left(\varphi_{[s_3]} - \varphi_{[s_2]}\right).$$

den Wert $\tau \,.\, a^I{}_{[s_3]}$.

Daraus folgt: Die **erste** Differenzen-Reihe einer Bahn-Inkrementen-Reihe geht in die **Reihe der elementaren Geschwindigkeits-Inkremente** über, wenn man jedes ihrer Glieder durch die **erste** Potenz von τ dividiert und zur Grenze übergeht.

Daſs die einzelnen Glieder der hier abgeleiteten Reihe den Beschleunigungs-Werten (I. O.) in den einzelnen Bahn-Punkten proportional sind soll ausdrücklich bemerkt werden.

Die **zweite** Differenzen-Reihe von s_1, s_2, . . . s_n lautet

$$(s_3 - s_2) - (s_2 - s_1),\ (s_4 - s_3) - (s_3 - s_2),\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (s_n - s_{n-1}) - (s_{n-1} - s_{n-2}).$$

Die Division durch die **zweite** Potenz von τ liefert eine Inkrementen-Reihe, deren einzelne Glieder sich als Beschleunigungs-Werte $\frac{\text{Länge}}{(\text{Dauer}) \, . \, (\text{Dauer})}$ charakterisieren.

Beim Grenz-Übergange (für elementare Teilung) erhält man z. B. für

$$\lim \left(\frac{(s_4 - s_3) - (s_3 - s_2)}{\tau^2} \right) = \lim \left(\frac{\frac{s_4 - s_3}{\tau} - \frac{s_3 - s_2}{\tau}}{\tau} \right) =$$

$$\lim \left(\frac{\varphi_{[s_4]} - \varphi_{[s_3]}}{\tau} - \frac{\varphi_{[s_3]} - \varphi_{[s_2]}}{\tau} \right) = \lim (\alpha_{[s_3]} - \alpha_{[s_2]})$$

den Wert $\tau \, . \, a^{II}{}_{[s_3]}$.

Daraus folgt:

1. Die **zweite** Differenzen-Reihe einer Bahn-Inkrementen-Reihe geht in die **Reihe der elementaren Beschleunigungs-Inkremente erster Ordnung** über, wenn man jedes ihrer Glieder durch die **zweite** Potenz von τ dividiert und zur Grenze übergeht.

2 Die hier entspringende Reihe ist zugleich die **erste**, durch die **erste** Potenz von τ geteilte, Differenzen-Reihe der **Reihe der elementaren Geschwindigkeits-Inkremente.**

3. Die einzelnen Glieder der Reihe sind proportional den Beschleunigungs-Werten II. O. in den einzelnen Bahn-Punkten.

Bildet man die **dritte** Differenzen-Reihe der Bahn-Inkremente
$[(s_4 - s_3) - (s_3 - s_2)] - [(s_3 - s_2 - s_2 - s_1)] \ldots\ldots\ldots\ldots$
$[(s_n - s_{n-1}) - (s_{n-1} - s_{n-2})] - [(s_{n-1} - s_{n-2}) - (s_{n-2} - s_{n-3})]$
und dividiert dieselbe durch die **dritte** Potenz von τ, so gelangt man beim Grenz-Übergange zu einer Reihe von Elementar-Inkrementen, welche sich als $\frac{\text{Länge}}{(\text{Dauer}) \, . \, (\text{Dauer}) \, . \, (\text{Dauer})}$ charakterisieren.

Nun ist z. B.

$$\lim \left(\frac{[(s_4 - s_3) - (s_3 - s_2)] - [(s_3 - s_2) - (s_2 - s_1)]}{\tau^3} \right) =$$

$$\lim \left(\frac{\frac{(s_4 - s_3) - (s_3 - s_2)}{\tau^2} - \frac{(s_3 - s_2) - (s_2 - s_1)}{\tau^2}}{\tau} \right) =$$

$$\lim \left(\frac{\alpha_{[s_3]} - \alpha_{[s_2]}}{\tau} - \frac{\alpha_{[s_2]} - \alpha_{[s_1]}}{\tau} \right) = \lim (\alpha^{II}{}_{[s_3]} - \alpha^{II}{}_{[s_2]}) = \tau \, . \, \alpha^{III}{}_{[s_3]}.$$

Daraus folgt:

1. Die **dritte** Differenzen-Reihe einer Bahn-Inkrementen-Reihe geht in die **Reihe der elementaren Beschleunigungs-Inkremente** II. O. über, wenn man jedes ihrer Glieder durch die **dritte** Potenz von τ dividiert und zur Grenze übergeht.

2. Die hier entspringende Reihe ist zugleich die **erste**, durch die **erste** Potenz von τ geteilte, Differenzen-Reihe der Reihe der **elementaren Beschleunigungs-Inkremente** (I. O.) und die

zweite, durch die **zweite** Potenz von τ geteilte, Differenzen-Reihe der **Reihe der elementaren Geschwindigkeits-Inkremente** (Beschleunigung nullter O.).

3. Die einzelnen Glieder der Reihe sind proportional den **Beschleunigungs-Werten III. O.** in den einzelnen Bahn-Punkten.

Beachtet man, dafs die Reihe s_1, s_2, ... s_n als nullte Differenzen-Reihe ihnen selbst erscheint, so gelangt man zu dem zwar selbstverständlichen, aber doch in gewissem Sinne abschliefsenden Satze:

Die nullte Differenzen-Reihe einer Bahn-Inkrementen-Reihe geht in die Reihe der elementaren Bahn-Inkremente über, wenn man jedes ihrer Glieder (die übrigens dem Geschwindigkeits-Werte in den einzelnen Bahn-Punkten proportional sind) durch die nullte Potenz von τ dividiert und zur Grenze übergeht.

Allgemein hat man nun:

1. Die **nte Differenzen-Reihe der Bahn-Inkrementen-Reihe** geht in die **Reihe der elementaren Beschleunigungs-Inkremente von der Ordnung n — 1** über, wenn man jedes ihrer Glieder durch die **nte** Potenz von τ dividiert und zur Grenze übergeht.

2. Die hier entspringende Reihe ist zugleich die **kte**, durch die **kte** Potenz von τ geteilte, Differenzen-Reihe der **Reihe der elementaren Beschleunigungs-Inkremente von der Ordnung n — k — 1.**

3. Die einzelnen Glieder der Reihe sind proportional den **Beschleunigungs-Werten von der Ordnung n** in den einzelnen Bahn-Punkten.

Um diesen allgemeinen Satz streng zu begründen, nimmt man an, dafs er für irgend eine Zahl p gelte und zeigt, dafs er bei dieser Annahme auch für $p + 1$ gilt. Da nun für $p = 1, 2, 3$ die Gültigkeit nachgewiesen ist, so behält der Satz auch noch für $3 + 1 = 4$ und darum auch für $4 + 1 = 5$ etc., d. h. für n seine Geltung.

Der Schlufs von p auf $p + 1$ ist für Nr. 1 leicht. Von hier gelangt man zu Nr. 2 durch folgende Überlegung. Die Reihe der elementaren Beschleunigungs-Inkremente von der Ordnung m entsteht nach Nr. 1 aus der $(m + 1)$ten Differenzen-Reihe der Bahn-Inkrementen-Reihe bei Division durch τ^{m+1}, so dafs noch eine $(n - m - 1)$malige Differenzen-Bildung bei einer Teilung durch τ^{n-m-1} notwendig ist, wenn man von der Ordnung m aus zur nten Differenzen-Reihe der Bahn-Inkrementen-Reihe gelangen w i l l.

Soll man demnach durch kmalige Differenzen-Bildung $(k = n - m - 1)$ zum Ziele gelangen, so mufs man von einer Reihe von der Ordnung $m = n - k - 1$ ausgehn.

Nr. 3 ist durch die bekannten Definitionen und durch Nr. 1 und Nr. 2 erledigt.

Wenn man nun beachtet, dafs die Reihe s_1, s_2, ... s_n selbst als erste Differenzen-Reihe der Gröfsen (s), d. h. von

$$PW_1,\ PW_2,\ \ldots .\ PW_n$$

erscheint, so gestaltet sich das oben dargelegte Theorem folgendermafsen:

1. Die **nte Differenzen-Reihe des Weges** — so mag PW_1, $PW_2 \ldots . PW_n$ kurz genannt werden — geht in die **Reihe der Beschleunigungs-Werte von der Ordnung n — 1** über, wenn man jedes ihrer Glieder durch die nte Potenz von τ dividiert und zur Grenze übergeht.

2. Die hier entspringende Reihe ist zugleich die **kte,** durch die **kte** Potenz von τ geteilte Differenzen-Reihe der **Beschleunigungs-Werte von der Ordnung n — k — 1.**

Man findet sofort nach dem früheren Satze: Die $(n + 1)$te Reihe des Weges geht in die Reihe der elementaren Beschleunigungs-Inkremente von der Ordnung $n - 1$ über, wenn man jedes ihrer Glieder durch τ^n dividiert und zur Grenze übergeht.

Eine Division durch τ^{n+1} führt zu den Beschleunigungs-Werten von der Ordnung n.

Wenn man nun in der Formel, welche bei irgend einer Bewegung die Bahnlänge (s) und die Zeit-Dauer (t) $\left(\text{z. B. durch } s = v\ .t + a\ .\frac{t^2}{2}\right)$ verbindet, für t der Reihe nach $(k - 1)\tau$, $k\tau$, $(k + 1)\tau$, $(k + 2)\tau \ldots .$ einsetzt, so erhält man die Weglängen W_oW_{k-1}, W_oW_k, W_oW_{k+1}, $W_oW_{k+2} \ldots .$ und gelangt damit zu den Bahn-Inkrementen

$$s_k = W_oW_k - W_oW_{k-1},\ s_{k+1} = W_oW_{k+1} - W_oW_k,$$
$$s_{k+2} = W_0W_{k+2} - W_0W_{k+1} \ldots .$$

und zu den Geschwindigkeiten

$$\frac{s_k}{\tau} = \varphi[s_k],\ \frac{s_{k+1}}{\tau} + \varphi[s_{k+1}],\ \frac{s_{k+2}}{\tau} = \varphi[s_{k+2}] \ldots .$$

Ein Grenz-Übergang führt von den mittleren Geschwindigkeiten (φ) zu den Geschwindigkeits-Werten (v), d. h. zu einer Formel für v_t.

Bildet man die erste Differenzen-Reihe von s_k, s_{k+1}, $s_{k+2} \ldots$ so gelangt man zuerst durch eine Division mit τ^1 zu den Geschwindigkeits-Inkrementen und dann von da durch eine zweite Division mit τ^1 zu den mittleren Beschleunigungen.

Aus s_k, s_{k+1}, $s_{k+2} \ldots .$ bildet man

$$\frac{s_{k+1} - s_k}{\tau^2} = \alpha[s_k],\ \frac{s_{k+2} - s_{k+1}}{\tau^2} = \alpha[s_{k+1}] \ldots .$$

Ein Grenz-Übergang führt von den mittleren Beschleunigungen (α) zu den Beschleunigungs-Werten (a), d. h. zu einer Formel für a_t.

Dasselbe Ergebnis läfst sich auch durch einmalige Differenz-Bildung von v_t aus erreichen.

Setzt man in der Formel, welche v und t (z. B. durch $v_t = v_o + a\ .t$) verbindet für t der Reihe nach $k\tau$, $(k + 1)\tau$, $(k + 2)\tau \ldots .$ so erhält man die Geschwindigkeits-Werte

$$\lim(\varphi[s_k]),\ \lim(\varphi[s_{k+1}]),\ \lim(\varphi[s_{k+2}]) \ldots .$$

Man kann nun

$$\lim\left(\frac{\varphi[s_k+1]-\varphi[s_k]}{\tau}\right) = \lim(\alpha[s_k+1]) = (a[s_k+1])$$

unmittelbar bilden.

Die zweite Differenzen-Reihe von $s_1, s_2 \ldots . s_n$ und ebenso die zweite Differenzen-Reihe von v_t oder auch die erste Differenzen-Reihe von a_t führen zu α^{II} und a^{II} etc.

Für $s = t.v_0 + \frac{t^2}{2}.d$ *stellt sich die Rechnung so:*

$t = i.\tau$	$s = W_0 W_i$	s_i
$(k-1)\tau,$	$(k-1)\tau v_0 + (k-1)^2 \frac{\tau^2}{2}.d$	$s_k = m - \frac{\tau^2}{2}.d$
$k\tau,$	$k\tau v_0 + k^2 \frac{\tau^2}{2}.d$	$s_{k+1} = m + \frac{\tau^2}{2}.d$
$(k+1)\tau,$	$(k+1)\tau v_0 + (k+1)^2 \frac{\tau^2}{2}.d$	$s_{k+2} = m + 3.\frac{\tau^2}{2}.d$
$(k+2)\tau,$	$(k+2)\tau v_0 + (k+2)^2 \frac{\tau^2}{2}.d$	

In der letzten Kolonne ist $\tau.v_0 + k\,\tau^2.d$ *der Kürze wegen durch* m *bezeichnet worden.*

Man hat nun: $\lim\left(\frac{s_k}{\tau}\right) = v_0 + (k.\tau)d = v_0 + t.d = v_t.$

$$\lim\left(\frac{s_{k+1}-s_k}{\tau^2}\right) = d = a^I.$$

$$\lim\left(\frac{[s_{k+2}-s_{k+1}]-[s_{k+1}-s_k]}{\tau^3}\right) = a^{II} = 0.$$

Ferner hat man für $v_t = v_0 + t.d$ *folgendes Schema:*

$t = i.\tau$	$v = \lim(\varphi[s_i]$
$k\tau$	$v_0 + k\tau d$
$(k+1)\tau$	$v_0 + (k+1)\tau d$

Man hat: $\lim\left(\frac{\varphi[s_{k+1}]-\varphi[s_k]}{\tau}\right) = a^I = d.$

Wenn man irgend einen Rechnungs-Ausdruck in t das eine Mal für $t = m + \tau$ und das andere Mal für $t = m$ berechnet, wenn man ferner die Differenz der beiden so erhaltenen Ausdrücke durch τ dividiert und wenn man endlich den Grenz-Wert der so geschaffenen Gröfse für abnehmendes τ herzustellen sucht, so nennt man den dabei zuletzt entstandenen Rechnungs-Ausdruck, falls derselbe einen bestimmten Wert erhält [1]), die **Ableitung** des gegebenen Ausdrucks (nach t) für $t = m$.

1) Diese Einschränkung ist im Hinblick auf die Frage der Differenzierbarkeit der Funktionen höchst notwendig.

Man kann also abkürzend sagen:

Die Gröfse v ist die Ableitung der Gröfse s, die Gröfse a^{I} ist die Ableitung der Gröfse v und die zweimal hinter einander berechnete Ableitung der Gröfse s, die Gröfse a^{II} ist die Ableitung der Gröfse a^{I}, die zweimal hinter einander berechnete Ableitung der Gröfse v und die dreimal hinter einander berechnete Ableitung der Gröfse s. Analoges gilt für a^{III}, a^{IV} etc.

In der Differenzial-Rechnung wird ein Verfahren angegeben, welches die Ableitung jedes Ausdruckes, falls dieselbe überhaupt existiert, herzuleiten gestattet.

Wenn z. B. die Gröfse s als Summe aus Potenzen von t gegeben ist, so kann man die ein für alle Mal festgestellte Ableitungsregel für Potenzen benutzen, um v zu entwickeln.

Die Regel für die Ableitung von Potenzen stellt man dar, wie folgt:

Der gegebene Ausdruck sei t^λ.

Man hat für $t = m$ die Ableitung von t^λ gegeben als:

$$A = lim \left(\frac{[m + \tau]^\lambda - m^\lambda}{\tau}\right).$$

Die Entwicklung nach dem binomischen Satze liefert:

$$lim \left(\frac{m^\lambda + \lambda \,.\, \tau \,.\, m^{\lambda - 1} + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \tau^2 \,.\, m^{\lambda - 2} + \ldots - m^\lambda}{\tau}\right) =$$

$$lim (\lambda \,.\, m^{\lambda - 1} + \tau \,.\, H) = \lambda \,.\, m^{\lambda - 1}.$$

Beim Grenz-Übergange bleibt nur $\lambda \,.\, m^{\lambda - 1}$ stehen, d. h. die Ableitung von t^λ für $t = m$ ist $\lambda \,.\, m^{\lambda - 1}$.

Setzt man $m = t$, so resultiert $\lambda \,.\, t^{\lambda - 1}$.

Dieses Theorem, welches zunächst nur für ganz positive Exponenten entwickelt werden kann, gilt ganz allgemein.

Als ein zweites Beispiel soll die Ableitung der Gröfse $\sin t$ berechnet werden. Man hat:

$$A = \left(\frac{\sin(m + \tau) - \sin m}{\tau}\right) = lim \left(\cos\left(m + \frac{\tau}{2}\right) \,.\, \frac{\sin \frac{\tau}{2}}{\frac{\tau}{2}}\right)$$

Der Bruch $\dfrac{\sin \frac{\tau}{2}}{\frac{\tau}{2}}$ nähert sich (geometrische Konstruktion) bei abnehmendem τ der Grenze 1, d. h. die Ableitung von $\sin t$ für $t = m$ ist $\cos m$.

Setzt man $m = t$, so resultiert $\cos t$.

Ebenso findet man die Gröfse $- \sin m$ als Ableitung von $\cos t$ für $t = m$.

Man kann den gegebenen Ausdruck im Gegensatz zu seiner **Ableitung** den Ableitungs-Stamm [1]) oder kurz den **Stamm** nennen.

Der **Übergang vom Stamm zur Ableitung** und der **Übergang von der Ableitung zum Stamm** sind zwei Rechnungs-Operationen, welche in der Reihe

$$s,\ v,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III}\ \ldots\ldots$$

die Beziehungen je zweier Nachbarglieder regeln, so daſs der Übergang von links nach rechts dem Hingange zur Ableitung und der Übergang von rechts nach links dem Rückgange zum Stamme entspricht.

Die Wissenschaften, welche diese beiden Operationen auszuführen lehren und auſserdem dabei entspringende Fragen in Angriff nehmen, heiſsen beziehungsweise Differenzial- und Integralrechnung, sie werden in ihrer Vereinigung Infinitesimal-Kalkül genannt.

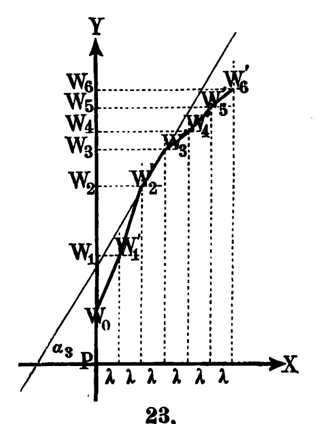
§. 6. Die graphische Darstellung der Bewegungs-Verhältnisse.

Wenn man die Bahn eines Punktes in Inkremente teilt, so liefert die Vergleichung derselben ein um so genaueres Bild der Bewegung, je enger die begrenzenden Punkte bei einander liegen, d. h. je kleiner τ ist.

Giebt man der Bahn, nachdem man die Inkrementen-Reihe aufgetragen, durch Verbiegung die Gestalt einer Graden PY, so kann man die Punkte W_1, W_2 .... W_n normal zu diesen, beziehungsweise um bestimmte Strecken λ, 2λ .... $n\lambda$ verschieben.

Projiciert man die verschobenen Punkte sowohl auf die Grade PY als auf deren Normale PX, so bilden diese beiden Linien ein Koordinaten-System, in welchem die verschobenen Punkte durch die ursprünglichen Längen PW_1, PW_2 ..... PW_n und durch die Längen λ, 2λ .... $n\lambda$ bestimmt sind.

Die Reihe der verschobenen Punkte, welche W'_1, W'_2 ... W'_n heiſsen mag, liefert ein Polygon, dessen Seiten auf der einen Achse (PY) die Projektionen s_1, s_2 ... s_n und auf der andern Achse (PX) die Projektionen λ, λ ... λ liefern. (Figur 23).



23.

Demnach sind die Tangenten der Winkel (α_1), welche

$$W_0W'_1,\ W'_1W'_2\ \ldots\ W'_{n-1}Z'_n$$

beziehungsweise mit PX bilden, proportional zu $\frac{s_1}{\lambda}$, $\frac{s_2}{\lambda}$ .... $\frac{s_n}{\lambda}$, d. h. proportional zu den mittleren Geschwindigkeiten in

$$W_0W_1,\ W'_1W'_2\ \ldots\ W'_{n-1}W_n.$$

Das **Wegpolygon** $W_0\,W'_1$, W'_2 ... W'_n geht bei elementarer Teilung in die

1) Im Hinblick auf Stamm-Funktion.

Wegkurve [1]) der Bewegung über, so dafs die Polygonseiten

$W_0 W'_1,\ W'_1 W'_2 \ldots . W'_{n-1} W'_n$

die Richtungen einer Reihe von auf einander folgenden Tangenten bezeichnen.

Nennt man PX und PY beziehungsweise Zeit- und Wegachse, so darf man sagen:

Die **Tangente der Wegkurve** mifst die **Geschwindigkeit der Bewegung** durch ihre **Neigung** [2]) gegen die **Zeitachse.**

Um die Wegkurve darzustellen, führt man ein zweiachsiges Koordinaten-System ein.

Auf der einen Achse konstruiert man eine Punkt-Reihe $W_0 W_1 W_2 \ldots . . W_n$, *welche in ihren Teilungsverhältnissen* ($W_0 W_1 = s_1,\ W_1 W_2 = s_2 \ldots . W_{n-1} W_n = s_n$) *die Bahn-Inkrementen-Reihe abbildet, während man auf der andern Achse zur Darstellung des Zeitenflusses in gleichen Abständen Punkte* $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots . Z_n$ *einführt.*

Je zwei Parallelen zu den Achsen, welche durch entsprechende Punkte Z_i *und* W_i *gehen, schneiden sich in einem Punkte* W'_i *der Wegkurve.*

Indem man die einzelnen Punkte $W'_0, W'_1, W'_2 \ldots . W'_n$ *durch gerade Linien verbindet, gelangt man zu einem Polygon, welches die Wegkurve um so genauer darstellt, je enger man die Teilung angenommen.*

Wenn man nach denselben Principen die **Geschwindigkeitskurve** der Bewegung konstruiert, d. h. wenn man statt der Bahn-Inkremente Strecken verwendet, welche den Inkrementen der Geschwindigkeits-Werte proportional sind, so gelangt man zu dem Satze:

Die **Tangente der Geschwindigkeitskurve** mifst die **Beschleunigung der Bewegung** durch ihre **Neigung** gegen die **Zeit-Achse.**

Wenn man auf Normalen zur Z-Achse in den Punkten $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots . . Z_n$ *Strecken abträgt, welche beziehungsweise die zugehörigen Geschwindigkeits-Werte darstellen, so gelangt man zu derselben Kurvenkonstruktion.*

Projiciert man nämlich die Endpunkte der Normalen auf die Geschwindigkeits-Achse (die hier an die Stelle der Weg-Achse tritt), so entsteht auf dieser eine Punkt-Reihe, welche in ihren Teilungsverhältnissen die Reihe der Geschwindigkeits-Inkremente darstellt.

Analoge Sätze gelten für die **Beschleunigungskurven** jeder Ordnung.

Dabei sind stets die Inkremente der Beschleunigungs-Werte einer bestimmten Ordnung zu verwenden.

---

1) Die hier gegebene Einführung der Wegkurve soll den üblichen Verwechselungen (Bahn und Wegkurve) vorbeugen.

2) Dargestellt durch die Tangente des Schnittwinkels.

Man gelangt hier in der Reihe s, a^0, a^I, a^{II} . . . . von einem Gliede stets zum benachbarten Gliede und zwar durch einen Übergang von links nach rechts.

Andererseits erhebt sich die Frage, ob die **Geschwindigkeitskurve** auch eine **Darstellung des Weges** gestattet.

Es ist zu untersuchen, ob die obige Konstruktion auch zu Sätzen führt, denen in der Reihe s, a^0, a^I, a^{II} . . . ein Übergang von rechts nach links entspricht.

Man erinnert sich hier wohl ohne weiteres an die beiden oben skizzierten Übergänge „Stamm . . . Ableitung“ und „Ableitung . . . Stamm“.

Aus $\frac{s_1}{\tau} = \varphi_1$, $\frac{s_2}{\tau} = \varphi_2 \ldots\ldots \frac{s_n}{\tau} = \varphi_n$ folgt sofort:

$$s = s_1 + s_2 + \ldots\ldots s_n = \tau\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_n).$$

Bei elementarer Teilung wird auf der rechten Seite die Summation einer unendlichen Reihe gefordert, welche des öfteren auch mit geringen Mitteln durchführbar ist.

Bildet die Gröfse φ_1, $\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$ z. B. eine arithmetische Reihe I. O., so ist

$$\varphi_1 = \varphi_1,\ \varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon,\ \varphi_3 = \varphi_1 + 2\,\varepsilon \ldots \varphi_n = \varphi_1 + (n - 1)\,\varepsilon.$$

Man hat dann:

$$s = \tau\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_n) = \tau\left(n\,.\,\varphi_1 + \frac{n\,(n-1)}{2}\,.\,\varepsilon\right).$$

Setzt man $n\,.\,\tau = t$, so erhält man

$$s = t\,.\,\varphi_1 + \frac{t^2}{2}\,.\,\frac{\varepsilon}{\tau} - t\,\tau\,.\,\frac{\varepsilon}{\tau}.$$

Für elementare Zerlegungen hat man

$$s = \lim\,(\tau\,[\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_n])_{\tau = o} =$$
$$\lim\left(t\,.\,\varphi_1 + \frac{t^2}{2}\,.\,\frac{\varepsilon}{\tau} - t\,\tau\,.\,\frac{\varepsilon}{\tau}\right)_{\tau = o}$$

zu setzen.

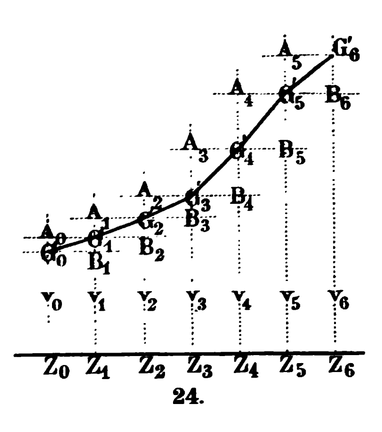
An der Grenze bleibt $\frac{\varepsilon}{\tau}$ jedenfalls endlich, weil auf der rechten Seite der Gleichung eine endliche Gröfse (s) steht, so dafs man hier ($\lim \tau = o$) zu der Formel

$$s = t\,.\,v_o + \frac{t^2}{2}\,.\,\frac{\varepsilon}{\tau}$$

gelangt.

Die **Summation**, welche nötig ist, um s aus $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ herzustellen, ist durch die Geschwindigkeitskurve **graphisch** dargestellt.

Die Fläche (F) zwischen der Zeitachse und der Geschwindigkeitskurve $G'_0\,G'_1 \ldots\ldots G'_n$ ist, wie aus Figur 24 ersichtlich, einerseits kleiner als die entsprechende durch $A_0\,G'_1\,A_1\,G'_2 \ldots\ldots\ldots \ldots A_{n-1}\,G'_n$ und andererseits gröfser als die entsprechende durch



24.

$G_0 B_1 G'_1 B_2 \ldots\ldots G'_{n-1} B_n$ begrenzte Fläche.

Die Fläche F_A, welche zum Polygon $A_0 \ldots G'_n$ gehört, ist:
$\tau(v_1 + v_2 + \ldots. v_{n-1} + v_n) = \tau(v_0 + v_1 + \ldots v_{n-1} + v_n) - \tau v_n$.

Die Fläche F_B, welche zum Polygone $G_0 \ldots B_n$ gehört, ist:
$\tau(v_0 + v_1 + v_{n-2} + v_{n-1}) = \tau(v_0 + v_1 + \ldots v_{n-1} + v_n) - \tau v_n$.

Die Gröfse F, welche für jede Einteilung zwischen F_A und F_B liegt, bestimmt sich dadurch, dafs

$$F_A - F_B = \tau\,(v_n - v_0)$$

an der Grenze für abnehmendes τ (d. h. bei elementarer Zerlegung) verschwindet, als

$$\lim (F_A) = \lim (\tau\,[v_1 + v_2 + \ldots. v_n])_{\tau=0} \quad .$$

oder als

$$\lim (F_B) = \lim (\tau\,[v_0 + v_1 + \ldots. v_{n-1}])_{\tau=0}.$$

Beide Ausdrücke stimmen mit $\lim (\tau\,[\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots. \varphi_n])$ überein, d. h. es ist

$$F = s.$$

Die **Fläche**, welche durch die **Geschwindigkeitskurve**, durch deren **Projektion auf die Zeit-Achse** und durch die beiden **projicierenden Strecken** begrenzt wird, mifst das zugehörige **Bahn-Stück.**

Wenn sich der Sinn der Geschwindigkeit für irgend eine Stelle (W_i) der Bahn ändert, d. h. wenn der Punkt in seiner Bewegung für einen Moment innehält, um dann umzukehren, so sind negative Geschwindigkeiten in Rechnung zu bringen. In diesem Falle würde man die Strecke, welche die negativen Geschwindigkeits-Werte darstellt, nach unten hin zu konstruieren haben.

Dem Momente des Innehaltens entspricht die Geschwindigkeit „Null“, d. h. hier wird die Zeit-Achse durch die Geschwindigkeitskurven geschnitten, welche nun unterhalb der Achse verläuft.

Wenn positive und negative Geschwindigkeiten in Rechnung zu bringen sind, so mufs man im positiven und im negativen Gebiete getrennt summieren, d. h. die entsprechenden Flächen der Betrachtung zunächst gesondert unterwerfen.

Analoge Sätze gelten für die Beschleunigungskurven jeder Ordnung.

Die entsprechende Fläche der Beschleunigungskurve erster Ordnung mifst z. B. die Geschwindigkeit.

In allen diesen Fällen, wo negative Glieder auftreten können, ist besondere Sorgfalt auf die Konstruktion (unterhalb der Zeit-Achse) und auf die darauf begründete Berechnung zu legen.

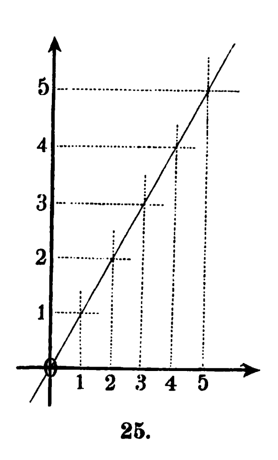
Zur Veranschaulichung dieser graphischen Darstellung mag eine Bewegung betrachtet werden, für welche gilt:

$$s = c \,.\, t.$$

Setzt man $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau \ldots p\tau$, *so wird* $s = 0, c\tau, 2c\tau, 3c\tau \ldots pc\tau$, *d. h. man hat*

$$s_1 = c\tau,\; s_2 = c\tau,\; s_3 = c\tau \ldots .$$

Die ***Wegkurve*** *ist hier (Figur 25) eine Grade: die Tangente der Kurve fällt stets mit der Graden selbst zusammen.*

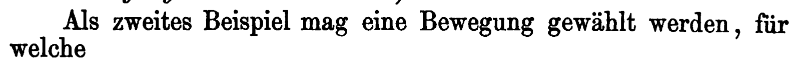


25.

Die Neigung gegen die Zeit-Achse ist hier überall dieselbe, d. h. die Geschwindigkeit ist konstant.

Die ***Geschwindigkeitskurve*** *ist hier eine Parallele zur Zeit-Achse, da man normal zu dieser stets dieselben Strecken zu errichten hat: die betreffende Fläche (Weg) ist immer als Differenz zweier Rechtecke darstellbar und infolgedessen proportional zu* $(p - q)\,\tau = r \,.\, \tau$.

Die ***Beschleunigungskurve*** *existiert nicht, da der Beschleunigungswert immer Null*[1]) *ist.*



Als zweites Beispiel mag eine Bewegung gewählt werden, für welche

$$s = a\,\frac{t^2}{2}$$

anzusetzen ist.

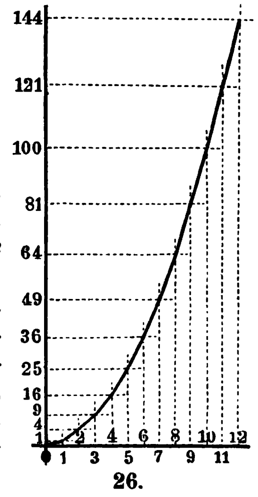
Für $t = o, \tau, 2\tau, 3\tau \ldots p\tau$ *erhält man*

$$s = 0, \frac{a}{2}, 4 . \frac{a}{2}, 9 . \frac{a}{2} \ldots p^2 \frac{a}{2},$$

d. h. man hat

$$s_1 = \frac{a}{2},\; s_2 = 3 . \frac{a}{2},\; s_3 = 5 . \frac{a}{2} \ldots$$

Um die ***Wegkurve*** *(Figur 26) zu konstruieren, hat man auf der Wegachse Strecken aufzutragen, welche den ungeraden Zahlen proportional sind: die resultierende Kurve heifst* ***Parabel.***



26.

Da $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ *proportional zu* $s_1, s_2, s_3 \ldots$ *ist, so hat man zur Konstruktion der Geschwindigkeitskurve in äquidistanten Punkten der Zeit-Achse Normalen, beziehungsweise von den Längen 1, 3, 5 … aufzutragen, wobei also die Geschwindigkeits-Inkremente proportional zu* $3 - 1 = 2$,

1) Man darf auch sagen: sie fällt mit der Zeit-Achse zusammen.

5 — 3 = 2 . . . . sind, d. h. die Geschwindigkeitskurve ist eine Grade, welche gegen die Zeit-Achse geneigt ist.

Die betreffende Fläche (Weg) ist immer als Differenz zweier Dreiecke darstellbar und wird infolgedessen proportional zu

$$\frac{p \cdot \tau^2}{2} - \frac{q \cdot \tau^2}{2} = r \cdot \frac{\tau^2}{2}.$$

Die Beschleunigungskurve ist eine Parallele zur Zeit-Achse.

Der Wert dieses graphischen Verfahrens tritt vorzüglich dann hervor, wenn für φ_1, φ_2, φ_3 . . . . oder für α_1, α_2, α_3 . . . . etc. Zahlen gegeben sind, welche sich nicht ohne weiteres durch einen Rechnungs-Ausdruck (diophantische Gleichung) zwischen s und t oder v und t etc. darstellen lassen.

Dieser Fall tritt bei der Behandlung der physischen Bewegungen äufserst oft ein, da hier zunächst nur einzelne Beobachtungen gegeben sind und deren Zusammenfassung durch einen bestimmten Rechnungs-Ausdruck durchaus nicht immer gelingt.

Man kann immer einzelne Punkte irgend einer Beschleunigungskurve konstruieren, so dafs also ein Polygonstück gegeben ist, welches innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung statt der Kurve benutzt werden kann.

Ist man z. B. im Stande, die Geschwindigkeitskurve einer Bewegung darzustellen, so vermag man durch den oben gegebenen Flächen-Satz auch das zugehörige Bahnstück zu messen.

Solche Flächen-Messungen geschehen, nachdem die Zeichnung ausgeführt worden ist, entweder durch bestimmte Instrumente (Planimeter) oder durch irgend ein Rechnungs-Verfahren, welches statt der gegebenen Kurve ein Sehnen-Polygon desselben verwendet.

In jedem Falle ist dann natürlich nur eine gewisse Annäherung zu erreichen, für welche ja aufserdem schon durch die Beobachtungsfehler bestimmte Grenzen gezogen sind.

§. 7. Gleichförmigkeit und Ungleichförmigkeit von Bewegungen.

1.

Die mafsgebende Bewegung des Punktes Z, zu welcher alle andern Bewegungen von Punkten in Beziehung zu setzen sind, wurde als **gleichförmige** Bewegung eingeführt.

Die hierin ausgesprochene Eigentümlichkeit des Zeitenflusses konnte nicht des näheren definiert werden, da das unmittelbare Innewerden derselben allen andern Bewegungs-Vorstellungen zu Grunde liegt.

Wenn der Flufs der Zeit durch ein Uhrwerk dargestellt wird, so ist auch die Bewegung der Zeigerspitze durch jene Eigentümlichkeit ausgezeichnet, welche wir der Bewegung von Z zuschreiben müssen.

Man wird zu Reihen gleichförmiger Bewegungen gelangen, wenn man sich Reihen von Uhren konstruiert denkt, welche alle den Flufs der Zeit in einer Zeiger-Bewegung zur Darstellung bringen.

Wenn dabei durch die Spitzen der Zeiger Kreise von den Radien r_1, r_2, r_3 . . . . r_n beschrieben werden, so werden alle Bogen derselben, welche von einem bestimmten Zeit-Momente aus gemessen werden, einander stets proportional bleiben.

Wenn man nun auf einer Reihe von Kurven C_1, C_2, C_3 . . . C_n von je einem festen Punkte (P_i) aus Bogen abgetragen denkt, welche stets mit jenem Kreisbogen in ihrer Länge übereinstimmen, so befinden sich auch deren Endpunkte (W_i) in gleichförmiger Bewegung und es ergiebt sich hier als Charakteristikum, dafs die Länge eines beliebig herausgegriffenen Bahnstückes stets der Zeit-Dauer proportional ist, welche bei dem Durchlaufen desselben verfliefst.

Demnach kann man unter Bezugnahme auf die nicht zu definierende Eigentümlichkeit des Zeitenflusses für alle anderen Bewegungen die Definition aufstellen: Wenn die Mafs-Zahlen der Länge von beliebig herausgegriffenen Stücken der Bahn durch die Mafs-Zahlen der Dauer der zugehörigen Zeitteile dividiert immer **dieselbe** Zahl liefern, so hat die Bewegung den Charakter, welcher dem Zeitenflusse eigentümlich ist, d. h. sie ist **gleichförmig.**

Wenn jene Division **nicht immer dieselbe** Zahl liefert, so wird damit eine **andere** Eigentümlichkeit der Bewegung festgestellt, d. h. dieselbe wird als eine nicht gleichförmige oder besser als eine **ungleichförmige** Bewegung erkannt.

Die Konstanz des Zahlen-Wertes der Division zeigt an, dafs die mittlere Geschwindigkeit $\left(\varphi_{[s]} = \frac{s}{t}\right)$ für alle Bahnstücke dieselbe Gröfse hat und dafs man daher hier von der mittleren Geschwindigkeit der ganzen Bewegung oder überhaupt von der **Geschwindigkeit der Bewegung** sprechen darf.

Bezeichnet [1]) man die Mafs-Zahl dieser Geschwindigkeit mit c, so hat man für jedes Bahnstück [s] die Gleichung

$$\frac{s}{t} = c$$

und demnach auch

$$s = c \, . \, t \text{ und } t = \frac{s}{c}.$$

Wenn das Stück $[s]$ *in seiner Lage als* $W_1 W_2 = P W_2 - P W_1$ *gegeben ist, so hat man für* $P W_2 = [s_p]$ *und* $P W_1 = [u]$ *die Bezeichnung* $[s] = [s_p] - [u]$.

Mifst man also die Bogen s *nicht von* W_1 *aus, sondern von* P *aus, so gilt die Formel:* $s_p = u + c \, . \, t$.

Für $t = o$ *ergiebt sich* $(s_p)_{t=o} = u$, *d. h. die Gröfse* u

1) Im Hinblick auf celeritas constans.

mifst von P aus denjenigen Punkt (W_1) ab, für welchen man die Zeit-Dauer t zu messen begann.

Wenn der Zeitteil [t] in seiner Lage als $Z_1 Z_2 = OZ_2 - OZ_1$ gegeben ist, so hat man für $OZ_2 = [t_o]$ und $OZ_1 = [w]$ die Beziehung $[t] = [t_o] - [w]$.

Mifst man also die Zeit-Dauer nicht von Z_1 aus, sondern von O aus, so gilt die Formel: $s = c.t_o - c.w$.

Für $s = o$ ergiebt sich $(t_o)_{s=o} = w$, d. h. die Gröfse w mifst von O aus denjenigen Punkt [Z_1) ab, für welcheu man die Weglänge t zu messen begann.

Geht man endlich bei der Messung von O und P aus, so hat man die Beziehung $s_p = c.t_o + (u - c.w)$ oder $\frac{s_p - u}{t_o - w} = c.$

Die Verlegung der Anfangs-Punkte führt also stets zu einer Formel:

$$s = c.t + constans.$$

Die **gleichförmige** Bewegung von W charakterisiert sich folgendermafsen.

1. In Zeitteilen von gleicher Dauer werden Bahnstücke von gleicher Länge durchlaufen.

2. Zu Bahnstücken von gleicher Länge gehören Zeitteile von gleicher Dauer.

3. Jede Reihe von Bahn-Inkrementen (einschliefslich der elementaren) ist eine arithmetische Reihe von der Ordnung Null, d. h. sie besteht aus lauter gleichen Gliedern.

4. Für alle Bahnstücke [s] ist $\varphi_{[s]} = \frac{s}{t} = c.$

Dabei ist $(s)_{t=1} = c$, d. h. die Mafs-Zahl der Geschwindigkeit ist gleich der Mafs-Zahl des in der Zeit-Einheit durchlaufenen Weges.

5. Mit Ausnahme von $\alpha^0_{[s]} = c$ ist jedes $\alpha_{[s]}$ und demnach auch jedes a Null.

Jeder dieser 5 Sätze enthält die **hinreichenden** und **notwendigen** Bedingungen für die Existenz einer gleichförmigen Bewegung und darum läfst sich immer der eine aus dem andern herleiten.

*Damit ist **nicht** gesagt, dafs dieser Charakter der Bewegung schon dadurch bedingt wird, dafs **einzelne** Werte-Paare (OZ_i, PW_i) z. B. dem sub 1 Geforderten genügen.*

*Die Formel $s = c.t$ fordert eine solche Bezeichnung für **alle** Werte-Paare.*

Was nun die **ungleichförmigen** Bewegungen anbelangt, so ist zunächst eine Einteilung derselben von Wichtigkeit.

Wenn für **jede** (d. h. auch für die Reihe der Elementar-Inkremente) Einteilung (n) eines Bahnstückes [s]

$$s_1 < s_2 < \ldots\ldots s_n$$

ist, so nennt man die Bewegung auf dem Bahnstücke [s] eine positiv beschleunigte oder kurzweg eine **beschleunigte** Bewegung, wenn dagegen für **jede** Einteilung (n)

$$s_1 > s_2 > \ldots\ldots s_n$$

ist, so nennt man die Bewegung auf dem Bahnstücke [s] eine negativ-beschleunigte oder kurzweg eine **verzögerte** Bewegung.

Die **Inkrementen-Reihe** ist bei der **beschleunigten** Bewegung eine **steigende**, bei der **verzögerten** Bewegung eine **fallende** Reihe.

Ein Gleiches gilt von der zugeordneten Reihe der Geschwindigkeiten.

Abgesehen von etwa vorhandenen gleichförmigen Abschnitten zerlegt sich eine ungleichförmige Bewegung stets in beschleunigte und in verzögerte Teilbewegungen.

2.

Fast alle in der Natur gegebenen Bewegungen sind ungleichförmige Bewegungen der verwickelsten Art.

Die fortschreitenden Bewegungen des Lichtes und unter gewissen Umständen auch die des Schalles dürfen im allgemeinen als gleichförmige Bewegungen angesehen werden.

Für die ersten ist im Mittel $c = 41\,000 \frac{\text{Meilen}}{\text{Sekunden}}$, für die letzteren ist im Mittel $c = 330 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}$ zu setzen.

Wenn der Blitz und der Knall eines an einem Orte A abgefeuerten Geschützes an einem andern Orte B mit einer Zeit-Differenz von t Sekunden wahrgenommen wird, so ist die Entfernung x von A und B von dem Lichte in der Zeit $\frac{x}{41\,000}$ *und von dem Schalle in der Zeit* $x \cdot \frac{7500}{330}$ *durchlaufen worden, so daſs man* $t = x\left(\frac{750}{33} - \frac{1}{41\,000}\right)$ *oder in Annäherung* $x = \frac{33}{750} \cdot t$ *Meilen setzen darf. Entfernung von Gewitterwolken.*

Als einziges Beispiel einer in der Natur gegebenen Bewegung von Charakter vollendeter Gleichförmigkeit dürfte die Rotation der Erde um ihre Achse hinzustellen sein, vorausgesetzt daſs sich die jetzt in Geltung stehende Annahme einer stetigen Verlängerung des Sterntages als unberechtigt erwiese.

Laplace hatte eine Untersuchung[1] *angestellt, welche zeigen sollte, daſs sich diese Rotations-Periode der Erde seit der Zeit*

1) Mécanique céleste. II, 347, III, 176 und V, 361.

Hipparchs nicht um $\frac{1''}{300}$ geändert habe, woraus allerdings nur folgt, dafs etwa auf 600 000 Jahre nicht mehr als 1'' mutmafsliche Änderung kommt.

Am Ende der fünfziger Jahre unseres Jahrhunderts hat Adams[1] *die Untersuchungen von Laplace geprüft, indem er die Säkular-Änderung der mittleren Länge des Mondes von neuem zu bestimmen suchte. Dabei scheint sich zu ergeben, dafs der Sterntag seit den Zeiten Hipparchs um $\frac{1''}{84}$ zugenommen hat*[2]*, so dafs etwa auf 16800 Jahre 1'' der Änderung kommen würde.*

Abgesehen von diesen Rechnungen führt auch die Überlegung, dafs der Raum zwischen den Himmelskörpern mit Materie angefüllt[3] *gedacht werden mufs, zu der Annahme einer Verzögerung der Umdrehungszeit, ganz abgesehen davon, ob die Änderungen in der Umlaufszeit, welche am Enkeschen Kometen beobachtet und bei andern Kometen nicht gefunden wurden, durch ein solches widerstehendes Mittel zu erklären sind oder nicht.*

Andererseits ist für die Erde auch der Einflufs von Ebbe und Flut in Rechnung[4] *zu bringen, weil hier durch die Reibung der Flüssigkeit auf dem festen Grunde gleichfalls eine Verzögerung der Rotationszeit eingeleitet werden mufs.*

Man hat daran festzuhalten, dafs in einem Systeme absolut starrer Körper, zwischen denen ein völlig leerer Raum vorhanden ist, bei Annahme unserer physikalischen Gesetze allerdings die Gleichförmigkeit der Umdrehungen behauptet werden mufs, dafs aber die Beobachtung darüber zu entscheiden hat, ob solche Verhältnisse gegeben sind oder nicht.

Wenn man an der Konstanz der Umdrehungszeit festhalten will, so mufs man annehmen, dafs andere Bedingungen den Einflufs der oben berührten Bedingungen wiederum aufheben. Eine solche Annahme hat J. R. Mayer[5] *gemacht, indem er die Behauptung aussprach, dafs sich die Erde fortwährend verkleinere, und dafs sie sich deshalb immer schneller drehen müsse. Hier kommt es natürlich darauf an, ob sich Verzögerung und Be-*

---

1) Vergl. J. R. Mayer, Naturwissenschaftliche Vorträge, S. 28 und Zöllner, Theorie der Kometen, S. 470.

2) Vergl. aufserdem Hansen, Bericht der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1863 Bd. XV.

3) Ohne auf die Äther-Hypothesen einzugehen, soll auf die Zöllnersche Untersuchung, über das Gleichgewicht der Atmosphären der Himmelskörper hingewiesen werden, gemäfs welcher im sogenannten leeren Raume stets Spuren von atmosphärischen Gasen vorhanden sind.

4) Vergl. Kant, „Untersuchung der Frage, ob die Erde in ihrer Umdrehung etc.“ (1754) und J. R. Mayer, „Mechanik der Wärme“ (1867), welche auch dessen Abhandlungen aus den Jahren 1842—1848 enthält. Vergl. auch Helmholtz, Wechselwirkung der Naturkräfte.

5) Vortrag aus dem Jahre 1870 in der Sammlung vom Jahre 1871.

schleunigung der Bewegung, beziehungsweise Verlängerung und Verkürzung des Sterntages grade aufheben oder ob auf der einen Seite ein Überschufs festzustellen wäre.

Am wahrscheinlichsten ist es, dafs uns in der That keine gleichförmige Bewegung von Naturkörpern gegeben sind, während allerdings eine Reihe solcher Bewegungen mit einem gewissen Grade der Annäherung [1]) als solche angesehen werden dürfen.

§. 8. Die gleichmäfsig geänderte Bewegung erster Ordnung.

1.

Unter allen ungleichförmigen Bewegungen zeichnet sich eine Klasse durch besondere Einfachheit aus.

Einen Teil der von ihr umfafsten Bewegungen hat man von jeher als **gleichmäfsig geänderte** Bewegungen eingeführt, dieselben sind aber nicht die einzigen, für welche sich eine gleichmäfsige Änderung der Bewegung nachweisen läfst.

Die gleichförmige Bewegung stellt die gleichmäfsige Änderung Null dar und eröffnet eine Reihe von Bewegungs-Arten, deren zweites Glied die gleichmäfsig geänderte Bewegung (in althergebrachter Bedeutung) ist, deren drittes Glied aus dem zweiten ebenso entsteht wie das zweite aus dem ersten etc.

Die verschiedenen Bewegungs-Arten dieser Klasse sollen als gleichmäfsig geänderte Bewegungen von der Ordnung $0, 1, 2, \ldots p$ unterschieden werden.

Eine **gleichmäfsig geänderte Bewegung von der Ordnung p** ist eine Bewegung, bei welcher **jede Bahn-Inkrementen-Reihe eine arithmetische Reihe von der Ordnung p ist.**

Die **gleichmäfsig geänderte Bewegung erster Ordnung** wird im allgemeinen **schlechthin** als **gleichmäfsig geänderte Bewegung** bezeichnet. Diese Abkürzung ist auch fernerhin statthaft, wenn man sich nur ihrer Bedeutung stets erinnert.

Die Darstellung dieser Bewegung, welche innerhalb der abgegrenzten Klasse nach der bereits behandelten gleichförmigen Bewegung die einfachste ist, soll nun zunächst gegeben werden. Wenn sich eine Bahn-Inkrementen-Reihe als eine arithmetische Reihe erster Ordnung erweist, so läfst sich dieselbe darstellen als:

$$s_1 = s_1,\ s_2 = s_1 + \delta,\ s_3 = s_1 + 2\,\delta, \ldots\ldots$$
$$s = s_1 + (n-1)\,\delta.$$

Daraus folgt:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n = n \,.\, s_1 + n\,\frac{(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\delta$$

---

1) Darüber hinaus scheint eine Kongruenz von Idealem und Realem überhaupt nicht vorhanden zu sein.

Beachtet man nun, dafs $n . \tau = t$ und demnach auch $n = \frac{t}{\tau}$ ist, so hat man:

$$s = t . \frac{s^1}{\tau} + \frac{t^2}{2} . \frac{\delta}{\tau^2} - \tau . t . \frac{\delta}{\tau^2}.$$

Bezeichnet man die konstante Gröfse $\frac{\delta}{\tau^2}$ mit d, so ergiebt sich:

$$s = t . \varphi_{[s_1]} + \frac{t^2}{2} . d - \tau . t . d$$

Wenn man nun n mehr und mehr wachsen läfst, so wird τ kleiner und kleiner.

An der Grenze — die Gröfse d, welche nicht Null ist, mufs bei diesem Übergange endlich bleiben, weil die linke Seite (s) der Gleichung eine endliche Gröfse ist — verschwindet das Glied $\tau . t . d$, während $\varphi_{[s_1]}$ in v_0 übergeht [1]).

Demnach resultiert:

$$s = t . v_0 + \frac{t^2}{2} . d.$$

Die konstante Gröfse d ist $>$ o oder $<$ o, je nachdem $\delta >$ oder $<$ o ist.

Wenn $\delta >$ o ist, so hat man eine steigende Inkrementen-Reihe und infolge dessen eine beschleunigte Bewegung, wenn $\delta <$ o ist, so hat man eine fallende Inkrementen-Reihe und infolge dessen eine verzögerte Bewegung vor sich.

Da die Gröfse d durch den Quotienten $\frac{\delta}{\tau^2}$ definiert wird und sich somit als $\frac{\text{Länge}}{(\text{Dauer}) . (\text{Dauer})}$ einführt, so charakterisiert sich dieselbe als ein Beschleunigungs-Wert, dessen Bedeutung noch klarzustellen ist. Man hat ferner die zugeordnete Reihe der Geschwindigkeiten

$$\frac{s_1}{\tau},\ \frac{s_2}{\tau} = \frac{s_1}{\tau} + \frac{\delta}{\tau},\ \frac{s_3}{\tau} = \frac{s_1}{\tau} + 2 . \frac{\delta}{\tau} \ldots .$$

$$\frac{s_n}{\tau} = \frac{s_1}{\tau} + (n - 1) . \frac{\delta}{\tau}.$$

Es ist also:

$$\varphi[s_n] = \varphi[s_1] + n . \frac{\delta}{\tau} - \frac{\delta}{\tau}.$$

Beobachtet man wiederum, dafs $n . \tau = t$ und demnach auch $n = \frac{t}{\tau}$ ist, so hat man:

---

1) Bezeichnet man das vor $[s_1]$ gelegene Element mit $[s_0]$, so geht $\varphi[s_0]$ an der Grenze in v_0 über, während $\varphi[s_1] = v_0 \pm \varepsilon$ ist. Es läfst sich zeigen, dafs ε im Vergleich zu v_0 verschwindend klein ist.

$$\varphi[s_n] = \varphi[s_1] + t \cdot \frac{\delta}{\tau^2} - t \cdot \frac{\delta}{\tau^2} = \varphi[s_1] + t \cdot d - \tau \cdot d.$$

An der Grenze verschwindet $\tau \cdot d$ und es ergiebt sich:

$$v_t = v_0 + t \cdot d.$$

Aus dieser Formel folgt:

$$d = \frac{v_t - v_0}{t}.$$

Demnach stellt sich die Gröfse d, deren Charakter als Beschleunigungs-Wert schon erkannt wurde, als die mittlere Beschleunigung der Bewegung für **jedes** Wegstück [s] dar. Man darf infolge dessen auch hier eine abkürzende Bezeichnung einführen und bei der Konstanz der Beschleunigung schlechthin von der **Beschleunigung der Bewegung** sprechen.

Es gelten hier die Gleichungen:

$$s = t \cdot v_0 + \frac{t^2}{2} \cdot d \text{ und } v_t = v_0 + t \cdot d$$

In diese Formeln treten 5 Gröfsen (v_0, d, t, v_t, s) ein, welche in gewisser Beziehung mit den 5 Gröfsen, welche in der Theorie jeder Reihe (Anfangs-Glied, Gesetz, Anzahl der Glieder, End-Glied, Summe) eine Rolle spielen, in Korrespondenz stehen. Je zwei dieser 5 Gröfsen lassen sich immer durch die 3 übrigen ausdrücken, so dafs also jede Gröfse so oft auf verschiedene Weise bestimmt werden kann, als 4 Gröfsen zu je 3 ohne Wiederholung kombiniert werden können, d. h. $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ mal.

Man gelangt also zu einem System von 20 Formeln, unter denen immer je 4 unmittelbar in einander übergeführt werden können, da in jede Formel 4 Gröfsen eintreten und die Auflösung nach jeder derselben möglich erscheint.

Man kann infolge dessen auf höchst verschiedene Weise je **fünf**, von einander unabhängige Formeln, als **Grundformeln** herausheben. Als solche sollen hier gewählt werden:

1) $s = t \cdot v_0 + \frac{t^2}{2} \cdot d.$

2) $s = t \cdot v_t - \frac{t^2}{2} \cdot d.$

3) $v_t = v_0 + t \cdot d$ oder $v_0 = v_t - t \cdot d.$

4) $v^2_t = v^2_0 + 2ds$ oder $v^2_0 = v^2_t - 2ds.$

5) $t = \frac{2s}{v_0 + v_t}.$

Aus jeder Grundformel lassen sich durch Auflösung nach den 3 nicht entwickelten Gröfsen 3 andere Formeln gewinnen, so dafs man also in der That zu einem System von 20 Formeln gelangt.

Wenn man nicht die Anfangs-Punkte von [t] und [s], sondern ein beliebiges O und Z als Anfangs-Punkte der Messung eingeführt denkt, so gelangt man auch hier zu einer Formel:

$$s = t \cdot v_o + \frac{t^2}{2} \cdot d + constans.$$

Will man bei dieser Bewegung eine **Reihe von Geschwindigkeits-Inkrementen** einführen, so muſs man für v dieselbe Teilung, welche für s durchgeführt wurde, vorgenommen denken.

Zerlegt man wiederum einen bestimmten Zeit-Teil [t] in n Teile von gleicher Dauer τ, so kann man für jedes Glied der Reihe $[t_1]$, $[t_2]$, ... $[t_n]$ oder auch für jedes Glied der Reihe $[s_1]$, $[s_2]$ .... $[s_n]$ Anfangs- und End-Geschwindigkeit bilden und deren Werte von einander abziehen.

Eine solche aus n wohl bestimmten Differenzen gebildete Reihe wird für eine elementare Einteilung in die **Reihe der elementaren Geschwindigkeits-Inkremente** übergehen.

Da sich ein Glied $(v_t - v_o)$ einer solchen Reihe als $\tau \cdot \alpha_{[s_i]}$ darstellt und $\alpha_{[s_i]}$ hier eine Konstante ist, so gelangt man daher zu einer arithmetischen Reihe von der Ordnung „Null“.

Allgemein ist festzuhalten, daſs die Glieder einer solchen Inkrementen-Reihe den Gliedern einer aus den entsprechenden mittleren Beschleunigungen gebildeten Reihe proportional (S. 171) sind.

Der Reihe der ***elementaren Geschwindigkeits-Inkremente*** *entspricht die Reihe der* ***Werte der Beschleunigungen in den auf einander folgenden Bahn-Punkten.***

An die oben gegebene Proportion $s_1 : s_2 = \varphi_{[s_1]} : \varphi_{[s_2]}$ und die daraus gezogenen Folgerungen braucht nur erinnert zu werden.

Die **gleichmäſsig geänderte** Bewegung (erster Ordnung) charakterisiert sich folgendermaſsen:

1. Zu Zeit-Teilen von gleicher Dauer gehören gleiche Wert-Differenzen von Anfangs-Geschwindigkeit und End-Geschwindigkeit.
Die Differenz $v_t - v_o$ entspricht der Länge eines Wegstückes, welche sich ja auch immer als eine Differenz $ZW_2 - ZW_1 = s$ darstellen läſst.

2. Zu gleichen Wert-Differenzen von Anfangs-Geschwindigkeit und End-Geschwindigkeit gehören Zeit-Teile von gleicher Dauer.

3 Jede Reihe von Geschwindigkeits-Inkrementen (einschlieſslich der elementaren) ist eine arithmetische Reihe von der Ordnung Null, d. h. sie besteht aus lauter gleichen Gliedern.

4. Für alle Bahn-Stücke [s] ist $\alpha_{[s]} = \frac{v_t - v_o}{t} = d.$

Dabei ist $(v_t - v_o)_{t=1} = d$, d. h. die Maſs-Zahl der Beschleunigung ist gleich der Maſs-Zahl des Geschwindigkeits-Inkrementes für die Zeit-Einheit.

5. Mit Ausnahme von $\alpha^0_{[s]} = v_o + d \cdot \frac{t}{2}$ und $\alpha^I_{[s]} = d$ ist jedes $\alpha_{[s]}$ und demnach auch jedes a Null.

Es scheint nicht überflüssig aus der Formel $s = t \cdot v_o + \frac{t^2}{2} \cdot d$ *die Eigenschaft der in Rede stehenden Bewegung herzuleiten, welche hier als Definition benutzt wurde.*

Um das Bahn-Inkrement $[s_i]$ *für ein bestimmtes* $[t_i]$ *aus der Reihe* $[t_1], [_2], \ldots [t_n]$ *zu finden, hat man t in der Formel für s einmal durch* $i \cdot \tau$ *und einmal durch* $(i - 1)\,\tau$ *zu ersetzen und beide Werte zu subtrahieren. Es ist:*

$$s_i = \tau \cdot v_o + \frac{\tau^2}{2} \cdot d\,(2\,i - 1),\ d.\ h.$$

$$s_1 = \tau \cdot v_o + \frac{\tau^2}{2} \cdot d,\ s_2 = \tau \cdot v_o + \frac{\tau^2}{2} \cdot 3\,d,$$

$$s_3 = \tau \cdot v_o + \frac{\tau^2}{2} \cdot 5\,d, \ldots$$

Die Differenz der Reihe ist $\tau^2 \cdot d$ *und dieses Ergebnis entspricht dem Ausgangs-Punkte, wo* $d = \frac{\delta}{\tau^2}$ *eingeführt wurde.*

Auch hier sind die Bedingungen so angegeben, dafs sie zugleich **notwendig** und **hinreichend** genannt werden dürfen.

Will man z. B. aus Nr. 4 den Charakter der Bewegung ableiten, so verfährt man folgendermafsen:

Zerlegt man irgend ein $[s]$ *im Hinblick auf die Teilung* $t = n \cdot \tau$ *in die Reihe der Bahn-Inkremente* $[s_1], [s_2], \ldots [s_n]$ *und nimmt an, dafs deren erstes* $[s_1]$ *mit einer Geschwindigkeit* v_o *betreten wird, so wird das zweite mit der Geschwindigkeit* $v_o + t \cdot \frac{d}{n}$, *das dritte mit der Geschwindigkeit* $v_o + 2\,t \cdot \frac{d}{n} \ldots.$ *das letzte mit der Geschwindigkeit* $v_o + (n - 1)\,t \cdot \frac{d}{n}$ *betreten, während dieselben beziehungsweise mit den Geschwindigkeiten* $v_o + t \cdot \frac{d}{n}, v_o + 2\,t \cdot \frac{d}{n}, \ldots v_o + n\,t \cdot \frac{d}{n}$, *verlassen werden.*

Wenn man nun die Weg-Inkremente alle aus der Formel für die gleichförmige Bewegung mit Hülfe der Anfangs-Geschwindigkeit berechnen wollte, so würde man für deren Summen bei positivem d ein zu kleines und bei negativem d ein zu grofses Resultat s_A *erhalten, wenn man dagegen unter gleichen Umständen mit den End-Geschwindigkeiten in die Rechnung ginge, so würde man ein zu grofses beziehungsweise ein zu kleines Resultat* s_E *erhalten. Jedenfalls liegt s zwischen* s_A *und* s_E.

Die Formel $s = c \cdot t$ *liefert:*

$$s_A = \left(v_o \frac{t}{n}\right) + \left(v_o \frac{t}{n} + t \cdot \frac{t^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots$$
$$\left(v_o \frac{t}{n} + (n - 1)\,d \cdot \frac{t^2}{n^2}\right)$$

und

$$s_E = \left(v_0 \frac{t}{n} + d \cdot \frac{t^2}{n^2}\right) + \left(v_0 \frac{t}{n} + 2d \cdot \frac{t^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots \left(v_0 \frac{t}{n} + n d \cdot \frac{t^2}{n^2}\right)$$

Nun ist

$$s_A = t \cdot v_0 + d \cdot \frac{t^2}{n^2}(1 + 2 + \ldots n - 1) = t \cdot v_0 + d \cdot \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

und

$$s_E = t \cdot v_0 + d \cdot \frac{t^2}{n^2}(1 + 2 + \ldots\ldots n) = t \cdot v_0 + d \cdot \frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Wenn man nun n mehr und mehr wachsen läfst, so nähert sich sowohl s_A als auch s_E mehr und mehr dem Werte $t \cdot v_0 + \frac{t^2}{2} \cdot d$, welcher demnach die zwischen s_A und s_E gelegene Gröfse s bestimmt.

2.

In der Natur kommt eine Gruppe von Bewegungen vor, welche mit grofser Annäherung als gleichmäfsig geänderte Bewegungen anzusehen sind.

Der Mittelpunkt einer in der Nähe der Erdoberfläche in senkrechter Richtung empor- oder hinabgeworfenen Kugel bewegt sich fast mit konstanter Beschleunigung.

Zum Nachweise dieses Satzes der Erfahrung dient die Atwoodsche Fallmaschine in dem oben skizzierten Schema: Der bewegliche Körper stellt, wenn ihm eine bestimmte Geschwindigkeit in den Vertikalen mitgeteilt wird, Verhältnisse dar, welche dem Vertikalwurfe nach unten und dem Vertikalwurfe nach oben fast genau entsprechen.

Die Skala gestattet unmittelbar eine Bahn-Inkrementen-Reihe durch Ablesen zu bestimmen, indem man für jeden (Zeitteile von gleicher Dauer τ markierenden) Schlag des Uhrwerkes die Lage eines bestimmten Punktes des sinkenden und steigenden Körpers notiert.

Findet man z. B. für den ersten Schlag die Lage 0,125 m (vom Null-Punkte P der Skala aus) und für den 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten Schlag beziehungsweise die Lagen 0,137 m, 0,161 m, 0,197 m, 0,245 m, 0,305 m, so ist $s_1 = 0{,}012$ m, $s_2 = 0{,}024$ m, $s_3 = 0{,}036$ m, $s_4 = 0{,}048$ m, $s_5 = 0{,}060$ m. Daraus schliefst man auf eine konstante Beschleunigung

$$\frac{0{,}012}{\tau^2} \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})}.$$

Hat der Zeitteil τ grade die Dauer einer Sekunde, so ist $d = 0{,}012 \frac{Meter}{(Sekunde)\,.\,(Sekunde)}$ *und man gelangt dann zu der Formel:*

$$s = t\,.\,v_o + \frac{t^2}{2}\,.\,0{,}012 + constans.$$

Beim ersten Schlage, d. h. als man zu Zählen anfing, hatte s die Gröfse 0,125, so dafs man erhält:

$$constans = 0{,}125 \text{ und } s = t\,.\,v_o + \frac{t^2}{2}\,.\,0{,}012 + 0{,}125.$$

Beim zweiten Schlage (d. h. für t = 1) hatte s die Gröfse 0,137 m, so dafs man erhält:

$$0{,}137 = v_o + 0{,}006 + 0{,}125, \text{ d. h. } v_o = 0{,}006.$$

Demnach gelangt man zu der Formel:

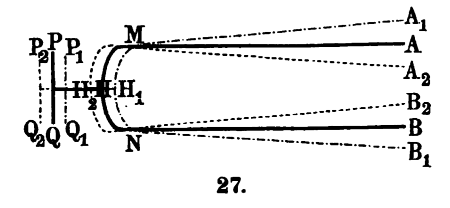
$$s = 0{,}125 + t\,.\,0{,}006 + \frac{t^2}{2}\,.\,0{,}012.$$

Diese Formel ist nun durch weitere Beobachtungen zu prüfen [1].

Es scheint nicht überflüssig zu bemerken, dafs wegen der **Homogeneïtät** *der Gleichung für s die Zahl 0,125 die Einheit Länge, die Zahl 0,006 die Einheit* $\frac{Länge}{Dauer}$ *und die Zahl 0,012 die Einheit* $\frac{Länge}{(Dauer)\,.\,(Dauer)}$ *mifst, da ja t eine Dauer bedeutet und sich s als Länge ergeben mufs.*

Eine andere Art der Demonstration läfst sich durch das v. Babosche Fallbrett geben.

Eine Stimmgabel (Figur 27) vollführt beim Tönen Schwingungs-Bewegungen, welche durch das nebenstehende Schema verdeutlicht werden sollen. Die Punkte M und N bleiben in Ruhe, während A und B zwischen der Lage A_1 *und* B_1 *und der Lage* A_2 *und* B_2 *hin und hergehen.*



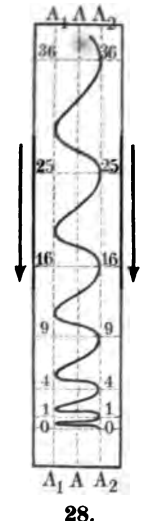
27.

Die (konstante) Zeit-Dauer, welche einer Doppelschwingung (Hin- und Hergang) von A oder B entspricht, lässt sich durch geeignete Methoden feststellen; man giebt gewöhnlich die Anzahl (n) der Doppelschwingungen an, welche einer Sekunde entsprechen.

Wenn man nun an einer horizontal schwingenden Stimmgabel einen Stift befestigt, welcher eine vertikal stehende parallelepipedische Platte leicht berührt, so wird der Stift auf dieser in einer Sekunde n-mal einen Hin- und einen Hergang verzeichnen.

---

1) Dabei kommt das Verfahren zur Geltung, welches die induktiv-deduktive Methode (S. 18 flg.) charakterisiert.



28.

Läfst man nun eine solche Platte, nachdem dieselbe berufst wurde, in Schiebern an dem schwingenden Stift vorüberfallen, so wird derselbe auf ihr die Bahn-Inkremente der Bewegung (Figur 28) für $\frac{1}{n}$ Sekunde aufzeichnen.

Eine beliebige Skala dient zur Feststellung der Mafse dieser Inkremente, welche dem freien Falle angenähert (Reibung) entsprechen.

Solche Apparate, welche durch Schwingungen elastischer Körper Zeit-Messungen ermöglichen, heifsen Vibrations-Chronoskope.

Der wichtigste Mefs-Apparat für alle diese Verhältnisse ist das Pendel, dessen Theorie später gegeben werden soll.

Genaue Versuche haben ergeben, dafs beim **freien** Falle eine Acceleration auftritt, welche an **demselben** Orte der Erde für **alle** Körper dieselbe Gröfse hat, während sie für einen und denselben Körper mit dem Orte veränderlich ist.

Der Wert der Acceleration, welche nach Übereinkunft durch g bezeichnet [1]) wird, mufs einen Index erhalten, der sich auf den Ort bezieht.

Da die Lagen-Bestimmung eines Punktes im Raume drei Mafs-Zahlen erfordert, so mufs der Index dreiteilig sein. Ist z. B. ein System (x, y, z) ein für alle Mal eingeführt, so bedeutet $g_{3,4,5}$ die Acceleration für den Punkt, dessen Koordinaten $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ sind.

Auf der **Oberfläche** der Erde ändert sich g für einen und denselben Parallel-Kreis fast gar nicht, so dafs hier die Angabe der Breite (φ) eines Ortes genügt und g als g_φ zu fixieren ist.

Die Breite (φ) steht, wie oben bemerkt wurde, mit ζ in engem Zusammenhange.

Der eine Index (ζ oder φ) genügt, um für die Erdoberfläche die Unterschiede im Werte von [g] hervortreten zu lassen.

Man hat für den Äquator bei Reduktion [2]) auf das Niveau des Meeres

$$g_0 = 9{,}78009 \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \,.\, (\text{Sekunde})}$$

und für jeden der beiden Pole ebenso

---

1) Im Hinblick auf gravitas.

2) Die Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern wird durch keine geometrische Gestaltung von genügender Einfachheit dargestellt und mufs daher für die Rechnung durch eine ideale Fläche ersetzt werden, welche z. B. dadurch erhalten werden kann, dafs man die Niveau-Flächen der Oceane zu einer einheitlichen Gestaltung (Rotations-Ellipsoid) ergänzt.

$$g_{90} = 9{,}83089 \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \,.\, (\text{Sekunde})}.$$

Ganz allgemein gilt:

$$g_\varphi = 9{,}78009 + 0{,}05080 \,.\, \sin^2\varphi.$$

Diese Formel, welche aus den Beobachtungen abgeleitet worden ist, läfst eine Bestätigung durch die Rechnung zu, falls man gewissen Annahmen über die Urgeschichte der Erde beitritt [1]).

Gewöhnlich rechnet man, wenn es nicht auf grofse Genauigkeit ankommt, mit einem abgekürzten Mittelwerte, z. B. mit

$$g_{45} = 9{,}81.$$

Für Punkte, welche **innerhalb** (P_i) beziehungsweise **aufserhalb** (P_a) des Raumes liegen, welcher von der Oberfläche der Erde abgegrenzt wird, leitet man die Werte der Acceleration aus den Werten für die **entsprechenden** Punkte der Erdoberfläche ab.

Die Konstruktion der **entsprechenden** Punkte ist abhängig von der Natur der Fläche, welche man als Begrenzung der Erde einführt.

Wenn man die Oberfläche derselben als eine Kugel (R) mit dem Centrum O auffafst, so liefert der Schnitt-Punkt der Verbindungs-Graden OP_i beziehungsweise OP_a für P_i beziehungsweise P_a den entsprechenden Punkt.

Innerhalb dieser Auffassung, welche auch im allgemeinen für eine angenäherte Darstellung dieser Verhältnisse ausreicht, gelten folgende Formeln:

Für innere ($OP_i = \rho$) Punkte:

$$g^i_{\rho,\,\varphi} = \frac{\rho}{R} \cdot g_{R,\,\varphi}.$$

Für äufsere ($OP_a = \rho$) Punkte:

$$g^a_{\rho,\,\varphi} = \frac{R^2}{\rho^2} \cdot g_{R,\,\varphi}.$$

Dabei ist der Wert von [g] für die Oberfläche, welche durch den Erdradius (R) bestimmt wird, jetzt nicht mehr als g_φ, sondern als $g_{R,\,\varphi}$ zu bezeichnen, weil man im allgemeinen den Wert $g_{\rho,\,\varphi}$ einzuführen hat.

Für die Oberfläche selbst müssen beide Formeln $g^i_{\rho,\,\varphi}$ *und* $g^a_{\rho,\,\varphi}$ *dasselbe liefern; man hat in der That*

$$g^i_{R,\,\varphi} = g_{R,\,\varphi} = g^a_{R,\,\varphi}.$$

Übrigens gelten die Formeln für $g^i_{\rho,\,\varphi}$ *und* $g^a_{\rho,\,\varphi}$ *in aller Strenge nur unter der Voraussetzung einer bestimmten Massen-Verteilung in Bezug auf den Erdmittelpunkt. Diese Voraussetzung ist für* $g^a_{\rho,\,\varphi}$ *sehr annähernd gegeben, während dieselbe für* $g^i_{\rho,\,\varphi}$ *weniger vollkommen erfüllt ist.*

Alle diese Sätze der Erfahrung sehen von dem Einflusse der

---

1) Vergl. Clairaut, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743.

umgebenden Luft ab, d. h. sie würden nur im luftleeren Raume mit voller Strenge gelten.

Man pflegt den senkrecht nach unten gerichteten Wurf von der Anfangs-Geschwindigkeit „Null" als freien Fall von den anderen Bewegungen dieses Abschnittes auszuzeichnen und spricht infolge dessen von bestimmten Fall-Gesetzen, welche alle nicht mehr und nicht weniger sind als Folgerungen aus der Thatsache, dafs hier in grofser Annäherung eine gleichmäfsig geänderte Bewegung vorliegt und dafs die Beschleunigung derselben mit den oben angegebenen Ergebnissen der Beobachtung übereinstimmt.

*Als **erstes** Fall-Gesetz pflegt man den äufserst irreleitenden Satz hinzustellen: Alle Körper sind gleich schwer.*

Es handelt sich hier um den Erfahrungs-Satz, dafs der Wert der Beschleunigung (g) an demselben Orte für alle Körper derselbe ist.

*Als **zweites, drittes** und **viertes** Fall-Gesetz pflegt man hinzustellen:*

Die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers nimmt in gleichem Verhältnisse mit der Zeit des Falles zu, während der dabei durchlaufene Weg wie das Quadrat dieser Zeit wächst und die am Ende der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit doppelt so grofs ist als der in der ersten Sekunde zurückgelegte Weg[1].

Diese drei Gesetze sind Folgerungen aus den beiden Formeln

$$s = v_0 t + \frac{g}{2} t^2 \text{ und } v_t = v_0 + g t$$

und zwar für den Specialfall $v_0 = 0$.

Die Fall-Gesetze sind von Galilei (1602) durch Versuche mit sorgfältig polierten Messing-Kugeln, welche in glatten, mit Pergament überzogenen, Holzrinnen herabrollten, abgeleitet worden.

Das erste Gesetz (vergl. Dynamik) ist durch Bessels Pendel-Beobachtungen bestätigt worden.

Man demonstriert dasselbe durch den Fall im luftleeren Raume, indem man gleichzeitig entweder eine Bleikugel und eine Flaumfeder in einem von Luft befreiten Cylinder oder indem man in freier Luft auf einer horizontalen Metall-Scheibe (z. B. Thalerstück) ein Blatt Papier von geringerer Fläche mit dieser fallen läfst und jedesmal aus der Gleichheit der Geschwindigkeiten auf die Übereinstimmung von [g] schliefst.

Die anderen Gesetze werden durch die Atwoodsche Fallmaschine oder durch das v. Babosche Fallbrett direkt nachgewiesen, während für ihre mittelbare Bestätigung eine grofse Reihe von Folgerungen benutzt werden kann.

Über den **abwärts gerichteten Vertikalwurf** ist nichts Besonderes hinzuzufügen, da hier dieselben Verhältnisse wiederkehren, welche beim freien Falle auftreten.

---

1) Vergl. z. B. Koppe, Anfangsgründe der Physik.

Die Anfangs-Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit, welche von g abhängt, haben gleiche Richtung.

Bei dem **aufwärts gerichteten Vertikalwurfe** haben die von g abhängige Geschwindigkeit und die Anfangs-Geschwindigkeit entgegengesetzte Richtung, d. h. es handelt sich um eine gleichmäſsig verzögerte Bewegung.

Aus der Formel $v_t = v_o - gt$ folgt, daſs für $t = \frac{v_o}{g}$ ein Moment der Ruhe ($v_t = o$) auftritt; diesem Momente entspricht die Steighöhe $S = \frac{{v_o}^2}{2g}$, d. h. für $t = \frac{v_o}{g}$ erhält s den Wert $\frac{v^2_o}{2g}$.

Hier findet eine gleichmäſsig verzögerte Bewegung von $t = o$ bis $t = \frac{v_o}{g}$ statt, wobei s von $s = o$ bis $s = S = \frac{v^2_o}{2g}$ anwächst, während die Bewegung nach dem Momente, welcher durch $t = \frac{v_o}{g}$ bestimmt wird, gleichmäſsig beschleunigt ist.

Denkt man den Wurf von einer Horizontal-Ebene ausgehen und auf dieselbe zurückkehren, so ist im Momente $t = \frac{v_o}{g}$ die höchste Erhebung (S) über dieser Ebene erreicht. Beim Fallen (von $t = \frac{v_o}{g}$ an) ist S ohne Anfangs-Geschwindigkeit zurückzulegen, wofür die Zeit-Dauer $\frac{v_o}{g}$ in Anspruch genommen werden muſs und wobei v_o als Endgeschwindigkeit erreicht wird.

Jeder Punkt der Graden, auf welcher die Bewegung vor sich geht, wird einmal beim Aufsteigen und einmal beim Absteigen passiert und zwar beide Male mit ***derselben*** *Geschwindigkeit.*

Für die zahlreichen Aufgaben über diese Bewegungen, welche alle auf das, aus $s = t \cdot v_o + \frac{t^2}{2} \cdot g$ und $v_t = v_o + t \cdot g$ entspringende, Formel-System zurückweisen, ist zu bemerken, daſs die Änderung von g bei einer positiven oder negativen Erhebung über die Erdoberfläche nur dann zu vernachlässigen ist, wenn die dabei in Frage kommenden Strecken relativ gering sind.

Beim Falle aus weiteren Fernen des Weltenraumes und beim Falle in tiefere Schichten des Erdinnern wird im allgemeinen selbst innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung von einer gleichmäſsig geänderten Bewegung nicht mehr die Rede sein können.

Auſserdem darf man von einer solchen hier nur sprechen, wenn man, wie schon erwähnt wurde, von dem Einflusse der umgebenden Luft ganz absieht.

§. 9. Die gleichmäſsig geänderten Bewegungen höherer Ordnung.

Um die Reihe von Bewegungen, deren erstes und zweites Glied die Bewegung von konstanter Geschwindigkeit und die Bewegung von konstanter Beschleunigung (erster Ordnung) darstellen, weiter fortzusetzen, hat man sich des Verfahrens zu bedienen, welches vom ersten Gliede zum zweiten Gliede führte, d. h. man hat irgend zwei, sich entsprechende, Eigenschaften I und II der behandelten Reihen herauszugreifen und eine Eigenschaft x zu suchen, zu der man von II aus ebenso gelangt, wie man von I aus zu II gelangt ist.

Ein solches Verfahren wurde bereits angedeutet, als wir die in Rede stehende Gruppe von Bewegungen nach der Beschaffenheit der Bahn-Inkrementen-Reihe einteilten und es ist nur hinzuzufügen, daſs neben Anderen auch die Festsetzungen $\alpha^0{}_{[s]}$ = constans, $\alpha^I{}_{[s]}$ = constans, $\alpha^{II}{}_{[s]}$ = constans, etc. nach einander zu den Gliedern derselben Gruppe von Bewegungen führen würden.

Um die Theorie der gleichmäſsig geänderten Bewegungen zu entwickeln, kann man jene allgemeinen (§. 5) Sätze benutzen, welche überhaupt für die Reihen von Beschleunigungs-Inkrementen in Geltung sind.

Auſserdem bedarf man des bekannten Theorems, gemäſs welchem man das pte Glied irgend einer Reihe findet, indem man die Summe (s_{p-1}) der zwischen dem ersten (u_1) und dem pten Gliede (u_p) gelegene Terme ihrer ersten Differenzen-Reihe zum ersten Gliede (u_1) addiert.

Die hier citierte Regel weist man so nach:

Aus $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{p-1}, u_p, \ldots$ bildet man als erste Differenzen-Reihe

$$u_2 - u_1,\ u_3 - u_2 \ldots u_p - u_{p-1}, \ldots$$

Demnach ist

$$s_{p-1} = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots (u_p - u_{p-1}) = u_p - u_1$$

und man hat

$$u_p = u_1 + s_{p-1}.$$

Zunächst mag diejenige Bewegung behandelt werden, welche innerhalb des oben abgegrenzten Gebietes als drittes Glied erscheint.

Wenn die Reihe der Bahn-Inkremente eine arithmetische Reihe 2ter Ordnung ist, so ist die erste Differenzen-Reihe derselben eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung, d. h. man hat

$$s_2 - s_1 = \varepsilon,\ s_3 - s_2 = \varepsilon + \delta',\ s_4 - s_3 = \varepsilon + 2\delta', \ldots$$
$$s_n - s_{n-1} = \varepsilon + (n-2)\delta'$$

und

$$s_1 = s_1,\ s_2 = s_1 + \varepsilon,\ s_3 = s_1 + 2\varepsilon + \delta',\ s_4 = s_1 + 3\varepsilon + 3\delta',$$
$$s_5 = s_1 + 4\varepsilon + 6\delta', \ldots s_n = s_1 + (n-1)\varepsilon + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.\delta'.$$

Demnach ist

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i = n \cdot s_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \varepsilon + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta'.$$

Die Einführung $n = \frac{t}{\tau}$ liefert:

$$s = t \cdot \frac{s_1}{\tau} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{t^3}{6} \cdot \frac{\delta'}{\tau^3} -$$

$$\left(\frac{\tau \cdot t}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{\tau \cdot t^2}{2} \cdot \frac{\delta'}{\tau^3} - \frac{\tau^2 \cdot t}{3} \cdot \frac{\delta'}{\tau^3}\right).$$

Beachtet man, dafs

$$\frac{\varepsilon}{\tau^2} = \frac{s_2 - s_1}{\tau^2} = \alpha_{[s_2]}$$

und

$$\frac{\delta'}{\tau^3} = \frac{\frac{s_3 - s_2}{\tau^2} - \frac{s_2 - s_1}{\tau^2}}{\tau} = \frac{\alpha_{[s_3]} - \alpha_{[s_2]}}{\tau} = \alpha^{II}{}_{[s_2]}$$

ist, so gelangt man beim Grenz-Übergange zu der Formel:

$$s = t \cdot v_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a_0 + \frac{t^3}{6} \cdot a^{II}{}_0.$$

Ferner ist

$$v_t = \lim\left(\frac{s_n}{\tau}\right) = \lim\left(\frac{s_1}{\tau} + (n-1)\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\delta'}{\tau}\right).$$

Durch die Einführung $t = n \cdot \tau$ gelangt man zu

$$v_t = \lim\left(\frac{s_1}{\tau} + t \cdot \frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\delta'}{\tau^3} - \left[\tau \cdot \frac{\varepsilon}{\tau^2} + \frac{3t \cdot \tau}{2} \cdot \frac{\delta'}{\tau^3} + \tau^2 \cdot \frac{\delta'}{\tau^3}\right]\right)$$

d. h. zu $v_t = v_0 + t \cdot a_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a^{II}{}_0.$

Ferner ist

$$a_t = \lim\left(\frac{\frac{s_n}{\tau} - \frac{s_{n-1}}{\tau}}{\tau}\right) = \lim\left(\frac{s_n - s_{n-1}}{\tau^2}\right) =$$

$$\lim\left(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + (n-2) \cdot \frac{\delta'}{\tau^2}\right).$$

Durch die Einführung $t = n \cdot \tau$ gelangt man zu

$$a_t = \lim\left(\frac{\varepsilon}{\tau^2} + t \cdot \frac{\delta'}{\tau^3} - 2\tau \cdot \frac{\delta'}{\tau^3}\right) = a_0 + t \cdot a^{II}{}_0.$$

Die Bewegung hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dafs

$$\frac{a_t - a_0}{t} = a^{II}{}_0$$

ist, d. h. dafs die Beschleunigung II. O. im Anfange der Bewegung zugleich die Beschleunigung II. O. für alle Punkte der Bewegung ist.

Man schreibt daher a^{II} statt $a^{II}{}_0$ und erhält so in $a^{II}{}_0$ eine Korrespondenz zu den konstanten Gröfsen c und d.

Hier gelten also die Formeln:

$$
\begin{aligned}
s &= t \cdot v_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a_0 + \frac{t^3}{6} \cdot a^{II}, \\
s_t &= v_0 + t \cdot a_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a^{II}, \\
a_t &= a_0 + t \cdot a^{II}, \\
a^{II}_t &= a^{II}.
\end{aligned}
$$

Mifst man s von einem beliebigen Punkte P aus, so hat man auch hier

$$s = t \cdot v_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a_0 + \frac{t^3}{6} \cdot a^{II} + \text{constans}$$

anzusetzen.

Es hätte genügt s allein herzuleiten, da v_t, a_t und a^{II}_t ohne weiteres durch den Wert von s gegeben werden.

Setzt man hier einmal $t = (k - 1)\tau$ und einmal $t = k\tau$, so hat man

$$s_k = \left(k\tau v_0 + k^2 \cdot \frac{\tau^2}{2} \cdot a_0 + k^3 \cdot \frac{\tau^3}{6} \cdot a^{II}\right) -$$

$$\left((k-1)\tau v_0 + (k-1)^2 \frac{\tau^2}{2} \cdot a_0 + (k-1)^3 \frac{\tau^3}{6} \cdot a^{II}\right)$$

$$= \tau v_0 + k\tau^2 a_0 - \frac{\tau^2}{2} \cdot a_0 + k^2 \cdot \frac{\tau^3}{2} \cdot a^{II} + \frac{\tau^3}{6} \cdot a^{II} - k \cdot \frac{\tau^3}{2} \cdot a^{II}.$$

Es ist

$$\lim \left(\frac{s_k}{\tau}\right) = v_0 + (k\tau) a_0 + \frac{(k\tau)^2}{2} \cdot a^{II} = v_0 + t \cdot a_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a^{II} = v_t$$

Ferner hat man

$$s_{k+1} - s_k = \tau^2 a_0 + \frac{\tau^3}{2} \cdot a^{II} + k \cdot \tau^3 \cdot a^{II} - \frac{\tau^3}{2} \cdot a^{II}$$

und

$$\lim \left(\frac{s_{k+1} - s_k}{\tau^2}\right) = a_0 + (k\tau) a^{II} = a_0 + t \cdot a^{II} = a_t.$$

Endlich ist:

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{s_{k+2} - s_{k+1}}{\tau^2} - \frac{s_{k+1} - s_k}{\tau^2}\right) = (\tau^3 \cdot a^{II}) \frac{1}{\tau^3} = a^{II}_t.$$

Für den allgemeinen Fall einer gleichmäfsig geänderten Bewegung von der Ordnung p hat man:

$$s = \Sigma s_i = n \cdot s_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \zeta_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \zeta_2 + \ldots \frac{n(n-1) \ldots (n-p)}{1 \cdot 2 \ldots (p+1)} \cdot \zeta_p.$$

Dabei sind $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_p$ die konstanten Anfangs-Glieder der verschiedenen Differenzen-Reihen, deren letzte (p) eine Reihe aus lauter gleichen Gliedern (ζ_p), d. h. eine arithmetische Reihe von der Ordnung Null ist.

Man hat angenähert [1]):

$$\frac{s_1}{\tau_1} = \alpha^0{}_{[s_1]},\ \frac{\zeta_1}{\tau^2} = \alpha^{I}{}_{[s_1]},\ \frac{\zeta_2}{\tau^3} = \alpha^{II}{}_{[s_1]},\ \ldots\ \frac{\zeta_p}{\tau^{p+1}} = \alpha^{(p)}{}_{[s_1]}.$$

An der Grenze gilt die Formel:

$$s = t \cdot v_0 + \frac{t^2}{1.2} \cdot a^{I}{}_0 + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot a^{II}{}_0 + \ldots \frac{t^{p+1}}{1.2..(p+1)} \cdot a^{(p)}.$$

Daraus folgt:

$$v_t = v_0 + t \cdot a^{I}{}_0 + \frac{t^2}{1.2} \cdot a^{II}{}_0 + \ldots\ldots \frac{t^p}{1.2\ldots p} \cdot a^{(p)},$$

$$a^{I}{}_t = a^{I}{}_0 + t \cdot a^{II}{}_0 + \frac{t^2}{1.2} \cdot a^{III}{}_0 + \ldots\ldots \frac{t^{p-1}}{1.2..(p-1)} \cdot a^{(p)}.$$

Analoges gilt für jedes Glied der mit der Konstanten $a^{(p)}$ schliefsenden Reihe a^0, a^I, a^{II}, a^{III}, ...

Es verdient bemerkt zu werden, dafs alle diese Gröfsen Rechnungs-Ausdrücke sind, welche, abgesehen von bestimmten Zahlen, nur Potenzen von t enthalten.

Hier kommt in Betracht, dafs sich die Ableitung von t^λ als $\lambda \cdot t^{\lambda-1}$ ergiebt.

Da t^λ die Ableitung von $\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ ist, so ist $\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ der Stamm von t^λ.

Für einen Übergang von links nach rechts hat man in jeder Formel t^λ durch $\lambda \cdot t^{\lambda-1}$ zu ersetzen.

Für einen Übergang von rechts nach links hat man in jeder Formel t^λ durch $\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ zu ersetzen.

Es ist zu betonen, dafs t^0 im ersten Falle zu 0 und im zweiten Falle zu t führt.

Während der Übergang zur Ableitung völlig bestimmt ist, läfst sich beim Übergange zum Stamme eine gewisse Willkür nicht ausschliefsen.

Die Gröfsen t^λ und t^λ + constans haben dieselbe Ableitung $\lambda \cdot t^{\lambda-1}$, so dafs zu t^λ stets $\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ + constans als Stamm angenommen werden mufs.

In der That führt $v_t = v_0 + t \cdot a^{I}{}_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a^{II}{}_0$ einerseits zu $a_t = a^{I}{}_0 + t \cdot a^{II}{}_0$, während sich andrerseits aus $a_t = a^{I}{}_0 + t \cdot a^{II}{}_0$ nur v_t = constans $+ t \cdot a^{I}{}_0 + \frac{t^2}{2} \cdot a^{II}{}_0$ ergiebt, so dafs der Wert des Zusatzes, welcher hier v_0 ist durch andere Bestimmungen gegeben werden mufs.

Bewegungen, welche den gleichmäfsig geänderten Bewegungen höherer Ordnung entsprechen, dürften in der Natur kaum vorkommen.

---

1) Vergl. Seite 186, Anm.

Der Wert der Behandlung dieser Klasse von Bewegungen liegt hauptsächlich darin, dafs dieselben äufserst leicht zu durchschauende Beispiele für den Zusammenhang der Gröfsen s, v, a^I, a^{II}, ... darbieten und demgemäfs Gelegenheit geben, eine Fülle von Aufgaben zu stellen.

Dagegen sind die in der Natur gegebenen Bewegungen der Art, dafs für die elementarsten Verhältnisse die zweite Ableitung des Weges, d. h. die Gröfse a^I zwar von der Lage des Punktes W auf seiner Bahn, aber nicht von der Dauer (t) der Bewegung abhängig ist.

Man findet hier $a^I = A$, wobei A einen Rechnungs-Ausdruck bezeichnet, welcher t **nicht** *gesondert enthält, sondern aus bestimmten (d. h. konstanten) Zahlen-Koëfficienten und den (veränderlichen) Mafs-Zahlen der Lage von W zusammengesetzt ist.*

So liegt z. B. vielen, sehr verwickelten, in der Natur gegebenen Bewegungen die einfache Bewegung zu Grunde, bei welcher der Beschleunigungs-Wert (a^I) eines Punktes W durch $f . s$ auszudrücken ist so zwar, dafs f ein konstanter Zahlen-Koëfficient (z. B. 5 oder 22,5) ist und s den von irgend einem festen Punkte P aus gerechneten Abstand PW_i bezeichnet. In diesem Falle, wo Schwingungen auftreten, ist die Beschleunigung von W dessen Abstande von einem festen Punkte P proportional.

Dafs die Beschleunigung in letzter Instanz auch hier von t abhängig ist, mufs allerdings betont werden. Die Mafs-Zahlen der Lage, welche einem gewissen Zeit-Momente entsprechen, und demnach Ausdrücke in t sind, bestimmen die Beschleunigung, welche hier **nur** *mittelbar von t abhängt, insofern eben die bestimmenden Mafs-Zahlen Ausdrücke in t sind.*

Den einfachsten Fall, in welchem die Beschleunigung weder direkt von der Zeit-Dauer noch von den Mafs-Zahlen der Lage und durch diese mittelbar von der Zeit-Dauer abhängig ist, stellt die Bedingung a^I = constans dar, welche, wie bereits bekannt ist, zur gleichmäfsig geänderten Bewegung erster Ordnung führt.

§. 10. Zusammensetzung und Zerlegung von Bewegungen.

1.

Wenn für die Bewegung eines Punktes nur eine Anfangslage (A) und eine Endlage (B) vorgeschrieben sind, so darf man eine Schar von Bahnen zwischen A und B einschalten und die Bewegung auf irgend einer derselben vornehmen.

Für Bahnen, welche aus **Strecken** zusammengesetzt sind, gilt dabei die bemerkenswerte Beziehung, dafs sie der (durch Punkt A und B der **Länge** und **Lage** nach gegebenen) **Strecke** AB geometrisch gleich sein müssen.

Der Ersatz des kürzesten Weges zwischen AB oder der Strecke B durch ein Polygon $AW_1W_2 \ldots . W_{p-1}W_pB$ soll

eine **Zerlegung der Bahn AB**, der Ersatz eines Polygons AW_1 W_2 .... $W_{p-1}W_p$ B durch eine Strecke AB soll ein **Zusammensetzung der Bahnen AW_1, W_1W_2, ... $W_{p-1}W_p$, W_pB** genannt werden.

Dabei ist auch der Grenzfall eines Polygons aus unendlich vielen Seiten von unendlich kleiner Länge (Kurve) geeignetenfalls als zulässig anzusehen.

Diese Anschauung gewinnt eine hohe Bedeutung, wenn man mit ihr die Vorstellung verbindet, dafs sich der Punkt W gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit auf Strecken bewegt, welche beziehungsweise den Seiten eines AB ersetzenden Polygons geometrisch gleich sind.

Wenn man den Seiten eines solchen Polygons durch Parallel-Verschiebung denselben Ausgangs-Punkt A giebt und den Punkt W **gleichzeitig** auf jeder dieser Strecken so beweglich denkt, dafs er in derselben Zeit-Dauer τ den End-Punkt jeder Strecke erreichen würde, wenn er sich nur auf dieser bewegte, so schreitet der Punkt W dabei in grader Linie fort und fällt nach Ablauf der Zeit-Dauer τ mit B zusammen.

Wenn zunächst AB durch die gebrochene Strecke AW_1B ersetzt wird, so kann man die Ebene (I) des Dreiecks AW_1B auf einer andern Ebene (II) gleitend denken, welche selbst auf einer festen Ebene (E) gleitet. Wenn nun der Punkt W mit dem Punkte A zusammenfällt, so nimmt dieser gleichzeitig an zwei auf die feste Ebene (E) bezogenen Bewegungen teil. Diese Bewegungen sollen dadurch bestimmt werden, dafs man in E und in II je ein Dreieck zeichnet, welches mit $\triangle AW_1B$ zur Deckung gebracht werden kann, dafs man ferner diese Dreiecke wirklich zur Deckung bringt und nun die Bewegungen von II und I so regelt, dafs jeder Punkt von I gegen II in der Richtung AW_1 mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{AW_1}{\tau}$ und dafs jeder Punkt von II gegen E in der Richtung W_1B mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{W_1B}{\tau}$ verschoben wird.

Der Punkt A (welcher in I gelegen ist) beschreibt dabei in Bezug auf E die AB entsprechende Strecke AB, welche vor Beginn der Bewegung mit AB in Deckung war und ein Gleiches gilt vom Punkte W, wenn er mit A zusammenfallend gedacht wird.

Handelt es sich um ein ebenes Polygon von $p + 1$ Seiten, so hat man eine feste Ebene und $p + 1$ bewegliche Ebenen zu konstruieren und dieselbe Betrachtung durchzuführen, d. h. man hat P ein für alle Mal auf I gelegen und gleichzeitig I gegen II, II gegen III, III gegen IV etc. in bestimmter Weise bewegt zu denken.

Wenn man diese Vorstellung genauer analysiert, so gelingt es,

dieselbe Überlegung auch für ein beliebiges Polygon zu verwenden.

Die ***Ebenen,*** *welche eingeführt wurden, dienten in letzter Instanz nur zur Erhöhung der Anschaulichkeit des ganzen Vorgangs, während sich in der That P auf der ersten* ***Seite*** *bewegt, während diese erste* ***Seite*** *zugleich mit ihrem End-Punkte sich selbst parallel auf der zweiten* ***Seite*** *gleitet und diese zweite Seite zugleich mit ihrem End-Punkte sich selbst parallel auf der dritten Seite gleitet etc., wobei die* ***letzte*** *Seite* ***keine Lagen-Änderung*** *erleidet.*

Diese Vorstellung ist unabhängig davon, dafs die Seiten des Polygons alle in einer Ebene gelegen sind. Da die Geschwindigkeits-Werte der Bewegungen alle so angenommen sind, dafs jeder End-Punkt nach Ablauf der Zeit-Dauer τ die Strecke, auf welcher er gleitet, durchlaufen hat und die letzte Strecke bei dem ganzen Vorgange in Ruhe bleibt, so gelangt P nach Ablauf der Zeit-Dauer τ zum End-Punkte der letzten Strecke, d. h. nach B. Man überzeugt sich leicht durch den Schlufs von zwei auf je zwei der Strecken davon, dafs P bei der Bewegung auf der ***Graden*** *AB mit* ***konstanter*** *Geschwindigkeit fortschreitet.*

Man kann bei dieser ganzen Betrachtung auch mit Vorteil die Projektionen des Polygons auf drei feste Achsen als Hülfs-Konstruktionen einführen.

Es ist bereits betont worden, dafs **Geschwindigkeiten** und **Beschleunigungen** durch **Strecken** dargestellt werden können, weil sie gleich diesen durch **Gröfse** (Länge beziehungsweise Wert), **Richtung** und **Situations-Punkt** eindeutig bestimmt sind.

Wenn man einen Punkt P sich in der angegebenen Weise gleichzeitig auf mehreren Strecken, welche einem Polygone AW_1, $W_1W_2 \ldots . W_{p-1}W_p W_pB$ entsprechen beziehungsweise mit den konstanten Geschwindigkeiten

$$\frac{AW_1}{\tau}, \frac{W_1W_2}{\tau} \cdots\cdots \frac{W_{p-1}W_p}{\tau}, \frac{W_pB}{\tau}$$

bewegen läfst, so durchläuft er die Strecke AB mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{AB}{\tau}$.

Die Geschwindigkeiten, welche hier in Rede stehen, sind alle beziehungsweise den Seiten des Polygons und seiner Schlufslinie proportional, so dafs sich dieselben durch diese Strecken der Gröfse und Richtung nach darstellen lassen.

Wenn sich demnach ein Punkt P auf der Strecke AB mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so kann man diese Geschwindigkeit zerlegen und zwar durch ein Polygon, dessen Schlufslinie AB ist.

Wenn sich andrerseits ein Punkt P gleichzeitig auf $p + 1$ Strecken mit konstanten Geschwindigkeiten bewegt, welche dieser

Strecke beziehungsweise proportional sind, so kann man diese Geschwindigkeiten durch eine konstante Geschwindigkeit ersetzen, welche der Schlufslinie des betreffenden Strecken-Polygons proportional ist.

In diesen Theoremen sind die Gesetze über die **Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten eines Punktes** ausgesprochen, allerdings nur für den Specialfall der gleichförmigen Bewegung auf grader Linie.

Um die Betrachtung auf beliebige Bewegungen auszudehnen, genügt es, daran zu erinnern, dafs der Endpunkt der Bewegung (B) auch dann noch erreicht wird, wenn statt der **konstanten** Geschwindigkeits-Werte die **mittleren** Geschwindigkeiten für **dieselben** Strecken beziehungsweise als $\frac{AW_1}{\tau}, \frac{W_1W_2}{\tau}, \ldots\ldots \frac{W^{p-1}W_p}{\tau}, \frac{W_pB}{\tau}$ eingeführt werden und dafs andrerseits der **Geschwindigkeits-Wert** τ in einem Bahn-Punkte W_i nichts anderes ist als die mittlere Geschwindigkeit in dem zu W_i gehörigen (d. h. vor W_i gelegenen) Elemente $[s_i]$.

Die mittlere Geschwindigkeit im Elemente $[s_i]$ hat den Wert $\frac{s_i}{\tau}$ und läfst sich, wenn man $[s_i]$ in ein elementares Polygon zerlegt, durch jedes Polygon ersetzen, welches diesem für $[s_i]$ gebildeten Polygon ähnlich ist, während andrerseits wiederum vom Polygon zur Schlufslinie übergegangen werden kann.

Nicht so unmittelbar scheinen sich die Gesetze für die **Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen eines Punktes** zu ergeben.

Die Schwierigkeit der Übertragung, welche sich für die Beschleunigungen höherer Ordnung noch vermehrt, liegt hier darin, dafs der Beschleunigungs-Wert für einen Punkt als mittlere Beschleunigung im zugehörigen Elemente zwar wohl definiert ist, dafs er aber nicht blofs von den Bewegungs-Verhältnissen auf diesem ***einen*** *Elemente abhängig ist; man hat*

$$a_{[s_k]} = \lim \left(\frac{\frac{s_k}{\tau} - \frac{s_{k-1}}{\tau}}{\tau} \right).$$

Wenn man aber bedenkt, dafs der Geschwindigkeits-Wert in s_k um eine Gröfse $t \,.\, a_{[s_k]} = \lim \left(\frac{s_k}{\tau}\right) - \lim \left(\frac{s_{k-1}}{\tau}\right)$ zunimmt und dafs diese Gröfse dem Beschleunigungs-Werte $a_{[s_k]}$ proportional ist, so erscheint zunächst die Zerlegung der Zusatz-Geschwindigkeit und infolge dessen auch die Zerlegung der Beschleunigung erlaubt.

Man zerlegt also Beschleunigungen ebenso wie Geschwindigkeiten, indem man die Länge einer beliebigen Strecke dem gegebenen Beschleunigungs-Werte proportional (1 : f) setzt und deren

Lage mit der Beschleunigung selbst übereinstimmen läfst: Jedes Polygon, welches der Strecke substituiert werden kann, zerlegt die Beschleunigung, wobei die Seiten desselben in ihrer Lage mit den einzelnen Beschleunigungen übereinstimmen und durch ihre Länge in bestimmter Proportion (1 : f) den Wert der einzelnen Beschleunigungen messen.

Die **Zusammensetzung von Beschleunigungen** entspricht dem Übergange vom Polygone zur Schlufslinie.

Diesen Sätzen über **Zusammensetzung und Zerlegung von Beschleunigungen** (I. O.) stehen analoge Sätze in Bezug auf die Beschleunigungen höherer Ordnung zur Seite.

Man leitet dieselben ab, indem man den Wert der Beschleunigung p ter Ordnung dem Zuwachse der Beschleunigung (p — 1)ter Ordnung proportional setzt, während in Bezug auf die Lage der Beschleunigung die Lage des Elementes $[s_k]$ mafsgebend ist.

Für alle Glieder der Reihe v_t, a_t, a^{II}_t, . . . gelten demnach die Gesetze über **Zusammensetzung** und **Zerlegung** von Strecken im Gebiete der **geometrischen** Gleichheit, allerdings unter einem bestimmten Zwange der Lage.

Die **resultierende** Strecke hat stets als Ausgangs-Punkt den Punkt A zu erhalten, in welchem sich P vor der geometrischen Addition befindet, während für das **komponierende** Polygon die Schlufslinie AB vorgeschrieben werden mufs.

Da es sich darum handelt, unter einem bestimmten Zwange der Lage geometrisch zu summieren, so benutzt man auch hier die Worte „Resultante“ und „Komponenten“.

Nach dem früher Bemerkten ist es ohne weiteres klar, dafs man von Sätzen über das **Parallelogramm** beziehungsweise das **Parallelepiped** von Beschleunigungen **jeder** Ordnung sprechen darf.

Man kann auch hier von dem Parallelogramm - Satze durch Schlüsse von zwei auf je zwei der symbolisierenden Strecken zu den allgemeinen Sätzen gelangen.

Schliefslich mag wenigstens noch angedeutet werden, dafs auch über die Zusammensetzung und Zerlegung krummliniger Bahnen schon im Hinblick auf die erste Betrachtung gewisse Sätze eingeführt werden können. Jede Kurve zwischen AB, welche in einem Punkte W_1 geteilt wird, entspricht zwei gleichzeitig vorhandenen Bewegungen von P, deren eine durch AW_1 und deren andere durch W_1B bestimmt ist.

Man kann also im besonderen die gleichförmige Bewegung auf AB durch sehr verwickelte Bewegungen $AW_1\ W_2 \ldots W_{p-1}\ W_pB$ ersetzt denken.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs die **Zusammensetzung** von gegebenen Beschleunigungen irgend einer Ordnung stets zu **einer** bestimmten Resultante führt, während alle **Zerlegungs-Aufgaben** ihrer Natur nach **vieldeutig** sind.

Wenn man also nachgewiesen hat, dafs eine bestimmte Beschleunigung auf diese oder jene Weise durch Komposition erhalten werden kann, so ist damit noch nicht gesagt, dafs dieselbe auf diese oder jene Weise entstanden zu denken ist.

Bei in der Natur gegebenen Bewegungen wird man des öfteren im Zweifel sein können, ob die Gesamtbeschleunigung der Bewegung eines Punktes auf eine bestimmte Art entstanden ist oder nicht. Man kann es auch der Zahl 12 nicht ohne weiteres ansehen, ob sie aus 3 . 4 oder aus 2 . 6 hervorgegangen ist.

2.

Die in der Natur vorkommenden Bewegungen bieten äufserst zahlreiche Beispiele für die hier entwickelten Verhältnisse dar.

An den Flugbahnen von abgeschossenen Stücken beweglicher Ziele kann man (z. B. in den Schiefsbuden unserer Jahrmärkte) die Zusammensetzung der Bewegungen vortrefflich studieren, während der steigende Drache eine Zerlegung der an ihn übertragenen Bewegung des Windes zur Anschauung bringt. Weitere Beispiele sind: Die Ablenkung der aus den Schornsteinen in vertikaler Richtung aufsteigenden Rauchsäulen bei Eintritt eines Windstofses, die Bewegung einer von einer festen Wand abprallenden Kugel etc.

Als Beispiel für eine in der Natur gegebene **Zusammensetzung** von Bewegungen sollen die Verhältnisse behandelt werden, welche im allgemeinen an der Erdoberfläche bei geworfenen Körpern auftreten.

Wenn von dem Widerstande der Luft abgesehen wird, so kömmt hier nur die Beschleunigung [g] und aufserdem eine konstante Anfangs-Geschwindigkeit [c] von beliebiger Richtung [α] in Frage.

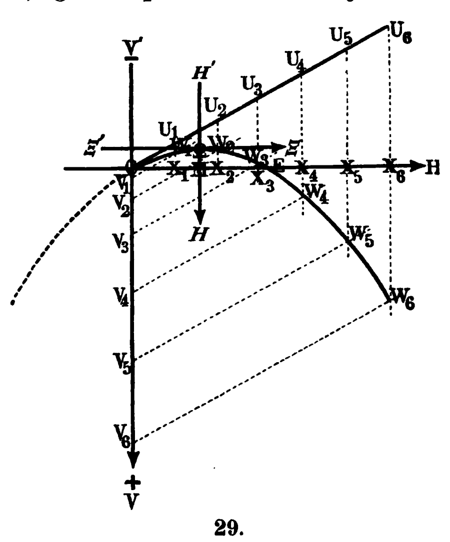
A. **Die Wurf-Bewegung.** Der Mittelpunkt einer Kugel, welche sich allein mit der Beschleunigung [g] bewegt, erhält bei einer Anfangs-Geschwindigkeit „Null“ die End-Geschwindigkeit [g . t] und legt dabei unter vertikaler Senkung den Weg $\left[\frac{g}{2} \cdot t^2\right]$ zurück.

Der Mittelpunkt einer Kugel, welche sich allein mit der Geschwindigkeit [c] bewegt, legt auf irgend einer Graden von der Richtung α den Weg [c . t] zurück.

Der Mittelpunkt (W) einer Kugel, welche beide Bewegungen gleichzeitig auszuführen hat, mufs in dem Zeitteile [t] sowohl den Weg $\left[\frac{g}{2} \cdot t^2\right]$ als auch den Weg [c . t] durchlaufen, so dafs man seinen Ort nach Ablauf der Zeit-Dauer t durch die (geometrische) Addition von [c . t] und $\left[\frac{g}{2} \cdot t^2\right]$ findet.

Die Bahnen, welche [c] und [g] entsprechen, mögen beziehungsweise O U und O V genannt werden. Bestimmt man die Richtung (α) der Anfangs-Geschwindigkeit [c] gegen die Horizontale O H, so hat die Richtung der Beschleunigung [g] je nach dem Sinne der Winkel-Messung den Wert R oder 3 R.

Trägt man nun sowohl auf O U als auch auf O V Bahn-Inkrementen-Reihen (U_i und V_i) auf, welche beziehungsweise den Einzelbewegungen auf O U und O V entsprechen, so findet man durch je eine geometrische Addition für jedes Paar von zusammengehörigen Teilpunkten U_i und V_i je einen Punkt W_i der gesuchten Bahn.



29.

Das Polygon $O\ W_1\ W_2 \ldots W_n$ stellt die Bahn des Punktes W in um so gröfserer Annäherung dar, je kleiner die Zeit-Dauer τ ist, welche der Konstruktion der beiden Bahn-Inkrementen-Reihen zu Grunde gelegt wurde.

Die Projektionen (Figur 29) der Bahn-Punkte $O,\ W_1 W_2 \ldots\ldots W_n$ auf O H und auf O V mögen beziehungsweise $O,\ X_1 X_2 \ldots\ldots X_n$ und $O,\ Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ heifsen [1]).

Da die Inkrementen-Reihe auf O U aus lauter gleichen Stücken ($c \, . \, \tau$) besteht, so ist:

$$OX_1 = 1 \, . \, c\tau \, . \cos\alpha,\ OX_2 = 2 \, . \, c\tau \, . \cos\alpha \ldots\ OX_n = n \, . \, c\tau \, . \cos\alpha.$$

Da für die Inkrementen-Reihe auf O V, welche eine arithmetische Reihe I. O. ist, die Beziehung $OV_i = \frac{g}{2}(i\,\tau)^2$ besteht, so ist:

$$OY_1 = \frac{g}{2}(1 \, . \, \tau)^2 - 1 \, . \, c\tau \, . \sin\alpha,\ OY_2 = \frac{g}{2}(2 \, . \, \tau)^2 - 2 \, . \, c\tau \, . \sin\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ OY_n = \frac{g}{2}(n \, . \, \tau)^2 - n \, . \, c\tau \, . \sin\alpha.$$

Wenn α im Quadranten V' O H liegt, so sind die Längen $\frac{g}{2}(n \, . \, \tau)^2$ und $n \, . \, c\tau \sin\alpha$ zu subtrahieren: positive Werte von OY_i liegen auf der Strecke O V, negative Werte von OY_i liegen auf der Strecke O V'.

Wenn α im Quadranten H O V liegt, so sind die Längen

1) Es lag kein Bedürfnis vor die Figur 29 durch Angabe der Punkte $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$ noch komplicierter zu machen.

$\frac{g}{2}(n.\tau)^2$ *und* $n.c\tau.\sin\alpha$ *zu addieren, negative Werte von* OY_i *kommen nicht vor.*

Wenn α *von* OH *aus entgegengesetzt zu dem Sinne eines Uhrzeigers gemessen wird, so entspricht Figur 29 den Werten* $0 < \alpha < R$ *und* $3R < \alpha < 4R$.

Es ist beachtenswert, dafs $\sin\alpha$ *für* $0 < \alpha < R$ *positiv und für* $3R < \alpha < 4R$ *negativ ist, dafs also die oben gegebenen Formeln für* OY_i *ganz allgemein gelten.*

Wenn α *im zweiten oder dritten Quadranten liegt, so wiederholen sich links von* $V'V$ *dieselben Verhältnisse, welche hier für das rechte Feld dargestellt wurden.*

Bezeichnet man die Gröfsen OX_i und OY_i, welche der Zeit-Dauer $t = i.\tau$ entsprechen, beziehungsweise durch x_t und y_t, so kann man x_t und y_t als Koordinaten des Punktes W in Bezug auf das System VOH auffassen.

Während x_t *nur positive Werte annimmt, erhält* y_t *Werte, welche diesseits und jenseits von Null liegen.*

Die Bahn von W schneidet die Horizontale OH in einem Punkte, für welchen sich die Gröfse y_t, deren Wert im allgemeinen durch $\frac{g}{2}.t^2 - ct.\sin\alpha$ darstellbar ist, annulliert.

Aus $\frac{g}{2}.t^2 - ct.\sin\alpha = 0$ *folgt* $t_1 = 0$ *und* $t_2 = \frac{2c\sin\alpha}{g}$ *und diesem Werte entspricht andererseits*

$$x_{t_1} = 0 \text{ und } x_{t_2} = 2\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{c^2}{g}.\sin 2\alpha, \text{ d. h.}$$

die Bahn von W schneidet die Horizontale im Punkte O und aufserdem in einem Punkte E, der von O um $\frac{c^2}{g}.\sin 2\alpha$ entfernt ist.

Die Entfernung $OE = \frac{c^2}{g}.\sin 2\alpha$ heifst **Wurfweite** und mag mit e bezeichnet werden.

Wenn der geworfene Körper mit der Geschwindigkeit c vom Punkte O aus unter dem Winkel α *aufsteigt, so trifft er die Horizontal-Ebene von O aufserdem in einem Punkte E, der von O um* $OE = \frac{c^2}{g}.\sin 2\alpha$ *entfernt ist.*

Für $0 < \alpha < R$ *wird dieser Punkt nach Ablauf der Zeit* $2\frac{c\sin\alpha}{g}$ *wirklich erreicht.*

Wenn α *zwischen 3 R und 4 R liegt, so mufs man sich vorstellen, dafs dieser Punkt vor Ablauf der Zeit* $2\frac{c\sin\alpha}{g}$ *erreicht worden ist.*

Errichtet man in der Mitte M von OE eine Vertikale *H'MH*

so bildet diese mit MH ein Koordinatenkreuz, für welches die Vertikal-Koordinaten des Kreuzes V O H ungeändert gelten, während die Horizontal-Koordinaten des Kreuzes alle um $\frac{OE}{2} = \frac{c^2}{2g} . \sin\alpha$ geändert erscheinen, d. h. aus x_t in ξ_t übergehen.

Eleminiert man nun t aus $\xi_t = x_t - \frac{c^2}{2g} . \sin 2\alpha$ und $y_t = \frac{g}{2} . t^2 - ct \sin\alpha$, so gelangt man zu einer diophantischen Gleichung zwischen ξ_t und y_t, welche folgendermafsen lautet:

$$\xi^2_t = \left(y_t + \frac{c^2}{2g} . \sin^2\alpha\right) \frac{2c^2}{g} . \cos^2\alpha.$$

Für jeden Wert von y erhält man zwei Werte von ξ_t, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, d. h. die Grade *H'*M*H* ist Normal-Diametral-Achse der Bahn von W.

Wenn man die Figur in der Graden H'MH durchschneidet, so zerlegt man die Bahn in zwei kongruente Teile.

Für Werte von y_t, welche kleiner als $-\frac{c^2}{2g} . \sin\alpha$ sind, wird ξ^2_t negativ und demnach ξ_t imaginär, so dafs $-\frac{c^2}{2g} . \sin\alpha$ der kleinste Wert ist, den y_t annehmen kann.

Dieser Wert $h = \frac{c^2}{2g} . \sin\alpha$ stellt die gröfste Erhebung der Bahn über die Horizontal-Ebene dar und wird **Wurfhöhe** genannt.

Zieht man durch den höchsten Punkt *Ω* der Bahn eine Horizontale *Ξ'ΩΞ*, so bildet dieselbe mit *H*M*H'* ein Kreuz, in Bezug auf welches die Horizontal-Koordinaten des Kreuzes *H*MH ungeändert bleiben, während die Vertikal-Koordinaten desselben um $\frac{c^2}{2g} . \sin^2\alpha$ geändert erscheinen, so dafs y_t in η_t übergeht.

Für das Kreuz *ΞΩH* gilt als diophantische Gleichung

$$\xi^2_t = 2\,\eta_t . \frac{c^2}{g} . \cos^2\alpha.$$

Dieselbe stellt einen bestimmten geometrischen Ort (Kurve) dar, welcher **Parabel** genannt wird.

Die Gestalt der Kurve ist nur von der Gröfse $\frac{c^2}{g} . \cos^2\alpha$ *abhängig: diese Gröfse heifst der* P a r a m e t e r *der Parabel.*

Der Punkt Ω, welcher Scheitel genannt wird, zerlegt die Bahn in zwei kongruente Teile, welche Ä s t e *heifsen.*

Die Linie ΩH, welche A c h s e *genannt wird, zerlegt die von der Bahn umschlossenen Fläche in zwei kongruente Teile.*

Die **Parabel** gehört zu den **Kegelschnitten,** welche auch **Kurven zweiten Grades** heifsen.

Wenn ein Kreiskegel durch eine Ebene (E) geschnitten wird,

welche einer Seite (c) desselben parallel ist, so entsteht eine Parabel. In jedem andern Falle ist die Schnittkurve entweder eine Ellipse oder ein Hyperbel.

Dreht man die Ebene (E) der Parabel um eine, in ihr gelegene Grade, welche die zugehörige Seite (e) des Kegels unter rechtem Winkel kreuzt, ohne die Bewegung umzukehren, bis dieselbe wiederum ihre erste Lage annimmt, so stellen die entsprechenden Schnitte im Kegel je nach dem Sinne der Drehung erst eine Schar von geschlossenen Kurven und dann eine Schar von offenen Kurven oder erst eine Schar von geschlossenen Kurven und dann eine Schar von offenen Kurven dar.

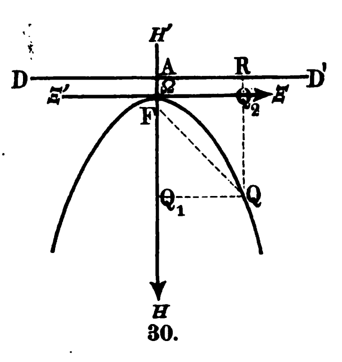
Die Schar der geschlossenen Kurven, welche **Ellipsen** *heifsen, wird von der Schar der offenen Kurven, welche* **Hyperbeln** *heifsen, durch je eine Parabel getrennt.*

Die Arten der Kegelschnitte lassen sich auf sehr verschiedene Weise im systematischen Zusammenhange einführen. So gilt z. B. Folgendes: Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkte (Fokus) und von einer gegebenen Graden (Direktrix) ein konstantes Verhältnis m:n haben, ist ein Kegelschnitt.

Für die Ellipse ist $\frac{m}{n}$ *ein echter Bruch, für die Hyperbel ist* $\frac{m}{n}$ *ein unechter Bruch, für die Parabel hat* $\frac{m}{n}$ *den Wert „Eins".*

Die **Parabel** ist der geometrische Ort aller der Punkte, welche von einer gegebenen Graden (Direktrix) und von einem gegebenen Punkte (Fokus) gleichen Abstand haben.

Man führt zweckmäfsiger Weise ein Kreuz ΞΩH (Figur 30) ein, dessen Anfangs-Punkt die Entfernung (p) des gegebenen Punktes F von der gegebenen Graden D D' halbiert, während die Achsen beziehungsweise parallel und senkrecht zu der gegebenen Graden D D' sind. Ein Punkt Q des gesuchten Ortes wird durch die Mafs-Zahlen ξ und η von QQ_1 *und* QQ_2 *in seiner Lage bestimmt, während man weifs, dafs die Abstände QF und QR einander gleich sind.*



30.

Man hat also:

$$\overline{QQ}_1^2 + (\Omega Q_1 - \Omega F)^2 = \overline{QF}^2 = \overline{QR}^2 = (QQ_2 + Q_2R)^2$$

$$\text{d. h. } \xi^2 + \left(\eta - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\eta + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ oder}$$

$$\xi^2 = 2\eta . p.$$

Die Mafs-Zahlen von QQ_1 *und* QQ_2 *müssen also der diophantische Gleichung* $\xi^2 = 2\eta . p$ *genügen, d. h. der gesuchte*

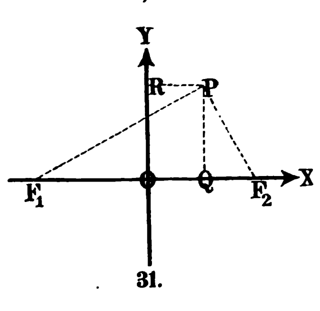
geometrische Ort ist die Kurve, welche auch bei dem Problem der Wurf-Bewegung gefunden wurde.

Man hat dort $p = \frac{c^2}{g} \cdot \cos^2 \alpha$ *zu setzen.*

Wenn die beiden Abstände QF *und* QR, *welche für die Parabel stets einander gleich und demnach in* $1:1$ *proportional sind, ein bestimmtes Verhältnis haben, welches gröfser oder kleiner als Eins ist, so bildet die stetige Reihe der Punkte* Q, *wie schon bemerkt wurde, einen Kegelschnitt, der entweder* $\left(\frac{QF}{QR} < 1\right)$ *als Ellipse oder* $\left(\frac{QF}{QR} > 1\right)$ *als Hyperbel zu bezeichnen ist.*

Statt dessen kann man auch auf dem folgenden Wege zu den diophantischen Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel gelangen.

Wenn man den geometrischen Ort aller Punkte sucht, für welche die Abstände (PF_1 *und* PF_2) *von zwei festen Punkten* F_1 *und* F_2 *a) stets dieselbe Summe, b) stets dieselbe Differenz, c) stets dasselbe Produkt, d) stets denselben Quotienten habe, so gelangt man a) zu einer Ellipse, b) zu einer Hyperbel, c) zu einer Lemniskate, d) zu einem Kreise.*



31.

a) Für die Ellipse ist $F_1P + PF_2$ *eine Konstante, welche* $2a$ *heifsen mag. (Figur 31).*

Bezeichnet man den Abstand F_1F_2 *durch* $2c$, *so hat man für ein Achsen-Kreuz, welches durch die Mitte* (Q) *von* F_1F_2 *geht, die Beziehung*

$$F_1P + F_2P = 2a = \sqrt{y^2 + (c+x)^2} + \sqrt{y^2 + (c-x)^2}.$$

Dieselbe führt durch Umformung ($a > c$) *zur diophantischen Gleichung:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Die Gröfsen $2a$ *und* $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ *heifsen* A c h s e n *der Ellipse.*

b) für die Hyperbel ist $F_1P - F_2P$ *eine Konstante, welche* $2a$ *heifsen mag.*

Hier ist bei gleicher Achsen-Lage:

$$F_1P - F_2P = 2a = \sqrt{y^2 + (c+x)^2} - \sqrt{y^2 + (c-x)^2}.$$

Diese Bezeichnung führt durch Umformung ($c > a$) *zur diophantischen Gleichung:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Die Gröfsen $2a$ *und* $2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$ *heifsen* A c h s e n *der Hyperbel.*

c) Für die Lemniskate ist $F_1P \cdot F_2P$ *eine Konstante, welche* a^2 *heifsen mag.*

Hier ist bei gleicher Achsen-Lage:

$$F_1 P . F_2 P = a^2 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2} . \sqrt{y^2 + (c - x)^2}.$$

Diese Beziehung führt durch Umformung zur diophantischen Gleichung:

$$a^4 = x^4 + y^4 + 2 x^2 y^2 + 2 c^2 y^2 - 2 c^2 x^2 + c^4.$$

d) Hat man $F_1 P : F_2 P = m : n$ gegeben, so gehen die Halbierungs-Linien der Winkel bei P für jedes Dreieck $F_1 P F_2$ durch zwei feste Punkte J und U auf $F_1 F_2$ so zwar, dafs

$F_1 J : F_2 J = F_1 U : F_2 U$ *ist.*

Der Ort für P ist ein Kreis über den zugeordneten Punkten J und U der harmonischen Teilung F_1, J, F_2, U: derselbe heifst der harmonische Kreis oder der Kreis des Apollonius.

B. **Die schiefe Ebene.** Wenn ein physischer Körper in der Nähe der Erdoberfläche auf einer (gegen den Horizont) geneigten Ebene hinabgleitet, ohne dabei zu rollen, so wird jeder Punkt des Körpers im allgemeinen gezwungen, eine Grade zu durchlaufen, welche die Neigung der Ebene hat.

Wenn Punkte eines schweren Körpers auf einer graden Linie zu bleiben gezwungen sind, so tritt eine **Zerlegung** von Bewegungen ein.

Die Theorie der schiefen Ebene, an welcher hier die Zerlegung von Beschleunigungen gezeigt werden soll, hat ein gewisses historisches Interesse:

Galilei leitete (1602) zum ersten Male die Gesetze des freien Falles (vergl. S. 194) ab, indem er Metallkugeln in Rinnen, welche mit glattem Pergament ausgekleidet waren, herabrollen liefs, so dafs also deren Mitten nahezu auf einer graden Linie zu verharren gezwungen waren.

Wenn ein Punkt P, welcher eine vertikal nach unten gerichtete Beschleunigung [g] besitzt, gezwungen ist, auf einer graden Linie zu bleiben, welche mit dem Horizonte den Winkel δ bildet, so wird eine Zerlegung von [g] parallel und senkrecht zu der Graden, beziehungsweise Komponenten vom Werte $g \sin\delta$ und $g \cos\delta$ liefern.

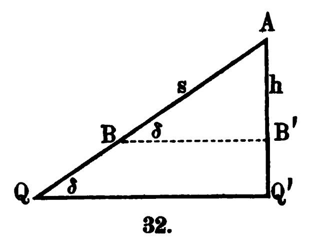
Der Zwang, welcher für den Mittelpunkt der Kugel die gerade Linie als Bahn feststellt, vernichtet die normale Komponente $g \cos\delta$, so dafs P mit einer Beschleunigung von constantem Werte $g \sin\delta$ auf der Graden hinabgleitet.

Es resultiert also eine gleichmäfsig geänderte Bewegung mit dem Beschleunigungs-Werte $g \sin\delta$, für welche natürlich die oben entwickelten Gesetze gelten.

Hier stellt $s . \sin\delta$ die Vertikal-Projektion (Höhe) des durchlaufenen Weges AB dar, welche mit h bezeichnet werden mag. Man hat dann:

$$v^2_t - v^2_o = 2 (g . \sin\delta) s = 2 g . (s . \sin\delta) = 2 g . h.$$

Wenn also ein zweiter Punkt P′ in A mit der Anfangs-Geschwindigkeit v_o zu fallen beginnt, so hat derselbe in B′ die-



32.

jenige End-Geschwindigkeit, welche P in B hat. (Figur 32).

Wenn man demnach von A aus auf verschiedenen Strahlen $AQ_1, AQ_2 \dots AQ_n$ Punkte $P_1, P_2 \dots P_n$ mit derselben Anfangs-Geschwindigkeit $[v_o]$ unter der Vertikal-Beschleunigung [g] herabgleiten läfst, so langen dieselben alle in derselben Horizontal-Ebene mit derselben End-Geschwindigkeit $[v_t]$ an und zwar ist diese gleich der End-Geschwindigkeit eines unter gleichen Bedingungen senkrecht herabfallenden Punktes.

Man darf hier nicht schliefsen, dafs alle Punkte P_i in demselben Zeit-Momente durch dieselbe Horizontal-Ebene gehen.

Die Entscheidung liegt in der Formel $\frac{v_t - v_o}{g \cdot \sin\delta} = t$, d. h. die Zeit, welche zur Erreichung desselben v_t notwendig ist, steht zu $\sin\delta$ in umgekehrter Proportion. Diese Zeit-Dauer ist um so geringer, je gröfser δ ist und erreicht ihr Minimum für $\delta = 90^0$ (d. h. beim freien Fall) und ihr Maximum für $\delta = 0^0$, d. h. beim Fallen auf einer Horizontal-Graden, wo der Wert $t = \infty$ die Existenz einer Ruhelage anzeigt.

Dieselbe Betrachtung gilt auch unter gleichen Umständen für die Aufwärts-Bewegung von Punkten $P_1, P_2 \dots P_n$ auf einem von A ausgehenden Strahlen-Bündel $AQ_1, AQ_2 \dots AQ_n$, wobei nur $-g$ in Rechnung zu bringen ist.

Es liegt nun sehr nahe, die Frage aufzustellen, auf welchen Flächen sich bei dieser Betrachtung die einzelnen Punkte $P_1, P_2 \dots P_n$ in einem und demselben Zeit-Momente befinden.

Auf dem Vertikal-Strahle (freier Fall) entspricht der Zeit-Dauer d das Bahnstück $s_o = d \cdot v_o + \frac{d^2}{2} \cdot g$, auf einem andern Strahle (δ), welcher mit dem Vertikal-Strahle den Winkel $90 - \delta$ bildet, entspricht der Zeit-Dauer d das Bahnstück

$$s_\delta = d \cdot v_o + \frac{d^2}{2} \cdot g \cdot \sin\delta.$$

Wenn $v_o = 0$ ist, so entspricht auf dem Vertikal-Strahle (freier Fall) der Zeit-Dauer d das Bahnstück $s_o = \frac{d^2}{2} \cdot g$, während auf dem Strahle (δ) das Bahnstück $s_\delta = \frac{d^2}{2} \cdot g \cdot \sin\delta$ durchlaufen wird.

Man bemerkt, dafs $s_\delta = \frac{d^2}{2} \cdot g \cdot \cos(90 - \delta)$ die Projektion von $s_o = \frac{d^2}{2} \cdot g$ ist, dafs also die Punkte der verschiedenen Strahlen zu derselben Zeit auf einer und derselben aus A konstruierten

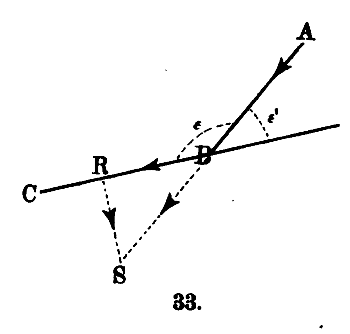
Kugel liegen, deren Durchmesser die entsprechende Fall-Strecke (s_0) auf dem Vertikal-Strahle ist.

Wenn die Anfangs-Geschwindigkeit $\lesseqgtr 0$ ist, so führt die Untersuchung über die Fläche, welche einem bestimmten Zeit-Momente entspricht, zu keinem eleganten Resultate.

Wenn ein Punkt einen stumpfen Winkel ABC durchlaufen soll, so tritt unter sonst gleichen Umständen beim Übergange in B ein Verlust an Geschwindigkeit ein. (Figur 33).

Wenn BS der Geschwindigkeit v in B proportional ist, so läfst sich BS in BR und RS zerlegen.

Die eine Komponente RS wird durch die starre Grade BC aufgehoben, so dafs nur eine Geschwindigkeit $v \cdot \cos \varepsilon'$, proportional zu BR, in Wirkung bleibt.



33.

Wenn ein Punkt ein Polygon-Stück $W_0 W_1, W_2 \ldots . W_{n+1}$ durchläuft, dessen Winkel $\varphi_1, \varphi_2 \ldots . \varphi_n$ durchweg stumpf sind, so ist ein Geschwindigkeits-Verlust

$$v - v \cdot \cos\varphi'_1 \cdot \cos\varphi'_2 \ldots . \cos\varphi'_{n-1} \cos\varphi'_n$$

in Rechnung zu bringen.

Ein spitzer Winkel kann nur durchlaufen werden, wenn der vorhandenen Geschwindigkeit eine Komponente zugesetzt wird.

Wird ein spitzer Winkel wirklich durchlaufen, so hat ein Gewinn an Geschwindigkeit (Vorzeichen des Kosinus) stattgefunden.

Geht das Polygon-Stück in eine **Kurve ohne Spitze** über, so tritt **kein Geschwindigkeits-Verlust** ein.

Wenn man auf dem endlichen Kurven-Stücke eine Inkrementen-Reihe abgrenzt, für welche $\varphi'_1 = \varphi'_2 = \ldots . \varphi'_{n-1} = \varphi'_n = \varphi'$ ist, so hat man in $\varphi' \cdot n = \varepsilon'$ den Winkel gegeben, den $W_0 W_1$ und $W_n W_{n+1}$ mit einander bilden.

Der Geschwindigkeitsverlust

$$v - v \cdot (\cos\varphi')^n = v - v \cdot \left(\cos\left[\frac{\varepsilon'}{n}\right]\right)^n$$

ist hier Null, weil $\lim \left(\cos\left[\frac{\varepsilon'}{n}\right]\right)^n = 1$ *ist.*

Man hat nämlich:

$$\left(\cos\left[\frac{\varepsilon'}{n}\right]\right)^n = \left(\sqrt{1 - \sin^2\left[\frac{\varepsilon'}{n}\right]}\right)^n = \left(1 - \sin^2\frac{\varepsilon'}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Bewegt sich ein Punkt eines physischen Körpers in der Nähe der Erdoberfläche nur unter dem Einflusse der Beschleunigung g, so hat derselbe in jeder Horizontal-Ebene dieselbe Geschwindigkeit,

wie ein Punkt, welcher unter gleichen Umständen in vertikaler Richtung geworfen wird.

Man beweist diesen Satz leicht, indem man die Bahn durch ein Polygon-Stück ersetzt, für jede Seite desselben die oben entwickelte Formel $v^2_t - v^2_0 = 2gh$ in Anwendung bringt und dabei beachtet, dafs auf einer Kurve kein Geschwindigkeits-Verlust stattfindet.

Bei der Wurf-Bewegung ist $v = \sqrt{c^2 + 2g.y_t}$ oder $v^2 - c^2 = 2g.y_t$.

Dabei bedeutet y_t die vertikale Ordinate für eine beliebige Wurf-Bewegung oder auch das Bahnstück, auf welchem bei vertikalem Wurfe die Geschwindigkeit v_0 in die Geschwindigkeit v_t übergeht.

Die Centra von Kugeln, welche in glatten, stetig gekrümmten Rinnen von verschiedener Gestalt hinabrollen, führen Bewegungen aus, welche das Entwickelte in einer gewissen Annäherung veranschaulichen, obwohl der Widerstand der Luft und die Reibung auf der Unterlage nicht unerhebliche Abweichungen bedingen.

Die Verkleinerung der Beschleunigung, welche dem Widerstande der Luft entspricht, hängt von der Geschwindigkeit der Bewegung ab: sie läfst sich in einer gewissen Annäherung dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional setzen.

Die Verkleinerung der Beschleunigung, welche der Reibung entspricht, läfst sich für jedes Bahn-Element der Normal-Komponente der Beschleunigung proportional setzen, welche dasselbe vermöge seiner Festigkeit aufhebt

Für die Bewegung auf einer geneigten Graden (δ) war diese Komponente als $g \cos \delta$ bestimmt worden, so dafs die Reibung als $k.g \cos \delta$ einzuführen ist.

Die Gesamt-Beschleunigung ist also hier nicht g, sondern $g.\sin\delta - k.g.\cos\delta = g(\sin\delta - k.\cos\delta)$, d. h. es entsteht eine gleichmäfsig beschleunigte oder eine gleichmäfsig verzögerte Bewegung, deren Beschleunigung kleiner als $g \sin\delta$ ist.

Wenn $k = \tan g\,\delta$ ist, so werden die Bewegungen gleichförmig: es giebt für jeden Proportionalitäts-Faktor k einen Winkel δ, für welchen dies eintritt.

§. 11. Die Normal-Beschleunigung der Bewegung.

1.

Die Sätze über die Bildung von Resultanten und Komponenten gestatten eine Befreiung von der Voraussetzung, dafs die Bahn der Bewegung völlig gegeben ist, und führen damit einerseits zu einer gewissen Abrundung der Fundamental-Methode, während sie andererseits zu den andern Methoden überleiten.

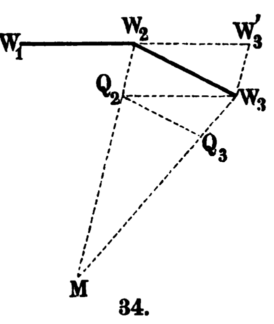
Wenn ein Punkt P die gebrochene Linie AW_1B durchläuft, so besitzt er in W_1 eine Geschwindigkeit, welche die Richtung von

AW_1 hat, während er in B eine Geschwindigkeit besitzt, welche mit der Richtung von W_1B übereinstimmt, so daſs in W_1 jedenfalls eine Änderung der Geschwindigkeits-Richtung (ganz abgesehen von einer Änderung ihres Wertes) festzustellen ist. Diese Änderung kann man dadurch entstanden denken, daſs P in W_1 einerseits die Geschwindigkeit aus AW_1 beibehielt, andererseits aber mit einer neuen Geschwindigkeit versehen wurde, so daſs beide zusammen die resultierende Richtung W_1B bestimmen.

Wenn man diese Vorstellung auf eine Bewegung ganz besonderer Art anwendet, so gelangt man zu weitgehenden Aufschlüssen über die allgemeine Natur von Bewegungen.

Der Spezialfall, von welchem ausgegangen werden soll, ist die gleichförmige Bewegung eines Punktes P auf einem regulären Polygone $W_1W_2 \ldots . W_n$.

Wenn P die Seite W_1W_2 mit dem konstanten Geschwindigkeits-Werte c durchlaufen hat, wozu er die Zeit-Dauer $\tau = \frac{W_1W_2}{c}$ braucht, so würde er in dem nächsten Zeitteile [τ], wenn keine Richtungs-Änderung der Geschwindigkeit gefordert wäre, das Bahnstück $W_2W'_3 = c \cdot \tau = W_1W_2$ durchlaufen, während er in der That auf W_2W_3 nach W_3 gelangt. Diese Änderung der Richtung kann man durch den Zusatz einer Strecke W_2Q_2 bewirkt denken, auf welcher P gleichzeitig mit seiner Bewegung auf $W_2W'_3$ und zwar mit dem konstanten Geschwindigkeits-Werte $c' = \frac{W_2Q_2}{\tau}$ fortschreitet. (Figur 34).



34.

Innerhalb dieser Vorstellung müſste ebenso in W_3 ein konstanter Geschwindigkeits-Wert $c' = \frac{W_3Q_3}{\tau}$ in der Richtung W_3M in Rechnung gebracht werden u. s. f.

Die in Rede stehende Bewegung läſst sich also herleiten, wenn P seine Bewegung auf der Strecke W_1W_2 mit der konstanten Geschwindigkeit $c = \frac{W_1W_2}{\tau}$ beginnt und immer nach Ablauf der Zeit-Dauer τ eine nach M gerichtete Zusatzgeschwindigkeit erhält, deren konstante Gröſse $c' = \frac{W_2Q_2}{\tau}$ ist.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke W_2MW_3 und $W_2W_3Q_2$ folgt nun:

$$\frac{W_2Q_2}{W_2W_3} = \frac{W_2W_3}{W_2M}.$$

Bezeichnet man W_2M mit r, so hat man

$$W_2 Q_2 = \frac{\overline{W_2 W_3}^2}{r} = \tau^2 . \left(\frac{c^2}{r}\right) \textit{ und}$$

$$c' = \tau \left(\frac{c^2}{r}\right).$$

Hier tritt also der höchst bemerkenswerte Umstand ein, dafs sich die **Bahn** der Bewegung herleiten läfst, sobald man nur $W_1 W_2$ und M der Lage nach kennt und aufserdem die $W_1 W_2$ entsprechende Zeit-Dauer τ festzustellen im Stande ist.

Andererseits fordern die hier gegebenen Verhältnisse zu einer Vergleichung mit Bewegungen heraus, bei denen die τ entsprechende mittlere Beschleunigung konstant ist, weil in beiden Fällen in gleichen Zeit-Intervallen immer Geschwindigkeiten von gleichem Werte hinzugefügt werden.

In der That charakterisiert sich $\frac{c^2}{r} = \frac{W_2 Q_2}{\tau}$ durch seine Dimension als Beschleunigungs-Wert.

Der fundamentale Unterschied dabei ist nur der, dafs dort die Zusatz-Geschwindigkeiten gewissermafsen **innerhalb** der Bahn liegen, dafs dort ihre Richtungen, genauer gesagt, **Tangenten** der Bahn sind, während hier Zusatz-Geschwindigkeiten auftreten, deren Richtungen die Bahn schneiden.

Dabei mufs in Erinnerung gebracht werden, dafs die Verbindungs Linie $W_1 W_2$ von zwei Kurven-Punkten, d. h. eine bestimmte Sekante der Kurve zur Tangente wird, wenn W_2 so nahe an W_1 herantritt, dafs $W_1 W_2$ in das Element $[s_2]$ übergeht.

Im **Gegensatz zu den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen**, welche bisher auftraten, lernt man also im Hinblick auf die eben durchgeführte Zerlegung **andere Geschwindigkeiten und Beschleunigungen** kennen, welche zunächst nur dadurch charakterisiert sind, dafs ihre **Richtungen nicht Tangenten der Bahn** sind und welche im Übrigen die **Bahn selbst** in gewisser Beziehung zu **bestimmen** scheinen.

Da die Gröfse $\frac{c^2}{r}$ nicht von der Seiten-Zahl des Polygons abhängt, so tritt dieselbe Gröfse auch für Polygone von sehr grofser Seiten-Zahl und im Grenzfalle auch für den Kreis in Rechnung.

Für den Grenzfall genügt es irgend einen Punkt W_1, die Geschwindigkeit $[c]$ und den Abstand r gegeben zu denken.

Hier tritt immer nach Ablauf der Zeit-Dauer τ eine nach dem Centrum gerichtete Zusatz-Geschwindigkeit von der Gröfse $\tau \left(\frac{c^2}{r}\right)$ auf und dadurch bestimmt sich die Bahn als Kreis-Peripherie.

Der Grenzfall des Kreises ist von hoher Bedeutung.

Die Richtung der Zusatz-Geschwindigkeit schneidet hier die Bahn stets unter einem rechten Winkel und deshalb darf man hier von stetig hinzugesetzten Normal-Geschwindigkeiten, d. h. von einer **Normal-Beschleunigung** sprechen.

Der **Wert** der Normal-Beschleunigung ist durch $\frac{c^2}{r}$ gegeben, während sich die **Richtung** desselben stets als PM darstellt.

Die Geschwindigkeit (c) innerhalb der Bahn, welche nun **Tangential-Geschwindigkeit** genannt werden soll, reicht bei **gegebener** Bahn zur Bestimmung der Bewegungs-Verhältnisse aus.

Der Geschwindigkeits-Zusatz $\left(\tau \cdot \frac{c^2}{r}\right)$, welcher der Normal-Beschleunigung $\left(\frac{c^2}{r}\right)$ proportional ist, stellt die Bahn selbst fest, indem er von Element zu Element deren Abweichung von der geraden Linie bestimmt.

Das gilt zunächst nur für den Specialfall der gleichförmigen Kreis-Bewegung, während andererseits eine Erweiterung dadurch möglich erscheint, dafs man die Geschwindigkeits-Werte innerhalb der Bahn und aufserdem die entsprechenden Zusatz-Geschwindigkeiten in Wert und Richtung von Punkt zu Punkt veränderlich denkt.

Man pflegt diesen Verhältnissen auch folgenden Ausdruck zu geben: Die Tangential-Geschwindigkeit bestimmt die Gesetze des Fortschreitens in der Bahn, die Zusatz-Geschwindigkeiten in Richtung der Normalen bestimmen den Übergang von einer Tangente zur andern.

Um eine solche Erweiterung herzuleiten, denkt man eine beliebige Bahn in Elemente zerlegt. Wenn man nun je zwei Nachbar-Elemente zu Sehnen je eines Kreises macht, so bestimmen die einzelnen Elementen-Paare eine Reihe von Kreisen, deren jeder mit der Bahn drei benachbarte Punkte gemein hat.

Ein solcher Kreis soll der zum Punkte W_k gehörige **Krümmungs-Kreis** genannt werden, wenn die Elemente $W_{k-1}W_k$ und W_kW_{k+1} Sehnen desselben sind.

Durch 3 Punkte ist ein Kreis völlig bestimmt.

Der Unzuträglichkeit, dafs hier in Bezug auf die Bahn zu drei Punkten ein Kreis und zu einem Kreise demnach drei Punkte gehören, tritt die Festsetzung entgegen, welche stets den ***mittleren*** *der drei Punkte als* ***zugehörigen*** *Punkt herausgreift und so die Eindeutigkeit der gegenseitigen Beziehungen zwischen Bahn-Punkten und Krümmungs-Kreisen wahrt.*

Wenn man zu jedem Punkte der Bahn den Krümmungs-Kreis konstruiert denkt, so gelangt man zu einer Kurve, die aus lauter Centren von Krümmungs-Kreisen (Krümmungs-Centren) gebildet wird. Die gegebene Bahn und die konstruierte Kurve heifsen in ihrer gegenseitigen Beziehung ***Evolvente*** *und* ***Evolute****, eine Bezeichnung, welche daher stammt, dafs man sich die Bahn bei ebenen Verhältnissen durch* ***Abwicklung*** *eines um die andere Kurve gelegten und stets gespannten Fadens entstanden denken kann.*

Wenn der Radius (ρ) *eines Krümmungs-Kreises* (*Krümmungs-Radius*) *unendlich grofs wird, so ist die Kurve an der entsprechenden Stelle gradlinig, wenn der Radius eines Krümmungs-Kreises unendlich klein wird, so hat die Kurve an der entsprechenden Stelle eine Spitze, in jedem Falle hat man in* $\frac{1}{\rho}$ *ein Mafs für die* K r ü m m u n g *der Kurve.*

Wenn nun die Geschwindigkeit im Punkte W_k, deren Wert $\lim\left(\frac{s_k}{\tau}\right)$ ist, für $W_k W_{k+1}$ allein mafsgebend wäre, so würde, falls $W_{k-1} W_k W_{k+1}$ eine gebrochene Linie darstellt, statt des Elementes $W_k W_{k+1}$ ein anderes Element $W_k W'_{k+1}$ durchlaufen werden, welches als Verlängerung von $W_{k-1} W_k$ erscheint.

Durch eine Zusatz-Geschwindigkeit, welche nach dem Centrum des Krümmungs-Kreises von W_k gerichtet ist, gelangt man zu der wirklichen Bewegung.

Der Wert dieser Zusatz-Geschwindigkeit berechnet sich, da hier nur der Kreis um $W_{k-1} W_k W_{k+1}$ in Frage kommt, gemäfs der vorigen Betrachtung auf $\frac{v^2_k}{\rho_k}$, falls man $\lim\left(\frac{s_k}{\tau}\right)$ für einen Augenblick mit v_k bezeichnet und für den Krümmungs-Kreis in W_k die Länge des Radius durch ρ_k ausdrückt.

Dem konstanten Werte $\frac{c^2}{r}$ *entspricht also hier der Wert* $\frac{v^2}{\rho}$, *der von Punkt zu Punkt ein anderer wird.*

Man kann dem Schlusse, welcher zu $\frac{v^2}{\rho}$ *führt, noch eine zwingendere Form geben, wenn man zunächst eine gleichförmige Bewegung auf beliebiger Bahn, bei welcher* $\lim\left(\frac{s_k}{\tau}\right) = \lim\left(\frac{s_{k+1}}{\tau}\right)$ *ist, betrachtet und die Bemerkung hinzufügt, dafs bei* **jeder** *Bahn die Einteilung in* **bestimmte** *Elemente, welche einer* **bestimmten** *Bewegung entspricht, keinen Einflufs hat auf die Lage der Krümmungs-Centra.*

Die Zusatz-Geschwindigkeit vom Werte $\tau \cdot \frac{v^2}{\rho}$ bewirkt auch im allgemeinen Falle die Überführung von Element zu Element, d. h. von Tangente zu Tangente und bestimmt somit die ganze Form der Bewegung.

Die Kenntnis der Bahn und der auf ihr gegebenen Bewegung läfst sich demnach ersetzen durch die Angabe der **Tangential-Geschwindigkeiten** und der **Normal-Geschwindigkeiten** für **jeden** Bahn-Punkt, d. h. für **jeden** Zeit-Moment, falls aufserdem noch irgend ein Punkt W_i der Bahn gegeben ist, der dem Zeit-Punkte Z_i entspricht.

Die letzte Bedingung ist nötig, um die Lage der Bahn zu

fixieren. Geht man von irgend einem beliebigen Punkte W_i aus, so giebt hier Tangential- und Normal-Geschwindigkeit die Lage des folgenden Elementes an.

Dieselben Verhältnisse sind auch durch Angabe der **Tangential-Beschleunigungen** und der **Normal-Beschleunigungen** für **jeden** Bahn-Punkt, d. h. für jeden Zeit-Moment bestimmt, falls aufserdem noch irgend ein Punkt W_i der Bahn gegeben ist, der dem Zeit-Punkte Z_i entspricht und falls aufserdem die Geschwindigkeit für diesen Punkt bekannt ist.

Die letzte Bedingung ist nötig, um die Lage und Gröfse des Elementes $W_{i-1} W_i$ und damit die Lage der Bahn und die Bewegungs-Verhältnisse auf derselben herzuleiten.

Ist z. B. $\alpha[s_i] = 4 \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \, . \, (\text{Sekunde})}$ gegeben, so läfst sich s_i erst dann berechnen, wenn man aufserdem noch s_{i-1} kennt, weil $\alpha[s_i]$ erst durch s_i und s_{i-1} gegeben ist.

Dieselben Verhältnisse liefsen sich unter Hinzunehmen weiterer Bedingungen auch durch **Tangential-Beschleunigungen** und **Normal-Beschleunigungen** höherer Ordnung darstellen, doch erreicht man dabei für physische Bewegungen keinen Vorteil der Darstellung.

Da die physischen Bewegungen auf elementare Bewegungen zurückgeführt werden können, bei denen grade der Wert der Beschleunigung I. O. den grofsen Vorzug geniefst ***nur*** *von den Mafs-Zahlen der Lage und erst* ***durch*** *diese von der Zeit-Dauer abhängig zu sein, so arbeitet man hier unter den günstigsten Verhältnissen, wenn man grade die Beschleunigungen I. O. für die Darstellung wählt.*

Wenn man die **Normal-Beschleunigung** für einen Punkt der Bahn mit $[a_N]$ bezeichnet, so dafs $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ ist, und wenn man ferner die entsprechende **Tangential-Beschleunigung** mit $[a_T]$ bezeichnet, so dafs a_T die früher mit a bezeichnete Gröfse ist, so stellt

$$\sqrt{a^2_N + a^2_T} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + a^2}$$

einen Beschleunigungs-Wert dar, welcher der geometrischen Summe von $[a_N]$ und $[a_T]$, d. h. der **Gesamt-Beschleunigung** in jenem Bahn-Punkte entspricht.

Diese ***Gesamt-Beschleunigung*** *im Punkte W_i hat im allgemeinen* ***nicht*** *die Richtung eines dem Punkte W_i benachbarten Elementes, während die* ***Gesamt-Geschwindigkeit*** *im Punkte W_i, welche aus der* ***Tangential-****Geschwindigkeit für $[s_i]$ und der* ***Zusatz-Komponente*** *in W_i resultiert, nichts anderes ist als die* ***Tangential-Geschwindigkeit*** *für $[s_{i+1}]$.*

Die Zerlegung der Geschwindigkeiten in tangentiale und normale Komponenten hat daher nicht die fundamentale Bedeutung, welche die gleiche Zerlegung der Beschleunigungen hat: die Gesamt-Geschwindigkeit des einen Elementes ist zugleich die Tangential-Geschwindigkeit des nächsten Elementes.

Es genügt daher nach wie vor schlechthin von der Geschwindigkeit im Punkte W_i zu sprechen.

Wenn für P die **Gesamt-Beschleunigung** für **jeden** Zeit-Moment und aufserdem **ein** Bahn-Punkt W_i, welcher dem Zeit-Momente Z_i entspricht, so wie die **Geschwindigkeit in W_i** bekannt ist, so ist die Bewegung des Punktes P vollständig gegeben.

Die Geschwindigkeit in W_i bestimmt im Verein mit W_i der Gröfse und Lage nach das Element $W_i W'_{i+1}$, welches durchlaufen würde, wenn für den Punkt W_i nicht aufserdem durch die Gesamt-Beschleunigung eine Zusatz-Geschwindigkeit von irgend einer Richtung $W_i S$ bestimmt würde, deren Vereinigung mit $\lim \frac{[s_k]}{\tau}$ das Element $W_i W_{i+1}$ entstehen läfst, von dem aus der Übergang zu W_{i+1}, W_{i+2} dann in gleicher Weise erfolgt etc.

Die Gesamt-Beschleunigung im Punkte W_i läfst sich in ihre beiden Komponenten zerlegen, sobald die Richtung von W_{i-1}, W_i gegeben ist.

Bildet die Gesamt-Beschleunigung $\bar{a}$ mit dem Elemente den Winkel α, so hat man $a \,.\, \cos\alpha = a_T$ und $a \,.\, \sin\alpha = a_N$ gegeben.

So oft die Richtung der Gesamt-Beschleunigung in W_k mit der Richtung von $W_{k-1} W_k$ zusammenfällt, so oft ist für W_k anzusetzen: $a_T = \bar{a}$ und $a_N = 0$.

So oft die Richtung der Gesamt-Beschleunigung in W_k die Richtung von $W_{k-1} W_k$ senkrecht schneidet, so oft ist für W_k anzusetzen: $a_T = 0$ und $a_N = \bar{a}$.

So lange $\mathbf{a_N = o}$ ist, so lange findet kein Übergang von einer Tangente zur andern statt, d. h. so lange ist die Bahn $\left(\frac{v^2}{\rho} = 0, \text{ d. h. } \rho = \infty\right)$ **gradlinig.**

So lange $\mathbf{a_T = o}$ ist, so lange findet kein Zusatz der Geschwindigkeit in Richtung der Tangente statt, d. h. so lange ist die Bewegung $\left[o = \lim \left(\frac{\varphi[s_k] - \varphi[s_{k-1}]}{\tau}\right)\right]$ **gleichförmig.**

So lange a_N denselben Wert behält, so lange haben die Zusatz-Geschwindigkeiten in Richtung der Normale immer denselben Wert, d. h. die Bewegung hat eine gleichmäfsige Normal-Änderung.

So lange a_T denselben Wert behält, so lange haben die Zusatz-Geschwindigkeiten in Richtung der Bahn immer denselben Wert, d. h. die Bewegung ist (in tangentialer Hinsicht) gleichmäſsig geändert.

Wenn a_N eine Konstante ist und auch v immer denselben Wert behält, so ist $\frac{v^2}{\rho}$ = constans, d. h. ρ = constans.

*Hier ist die Bahn ein **Kreis**, auf welchem eine **gleichförmige** Bewegung stattfindet und daraus folgt, daſs man auf einem Kreise keine ungleichförmige Bewegung von gleichmäſsiger Normal-Änderung erzeugen kann.*

Die Existenz einer krummlinigen Bewegung zeigt an, daſs hier eine bestimmte, nach dem Krümmungs-Centrum gerichtete, Normal-Beschleunigung verwendet worden ist, um eine gewisse Krümmung herzustellen, daſs also aus der gegebenen Gesamt-Beschleunigung eine bereits verwendete **centripetale Komponente** für alle weitern Bestimmungen ausgeschieden oder auch, daſs zu der gegebenen Gesamt-Beschleunigung eine entgegengesetzt gerichtete **centrifugale Komponente** von gleichem Werte hinzugefügt werden muſs.

Die Gesamt-Beschleunigung, vermindert um die centripetale Komponente oder vermehrt um die centrifugale Komponente, giebt die noch verwendbare Beschleunigung an, während jene Komponente die bereits (zur Herstellung der Krümmung) verwendete Beschleunigung miſst.

2.

A. Die Centripetal-Beschleunigung in Punkten der Erd-Oberfläche. Der Mittelpunkt einer Kanonenkugel, welche am Erd-Äquator ruht, nimmt an der Drehung der Erde um deren Achse teil und beschreibt dabei einen Kreis mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{2 R \pi}{T}$, falls man den Erd-Radius für den Äquator mit R und die Umdrehungszeit der Erde mit T bezeichnet.

Hier ist also eine centripetale Beschleunigung vom Werte $\frac{c^2}{r} = \frac{4 R \cdot \pi^2}{T^2}$ verwendet worden, welche von der Gesamt-Beschleunigung der Bewegung zu entnehmen war. Diese Gesamt-Beschleunigung $[\overline{g_0}]$ ist die Beschleunigung des freien Falles, berechnet für die ruhende Erde, während die Beobachtungen diejenige Beschleunigung $[g_0]$ geben, welche bei der bewegten Ebene auftritt.

Da die Richtungen von $\left[\frac{c^2}{r}\right]$ und $[\overline{g_0}]$ zusammenfallen, so hat auch $[g_0]$ die dadurch bestimmte Richtung, während sich der Wert von $[g_0]$ als $\overline{g_0} - \frac{c^2}{r}$, d. h. als $\overline{g_0} - \frac{4 R \cdot \pi^2}{T^2}$ ergiebt.

Dasselbe Resultat stellt sich bei Addition einer centrifugalen Beschleunigung vom Werte $\frac{4\,R\,.\,\pi^2}{T^2}$ *ein.*

Da T ein Tag Sternzeit, d. h. 86400" Sternzeit oder ungefähr 86164" mittlere Zeit beträgt, so ist der Wert der Centripetal-Beschleunigung am Äquator, d. h. unter der Breite Null für mittlere Zeit

$$p_o = \frac{\pi\,.\,2\,.\,5400\,.\,7420}{(86164)^2}\;\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})} = 0{,}03391\,\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}.$$

Dabei ist der Erd-Umfang im Äquator $(2\,R\,.\,\pi)$ *zu 5400 geographischen Meilen und 1 geographische Meile zu 7420 Metern gerechnet.*

Der gröfste Teil der Beschleunigung $[\overline{g}_o]$, welcher bei der ruhenden Erde in Rechnung treten würde, bleibt auch bei der bewegten Erde verwendbar, während der Bruchteil p_o als Centripetal-Beschleunigung verloren geht.

Der durch Beobachtung gefundene Wert g_o *ist also* $\overline{g}_o - 0{,}03391$, *so dafs man*

$$\overline{g}_o = g_o + 0{,}03391 = 9{,}78009 + 0{,}03391 = 9{,}81400$$

in $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}$ *findet.*

Dafür kann man auch schreiben (da die Reduktionen $p_o = \frac{\overline{g}_o}{288{,}01}$ *und* $p_o = \frac{g_o}{289{,}79}$ *in Geltung sind)*

$$\overline{g}_o = g_o\left(1 + \frac{1}{288{,}01}\right) \text{ oder } g_o = \overline{g}_o\left(1 - \frac{1}{289{,}79}\right).$$

Führt man $g_{45} = 9{,}80552$ *ein, so gelangt* $\left(p_o = \frac{g_{45}}{289{,}17}\right)$ *man zu*

$$\overline{g}_o = g_{45}\left(1 + \frac{1}{289{,}17}\right).$$

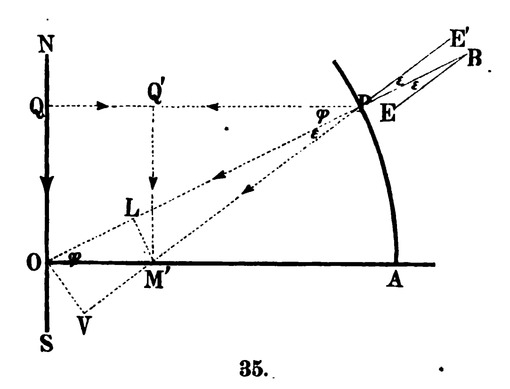
Für andere Breiten gelten übrigens ähnliche Überlegungen: Ein Punkt P, welcher in der Breite φ liegt, beschreibt bei der Umdrehung der Erde einen Kreis mit dem Radius $R_\varphi = R\,.\cos\varphi$, so dafs hier eine Centripetal-Beschleunigung

$$p_\varphi = \frac{4\,R_\varphi\,.\,\pi^2}{T^2} = p_o\,.\,\cos\varphi$$

in Rechnung kommt.

Die geometrische Subtraktion der Komponente $[p_\varphi]$ von der Gesamt-Beschleunigung $[\overline{g}_\varphi]$ erfordert hier eine Polygon-Bildung, da $[p_\varphi]$ auf der Erd-Achse senkrecht steht, während $[\overline{g}_\varphi]$ nach

dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist. Man hat infolgedessen, da $[p_\varphi]$ und $[\overline{g}_\varphi]$ den Winkel φ bilden, von $[\overline{g}_\varphi]$ eine unter den Winkel φ gegen $[\overline{g}_\varphi]$ geneigte Komponente von dem Werte p_φ abzuspalten, um das zu beobachtende $[g_\varphi]$ zu erhalten, dessen Richtung mit der Richtung von $[\overline{g}_\varphi]$ nicht übereinstimmt.



35.

Stellt in Figur 35 die Strecke NS die Richtung der Erd-Achse dar, welche durch das Erd-Centrum O geht, so ist in dem gezeichneten Meridian-Schnitte von P die Strecke OA dem Äquatorial-Radius (R) gleich, während PQ den Radius R_φ darstellt. Wenn PO die Beschleunigung $[\overline{g}_\varphi]$ darstellt, so ist die Zerlegung $[PO] = [PQ] + [QO]$ so eingerichtet, dafs $[PQ]$ die Richtung von $[p_\varphi]$ hat, welches durch $[Q'Q]$ dargestellt werden mag.

Die geometrische Subtraktion $[\overline{g}_\varphi] - [p_\varphi]$ führt also zu den Komponenten $[PQ'] = [PQ] - [Q_1 Q']$ und $[QO] = [Q'M']$, so dafs für $[g_\varphi]$ die Strecke $[PM']$ resultiert.

Man hat:

$$\overline{PM'}^2 = \overline{M'Q'}^2 + \overline{Q'P}^2,$$

$$\text{d. h. } g^2_\varphi = \overline{g}^2_\varphi \,.\, \sin^2\varphi + (\overline{g}_\varphi \,.\, \cos\varphi - p_\varphi)^2.$$

Daraus folgt:

$$g_\varphi = \overline{g}_\varphi \sqrt{1 - 2 \,.\, \frac{p_\varphi}{\overline{g}_\varphi} \,.\, \cos\varphi + \left(\frac{p_\varphi}{\overline{g}_\varphi}\right)^2}.$$

Wenn man die Wurzel-Gröfse entwickelt und bei der ersten[1] *Potenz von $\frac{p_\varphi}{\overline{g}_\varphi}$ stehen bleibt, so gelangt man zu der Formel:*

$$g_\varphi = \overline{g}_\varphi\left(1 - \frac{p_\varphi}{\overline{g}_\varphi} \,.\, \cos\varphi\right) =$$

$$\overline{g}_\varphi - p_o \,.\, \cos^2\varphi = \overline{g}_\varphi - 0{,}034 \,.\, \cos^2\varphi.$$

---

1) Die zweite Potenz ist schon kleiner als 0,000009. Statt zu entwickeln kann man unter der Wurzel die Gröfse $\left(\frac{p_\varphi \,.\, \cos\varphi}{\overline{g}_\varphi}\right)^2$ gleichzeitig addieren und subtrahieren und $\left(\frac{p_\varphi}{\overline{g}_\varphi} \,.\, \sin\varphi\right)^2$ vernachlässigen; man gelangt dabei zu einem vollständigen Quadrat.

Die Abweichung in der Richtung von $[\bar{g}_\varphi]$ und $[g_\varphi]$ findet man durch die Konstruktion $M'L \perp PO$; man hat

$$\sin\varepsilon = \frac{M'L}{PM'} = \frac{p_\varphi \cdot \sin\varphi}{g_\varphi} = \frac{p_0 \cdot \sin 2\varphi}{2\,g_\varphi} = 0{,}017 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{g_\varphi}.$$

Auf der ruhenden Erde würde ein Bleilot (BP), welches am Orte P aufgehangen ist, die Richtung PO bezeichnen, d. h. nach dem Mittelpunkte der Erde zeigen, während es (BE) bei der Beobachtung auf der rotierenden Erde im Meridianschnitt von P um den Winkel ε nach dem Äquator zu (d. h bei uns nach Süden) abgelenkt erscheint.

Die Ablenkung ist Null am Äquator ($\varphi = 0$) und an den Polen $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Setzt man für $\frac{0{,}017}{g_\varphi}$ den Mittel-Wert $\frac{1}{579{,}58} = 0{,}0017254$, so tritt für 45° eine Ablenkung ein, welche als arc. (sin = 0,0017254) zu berechnen[1]) ist, so dafs man zu einem Winkel von 0°, 5′, 55″, 8, also ungefähr zu einem Winkel von 6′ oder $\frac{1^0}{10}$ gelangt.

Wenn man überhaupt mit einem Mittel-Werte rechnet, was innerhalb der Grenzen der hier geforderten Genauigkeit erlaubt ist, so tritt für $\varphi = 45^0$ stets ein Maximum der Ablenkung ein, weil $\sin 2\varphi$ in den Grenzen 0° .... 180° für 90° sein Maximum (+ 1) erreicht.

Das Maximum der Ablenkung und zwar in der Gröfse von etwa $\frac{1^0}{10}$ findet also in grofser Annäherung unter einer Breite von 45° statt, d. h. z. B. an der Mündung der Donau und an der des Po, bei Bordeaux und Turin, am Aral-See und auf der Höhe der patagonischen Cordilleren.

Für die **Erde** als **Kugel** gelten nun folgende Schlüsse:

Da das abgelenkte Lot BE zur Bezeichnung der vertikalen Richtung dient, so hängen alle sogenannten Vertikal-Linien in Wahrheit um ε nach dem nächsten Pole zu (d. h. bei uns nach Norden zu) über: ein Bleilot würde bei einem plötzlichen Stillstand der Erde einen Bogen von $\frac{1^0}{10}$ nach dem nächsten Pole zu (d. h. bei uns nach Norden) beschreiben.

---

1) Bei der geringen Gröfse des Winkels darf man für $\sin\varepsilon$ unmittelbar ε einsetzen. Man hat dann $\frac{\sin 2\varphi}{579{,}58}$ als Bogen auf dem Kreise vom Radius 1 anzusehen und ε in Graden zu berechnen durch die Proportion

$$\frac{\varepsilon^0}{360^0} = \frac{\text{Bogen}}{\text{Peripherie}},$$

so dafs $\varepsilon = 360^0 \cdot \frac{\text{Bogen}}{2\,\pi}$ resultiert.

Während auf einer absolut glatten Horizontal-Ebene (Wasserspiegel), welche in Wahrheit gegen die Erdoberfläche in P um einen Winkel von ε^0 geneigt wäre, sich ein absolut glatter Körper in Ruhe befände, würde auf der absolut glatt gedachten Erdoberfläche stets ein Gleiten nach dem Äquator zu stattfinden.

Ein Schacht, von P aus in vertikaler Richtung nach dem Mittelpunkt der Erde zu gegraben, würde um die Strecke OV an demselben vorbeiführen, so dafs die Richtung eines frei fallenden Steins den Mittelpunkt der Erde nicht träfe; derselbe würde aus einer Breite von 45^0 um $R \, . \sin \varepsilon_{45}$, d. h. um $R \, . \sin 6'$, also ungefähr um 1,5 Meilen, am Erd-Mittelpunkte vorübergleiten.

Diese Schlüsse haben in Wahrheit nur beschränkte Geltung, weil die Erde keine Kugel ist, sondern von einer Fläche begrenzt wird, deren Normalen stets die Richtung der beobachteten Beschleunigung haben: die Gebäude stehen senkrecht zur Erdoberfläche, auf welcher selbst absolut glatte Körper in Ruhe bleiben würden, während allerdings nicht alle Richtungen der Beschleunigungen den Mittelpunkt der Erde treffen [1]).

Wenn man durch Beobachtungen für die verschiedenen Breiten die Werte g_φ feststellt, so lassen sich aus der Formel

$$g_\varphi = \overline{g}_\varphi - p_0 \, . \cos^2 \varphi = \overline{g}_\varphi - 0{,}034 \, . \cos^2 \varphi$$

die entsprechenden $\overline{g}_\varphi$ berechnen.

Die Beobachtung lehrt, dafs g_φ für $\varphi = 0 \, . \, . \, . \, . \, 90^0$ mehr und mehr wächst, dafs also am Äquator (g_0) der kleinste und an den Polen (g_{90}) die gröfsten Werte der Beschleunigung gefunden werden, woraus beiläufig folgt, dafs der Druck derselben Masse an den Polen gröfser ist als am Äquator [2]).

Andererseits zeigt die Formel

$$\overline{g}_\varphi = g_\varphi + 0{,}034 \cos^2 \varphi$$

an, dafs g_φ beim Übergange von 0^0 zu 90^0, wobei $\cos^2 \varphi$ von 1 bis 0 abnimmt, um immer kleinere Gröfsen vermehrt werden mufs um $\overline{g}_\varphi$ zu liefern.

Es ist demnach nicht ausgeschlossen, dafs sich für $\overline{g}_\varphi$ bei der Berechnung Werte ergeben, welche für **alle** Breiten **dieselben** sind, dafs also die **Gesamt-Beschleunigung** eine **Konstante** ist, und dafs die **Unterschiede** in den durch Beobachtung gefundenen Werten von [g_φ] **allein durch den Verlust der bereits zur Verwendung gekommenen centripetalen Komponenten bestimmt werden.**

Diese Vermutung ist um so berechtigter, als theoretische Spekulationen, wenigstens für die Erde als Kugel, die Konstanz von

---

1) Vergl. Schellbach, Neue Elemente, 1860.

2) Diese proleptische Bemerkung kann man veranschaulichen durch die Vorstellung, dafs man eine, an ihren Enden mit gleichen Massen belastete Schnur längs eines Meridianes auf Rollen vom Pole zum Äquator führte: das System würde nach dem Pole zu in Bewegung geraten.

$\bar{g}_\varphi$, welches demnach als $\bar{g}$ zu bezeichnen wäre und mit den beobachteten [1]) g_{90} übereinstimmen müfste, geradezu fordern.

Wenn man diese Vermutung durch die Rechnung prüft, so ergiebt sich allerdings eine **angenäherte**, aber doch keine **völlige** Konstanz.

Die Abweichung ist auf Rechnung der Abplattung der Erde zu setzen, deren ellipsoidische Form, von der Gestalt einer Kugel erheblich verschieden ist.

Das Mafs (e) der Abplattung wird durch den Bruch $\frac{R - r}{R}$ dargestellt, in welchem R und r beziehungsweise den Äquatorial- und den Polar-Radius der Erde ($R = 6377400$ m und $r = 6355100$ m) bezeichnen, so dafs sich für e der Wert 0,00334, d. h. ungefähr $\frac{1}{299}$ ergiebt.

Wenn man nun für einen physischen Körper von der Gestalt unserer Erde unter Voraussetzung gewisser spekulativer Annahmen [2]) die Änderung berechnet, welche $\bar{g}_\varphi$ auf einem Meridian zeigen mufs, so gelangt man zu einer Formel, welche den Beobachtungen in grofser Annäherung entspricht.

Man hat zu setzen:

$$g_\varphi = g_0 + 0{,}05080 \,.\, \sin^2\varphi.$$

Aus der Formel $\bar{g}_\varphi = g_\varphi + 0{,}034 \cos^2\varphi$ würde dagegen für die thatsächlichen Verhältnisse $\bar{g}_0 = g_0 + 0{,}034$ folgen, so dafs sich bei der unberechtigten Annahme eines **konstanten** ($\bar{g}_0 = \bar{g}_\varphi = \bar{g}_{90}$) Wertes von $\bar{g}_\varphi$ für das zu beobachtende g'_φ ergeben würde:

$$g_0 + 0{,}034 = g'_\varphi + 0{,}034 \cos^2\varphi, \text{ d. h.}$$
$$g'_\varphi = g_0 + 0{,}034 \sin^2\varphi \text{ oder genauer}$$
$$g'_\varphi = g_0 + 0{,}03391 \sin^2\varphi.$$

Nimmt man also $\bar{g}_\varphi$ unveränderlich an, d. h. sieht man von der Abplattung der Erde ganz und gar ab, so erhält man für das zu beobachtende g'_φ einen Wert, welcher von dem wirklich beobachteten g_φ um die durch die Abplattung bedingte Gröfse $(0{,}05080 - 0{,}03391) \sin^2\varphi$, d. h. um $0{,}01689 \sin^2\varphi$ verschieden ist.

In der That hat man also $\bar{g}_\varphi$ nicht konstant anzusetzen, man hat vielmehr die Formel

$$\bar{g}_\varphi = g_\varphi + 0{,}03391 \,.\, \cos^2\varphi = g_0 + 0{,}05080 \,.\, \sin^2\varphi + 0{,}03391 \,.\, \cos^2\varphi$$
$$= g_0 + 0{,}03391 + 0{,}01689 \sin^2\varphi = \bar{g}_0 + 0{,}01689 \sin^2\varphi$$

zu benutzen, so dafs sich $\bar{g}_\varphi$ zwischen den Werten

$$\bar{g}_0 = 9{,}81400 \text{ und } \bar{g}_{90} = 9{,}83089$$

und g_φ zwischen den Werten

1) Falls diese Beobachtung am Pole ausführbar wäre.

2) Vergl. Clairaut, Théorie, 1743.

$$g_0 = 9{,}78009 \text{ und } g_{90} = 9{,}83089$$

bewegt [1]).

Die Abnahme des beobachteten g_φ vom Pol zum Äquator folgt aus der Proportion

$$g_{90} : g_0 = 1{,}00519 = 201 : 200,$$

während die Abnahme derselben Werte bei Vernachlässigung der Abplattung durch die Proportion

$$g'_{90} : g'_0 = 1{,}00346 = 291 : 290$$

bestimmt ist.

B. Die Abweichung fallender Körper von der Vertikalen. Wenn eine Kugel in der Nähe der Erdoberfläche einen relativ grofsen Weg in freiem Falle zurücklegt, so wird der Mittelpunkt derselben keine Grade von vertikaler Richtung beschreiben.

Die Zusammensetzung von $[\overline{g}_{\varphi,\,\varrho}]$ und $\left[\frac{v^2}{\rho}\right]$ zeigt zunächst, dafs im allgemeinen eine Abweichung nach dem Äquator hin (bei uns also nach Süden) vorhanden sein mufs.

Aufserdem tritt für alle Punkte der Erdoberfläche (d. h. auch für den Äquator) eine östliche Abweichung ein, weil die Punkte der Erde mit um so gröfserer Geschwindigkeit um die Erd-Achse rotieren, je weiter sie vom Centrum entfernt sind.

Die Punkte fallender Körper müssen sich infolgedessen gegen die Fufspunkte ihrer Vertikalen während des Falles mehr und mehr nach Osten hin verschieben, weil diese Fufspunkte auf der Erdoberfläche gelegen sind und demnach bei der Drehung von Westen nach Osten zurückbleiben.

Die Berechnung der östlichen und der äquatorialen Abweichung ist ziemlich verwickelt, zumal man bei gröfserer Höhe auch auf die Änderung von $\overline{g}_{\varphi,\,\varrho}$ Rücksicht nehmen mufs [2]): der Mittelpunkt der fallenden Kugel bewegt sich auf einer Ellipse, für welche das Centrum der Erde ein Brennpunkt (Keplersche Gesetze) ist.

Die östliche Abweichung läfst sich angenähert durch

$$\frac{2\pi \,.\, \cos\varphi}{3T} \sqrt{\frac{8_z{}^3}{g_{\varphi,\,R+z}}}$$

darstellen, falls man die Höhe der Fallstrecke durch z und die Umdrehungszeit der Erde (R) durch T bezeichnet [3]).

Die südliche Abweichung wird unter gleichen Umständen durch die Formel $\left(\frac{\overline{g}_{\varphi,\,R+z}}{g_{\varphi,\,R+z}} - 1\right) z \,.\, \operatorname{tang}\varphi$ gegeben.

1) Dabei mufs $\overline{g}_{90} = g_{90}$ sein, weil am Pole keine centrifugale Komponente zu addieren ist.

2) Eine elementare Behandlung des Problems findet sich bei Schellbach, Neue Elemente, S. 270 flg.

3) Vergl. G. Kirchhoff, Mechanik, S. 93 und Schellbach, Neue Elemente, S. 271.

Benzenberg hat in den Jahren 1802 und 1803 im Michaelisturm zu Hamburg ($\varphi = 53^\circ\ 33'$) Versuche angestellt, bei denen z = 235′ Pariser Fuſs zu setzen war: er fand 3,95 Pariser Linien östlicher Abweichung.

Genaue Versuche wurden in dieser Beziehung im Jahre 1834 von Reich im Dreibrüderschacht zu Freiberg ($\varphi = 50^\circ, 53', 23''$) für eine Fall-Strecke (z) von 158,5182 m ausgeführt.

Reich fand als Abweichungen:

28,396 mm östlich und 4,374 mm südlich.

Die Rechnung ergiebt für die Reichschen Versuche, bei denen der Ausgangs-Punkt des fallenden Körpers 475 m über dem Spiegel der Ostsee lag.

27,65547 östliche Abweichung [1]),
268,0993 südliche Abweichung.

Während Theorie und Versuch für die östliche Abweichung die wünschenswerte Übereinstimmung darbieten, läſst sich ein Gleiches von der südlichen Abweichung durchaus nicht behaupten, zumal die von Reich gefundene Abweichung (4,374 mm) noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungs-Fehler liegt.

Dieser Widerspruch löst sich auf durch die Bemerkung, daſs ein Bleilot, welches die Vertikale bezeichnen sollte, nach Süden zeigt, so daſs das Beobachtungs-Fernrohr auf eine falsche Vertikale eingestellt wird.

Ein Bleilot, welches im Anfangs-Punkte der Fall-Strecke (z) aufgehangen ist, zeigt für deren Ende angenähert die Abweichung

$$\left(\frac{\bar{g}_{\varphi,\ R+z}}{g_{\varphi,\ R+z}} - 1\right) z \,.\, \operatorname{tang}\varphi$$

an, so daſs überhaupt keine südliche Abweichung von einiger Bedeutung beobachtet werden kann [2]).

Die ganze Betrachtung gilt unter der Voraussetzung, daſs die Erde die Gestalt einer Kugel hat: für diesen Fall ist der obige Widerspruch gegeben, aber auch gelöst.

Betrachtet man die Erdoberfläche als eine Fläche, für welche die Richtungen von g_φ Normalen sind, so ist die Untersuchung wesentlich zu modificieren.

In jedem Falle hat man in der durch die Beobachtung gegebenen ***Abweichung nach Osten*** *einen* ***direkten Beweis*** *(Benzenberg 1804) für die* ***Achsen-Drehung der Erde.***

---

1) Mit Benutzung der im Texte gegebenen Formel für

$$R = 6364880 + 475 - 158{,}5182 = 6365196{,}5 \text{ m}$$
$$\text{und } g_{\varphi,\ R+z} = 9{,}80986$$

ergiebt sich dieser Wert.

Gauſs und Olbers haben dieses Problem (vergl. Benzenberg, Fallversuche, 1804) genauer behandelt; diese genaueren Formeln liefern 27,51 mm statt 27,66 mm.

2) Vergl. Schellbach, Neue Elemente, S. 281.

C. Die Trabanten-Bewegung. Es hat ein gewisses Interesse, die eben angestellten Untersuchungen zu erweitern, für den Mittelpunkt einer Kugel, welche sich auf einem Parallel-Kreise mit der Geschwindigkeit λ fortbewegt.

Hier ist die centripetale Komponente $\left[\frac{\lambda^2}{R_\varphi}\right]$ in Rechnung zu bringen, so daſs

$$g_\varphi = \bar{g}_\varphi \sqrt{1 - 2\,\frac{\lambda^2}{\bar{g}_\varphi \cdot R_\varphi} \cdot \cos\varphi + \left(\frac{\lambda^2}{\bar{g}_\varphi \cdot R_\varphi}\right)^2}$$

$$= \bar{g}_\varphi \sqrt{1 - 2\,\frac{\lambda^2}{\bar{g}_\varphi \cdot R} + \left(\frac{\lambda^2}{\bar{g}_\varphi \cdot R}\right)^2 \sec^2\varphi}$$

$$\text{und } \sin\varepsilon_\varphi = \frac{\lambda^2}{g_\varphi \cdot R_\varphi} \cdot \sin\varphi = \frac{\lambda^2}{g_\varphi \cdot R_\varphi} \cdot \operatorname{tang}\varphi$$

resultiert.

Soll $g_\varphi = 0$ werden, d. h. soll die centripetale Komponente $\left[\frac{\lambda^2}{R_\varphi}\right]$ gerade $\bar{g}_\varphi$ betragen, so muſs für $m = \frac{\lambda^2}{\bar{g}_\varphi \cdot R_\varphi}$ die Gleichung bestehen:

$$1 - 2\,m \cdot \cos\varphi + m^2 = 0.$$

Man findet $m = \cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi$ und hat demnach

$$\lambda^2 = g_\varphi \cdot R \cdot \cos\varphi\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi).$$

Soll λ^2 eine reelle Gröſse sein, so muſs $\varphi = 0$ gesetzt werden, so daſs

$$\lambda^2 = \bar{g}_0 \cdot R \text{ und } \lambda = \sqrt{\bar{g}_0 \cdot R}$$

resultiert: eine Aufhebung der Beschleunigung $\bar{g}_\varphi$ durch die centripetale Reschleunigung in der Bahn ist also nur für $\bar{g}_0$, d. h. am Äquator möglich. Dieses Resultat kann nicht überraschen, wenn man bedenkt, daſs nur am Äquator $[g_\varphi]$ und $\left[\frac{\lambda^2}{R_\varphi}\right]$ in ihrer Richtung übereinstimmen.

Eine Kanonenkugel, die sich längs des Äquators (oder auf einem anderen gröſsten Kreise) gegen diesen mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\sqrt{\bar{g}_0 \cdot R} = 7731{,}1\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 1{,}0418\,\frac{\text{geographische Meilen}}{\text{Sekunden}}$$

fortbewegte, würde also, falls kein Luft-Widerstand in Rechnung träte, niemals niedersinken können, d. h. sie würde den Äquator der Erde umkreisen und zwar in einer Zeit-Dauer von 5064,99″ mittlerer Zeit. Die gröſste bisher erreichte Geschwindigkeit von Geschossen beträgt etwa

$$750\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = \frac{1}{10}\,\frac{\text{geographische Meile}}{\text{Sekunde}},$$

ist also etwa $\frac{1}{10}$ der Geschwindigkeit, welche für eine solche Rotation erforderlich wäre.

Wenn die Umdrehungs-Geschwindigkeit der Erde am Äquator bis zur Gröfse $\sqrt{\overline{g}_0 \cdot R}$ gesteigert werden könnte, so würde für eine am Äquator ruhende Kugel kein g_0 mehr zu beobachten sein, d. h. die Körper würden am Äquator schweben. Der Geschwindigkeit $\sqrt{\overline{g}_0 \cdot R}$ entspräche eine Umdrehungs-Zeit T′, für welche $\frac{2 R \cdot \pi}{T'} = \sqrt{\overline{g}_0 \cdot R}$ anzusetzen wäre, so dafs man

$$T' = 2 \pi \sqrt{\frac{R}{\overline{g}_0}} = 5064,''99 \text{ mittlere Zeit}$$

erhält.

Wenn sich die Erde 17-mal schneller drehte, als sie es jetzt thut, so wäre der geschilderte Zustand erreicht, da man $T' : T = 1 : 17{,}011$ findet: Bei einer weiteren Steigerung der Umdrehungs-Geschwindigkeit würden die Körper am Äquator gegen die Erde zurückbleiben, d. h. sie würden sich scheinbar von Osten nach Westen über die Erde hinbewegen und sich dabei die zuletzt (in Bezug auf die ruhend gedachte Erde) erhaltene Geschwindigkeit $\left(1{,}0418 \ \frac{\text{geographische Meilen}}{\text{Sekunden}}\right)$ bewahren. An anderen Punkten der Erdoberfläche würde eine Geschwindigkeit vom Werte $\frac{2 R_\varphi \cdot \pi}{T'} = \cos\varphi \sqrt{\overline{g}_0 \cdot R}$ und demnach eine Centripetal-Beschleunigung vom Werte $\cos 2\varphi \cdot \overline{g}_0$ in Rechnung treten, welche mit der Komponente $[g_\varphi \cdot \cos\varphi]$ gleichgerichtet ist.

Diese Betrachtungen gestatten eine interessante Anwendung auf die Bewegungs-Verhältnisse von Erde und Mond.

Die Bahn des Mond-Centrums ist in Bezug auf die ruhende Erde in gewisser Annäherung als ein Kreis vom Radius $r = 51694{,}13$ geographische Meile zu betrachten.

Um die Centripetal-Beschleunigung (x) dieser Bewegung zu berechnen hat man zu beachten, dafs der Mond in $27^d\, 7^h\, 43'\, 12''$ seinen Umlauf vollendet, dafs also $T = 2360592''$ zu setzen ist. Man hat $x = \frac{4 \pi^2 r}{T^2} = 0{,}0027174 \ \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})}$.

Da die Centripetal-Beschleunigung der Mond-Bahn nach dem Erd-Centrum gerichtet ist, so liegt es nahe, zu versuchen, ob dieselbe in Bezug auf den Erd-Radius R als $g \cdot \frac{R^2}{r^2}$ darstellbar ist, d. h. ob $\frac{x \cdot r^2}{R^2} = g$ resultiert.

Da die Centren von Mond und Erde ungefähr um 60,1 Erd-Radien (= 51694,13 geographische Meilen) entfernt sind, so ist mit einer gewissen Annäherung $\frac{r}{R} = 60{,}1$ zu setzen, dabei ergiebt sich $x \cdot \frac{r^2}{R^2} = 9{,}78264 \ \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})}$, während

eine genauere Rechnung dafür 9,8314 $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunden}).(\text{Sekunden})}$ ergiebt.

Damit ist gezeigt, dafs **dieselbe** *Beschleunigung g, welche beim freien Falle der Körper zur Wirkung kommt, auch bei der Centripetal-Beschleunigung der Mond-Bahn in Rechnung tritt.*

Der Mond kann also in der That nach Analogie jener Kanonenkugel betrachtet werden, welche den Erd-Äquator umkreist.

Wenn ähnliche Rechnungen in Bezug auf die Planeten-Bahnen angestellt werden, so ergiebt sich ein ähnliches Resultat: die Centripetal-Beschleunigungen sind nach dem Sonnen-Centrum gerichtet und hängen von der Fall-Beschleunigung für die Sonnen-Oberfläche ab, falls man auch hier die Relation $g^a_{\rho,\varphi} = \frac{R^2}{\rho^2} \cdot g_{R,\varphi}$ *als gültig voraussetzt.*

Dadurch wird ein empirisches Gesetz von grofser Wichtigkeit angedeutet: Die Beschleunigung, welche ein Himmels-Körper einem Punkte erteilt, nimmt mit dem Quadrate der Entfernung des Punktes vom Centrum des Himmels-Körpers ab.

Dieses Gesetz ist von Newton aufgefunden worden, welcher in Bezug auf den Mond

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0{,}0027174 \, \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunden}).(\text{Sekunden})} = g\left(\frac{R}{r}\right)^x$$

setzte und dabei in gewisser Annäherung zu $x = 2$ gelangte.

B. Die Projektions-Methode.

1.

Wenn man die Lage eines Punktes P durch Strecken OP_x, OP_y, OP_z auf einem rechtwinkligen Koordinaten-Kreuze bestimmt, so erscheinen die Punkte P_x, P_y, P_z als Normal-Projektionen des Punktes P auf die drei Achsen OX, OY, OZ.

Wenn man nun die Bahn eines Punktes P in die Inkremente zerlegt, welche der Zeit-Dauer τ entsprechen, und die Punkt-Reihe W_0, $W_1 \ldots . W_n$ auf jede der drei Achsen OX, OY, OZ projiciert, so entstehen drei Punkt-Reihen

$X_0, X_1 \ldots . X_n;\ Y_0, Y_1 \ldots . Y_n;\ Z_0, Z_1 \ldots . Z_n.$

Während P die Punkte $W_0 \ldots .. W_n$ durchläuft, bewegt sich P_x, P_y, P_z, beziehungsweise von X_0 nach X_n, Y_0 nach Y_n, Z_0 nach Z_n so zwar, dafs den einzelnen Inkrementen

$$W_0W_1,\ W_1W_2 \ldots .. W_{n-1}W_n,$$

beziehungsweise die Inkremente X_0X_1, $X_1X_2 \ldots ... X_{n-1}X_n$; $Y_0Y_1Y_2 \ldots . Y_{n-1}Y_n$; Z_0Z_1, $Z_1Z_2 \ldots . Z_{n-1}Z_n$ entsprechen, welche beziehungsweise durch $[x_i]$, $[y_i]$, $[z_i]$ dargestellt werden mögen.

Die Kenntnis der Lage von X_i, Y_i, Z_i genügt, um die Lage von W_i festzustellen.

Wenn man nun zu einer elementaren Inkrementen-Reihe des Punktes P übergeht, so werden auch die Inkrementen-Reihen der Punkte P_x, P_y, P_z elementar.

In diesem Falle genügt die Kenntnis der Lage von X_i, Y_i, Z_i und X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1} um das Inkrement $W_i W_{i+1}$ vollständig darzustellen, während dadurch sonst nur der Anfangs- und Endpunkt desselben gegeben werden.

Die mittleren Geschwindigkeiten in den Inkrementen $[x_i]$, $[y_i]$, $[z_i]$ gehen für eine elementare Teilung über in die Werte der Geschwindigkeiten für die Punkte X_i, Y_i, Z_i.

Man hat dann:

$$\lim\left(\frac{x_i}{\tau}\right) = \lim\left(\frac{s_i \cdot \cos[s_i, x_i]}{\tau}\right) = \lim\left(\frac{s_i}{\tau} \cdot \cos[s_i, x_i]\right)$$

d. h. die **Geschwindigkeit der Projektion** P_x ist gleich der **Projektion der Geschwindigkeit** von P.

Für P_y und P_z gelten natürlich analoge Beziehungen.

Wenn nach dem Durchlaufen von $[s_i]$ die Geschwindigkeit von P um $[\overline{a}_{i+1} \cdot \tau)$ vermehrt[1]) wird, wobei für $[s_{i+1}]$ die Geschwindigkeit $\lim\left(\frac{s_i}{\tau}\right) + [\overline{a}_{i+1} \cdot \tau]$ in Rechnung tritt, deren Richtung zugleich die Richtung von $[s_{i+1}]$ bestimmt, so gilt nach dem oben gefundenen Satze:

$$\lim\left(\frac{x_{i+1}}{\tau}\right) = \lim\left(\frac{s_i \cdot \cos(s_i, x_i)}{\tau}\right) + \lim(\overline{a}_{i+1} \cdot \tau \cdot \cos[s_{i+1}, x_{i+1}])$$

$$\text{d. h. } \lim\left(\frac{x_{i+1}}{\tau}\right) - \lim\left(\frac{x_i}{\tau}\right) = \lim(\tau \cdot \overline{a}_{i+1} \cdot \cos[s_{i+1}, x_{i+1}]).$$

Man hat demnach das Theorem: Die **Beschleunigung der Projektion** P_x ist gleich der **Projektion der Beschleunigung** von P.

Für P_y und P_z gelten natürlich analoge Beziehungen.

Demnach läfst sich die Geschwindigkeit von P im Bahn-Punkte W_i konstruieren aus den Geschwindigkeiten von P_x, P_y, P_z für die Punkte X_i, Y_i, Z_i.

Analoges gilt für die Beschleunigungen.

Es liegt hier der Specialfall einer Zerlegung in drei Komponenten vor, so dafs es sich um eine einfache Resultantenbildung handelt.

Die Geschwindigkeit, beziehungsweise die Beschleunigung für $[s_i]$ entsteht aus den Geschwindigkeiten, beziehungsweise den Beschleunigungen für $[x_i]$, $[y_i]$, $[z_i]$ grade so, wie $[s_i]$ selbst aus $[x_i]$, $[y_i]$, $[z_i]$ entsteht, d. h. durch eine Polygonbildung, welche einer parallelepipedischen Konstruktion entspricht.

---

1) Die Gesamt-Beschleunigung für $[s_{i+1}]$ ist wiederum durch $[\overline{a}_{i+1}]$ bezeichnet.

Bei einer elementaren Einteilung ersetzt also das Tripel von Inkrementen-Reihen X_i, Y_i, Z_i die Inkrementen-Reihe W_i, durch deren Kenntnis die Bewegung von P gegeben ist, d. h. man kann das Studium der **krummlinigen Bewegungen** von P ersetzen durch das Studium der **drei gradlinigen Bewegungen** der Punkte P_x, P_y, P_z.

*Bei ebenen Problemen reicht man mit den **beiden** Achsen O X, O Y aus, bei gradlinigen Bewegungen arbeitet man unmittelbar mit **einer** Achse.*

1. Die Bewegung des Punktes P ist völlig gegeben, wenn die Lage der drei Punkte P_x, P_y, P_z für **jeden** Zeit-Moment gegeben ist.

Man konstruiert daraus unmittelbar die Punkte W_0, W_1 . . . W_n.

2. Die Bewegung des Punktes P ist völlig gegeben, wenn die Lage der drei Punkte P_x, P_y, P_z für **einen** Zeit-Moment und die Geschwindigkeit der drei Punkte P_x, P_y, P_z für **jeden** Zeit-Moment gegeben ist.

Man konstruiert von der Anfangs-Lage aus Element für Element.

3. Die Bewegung des Punktes P ist völlig gegeben, wenn die Lage der drei Punkte P_x, P_y, P_z für **einen** Zeit-Moment, wenn ferner die Geschwindigkeit der drei Punkte P_x, P_y, P_z für **denselben** Zeit-Moment und wenn endlich die Beschleunigungen der drei Punkte P_x, P_y, P_z für **jeden** Zeit-Moment gegeben sind.

Man konstruiert zunächst das erste Element, fügt die Zusatz-Komponente der Geschwindigkeit für das nächste Element hinzu und gelangt so zum zweiten Elemente etc.

Bei den Bewegungen, welche in der Natur vorkommen, ist gewöhnlich die Gesamt-Beschleunigung gegeben.

Die Beobachtungen und Rechnungen führen hier fast immer zur Feststellung von Beschleunigungen.

Das Verfahren der Projektions-Methode besteht nur darin, die gegebene Gesamt-Beschleunigung nach drei Achsen zu zerlegen und die drei Projektions-Bewegungen von P_x, P_y, P_z zu studieren, wobei zu bemerken ist, dafs für eine vollendete Darstellung aufserdem noch die Lage eines Punktes W_i und die Geschwindigkeit in ihm gegeben sein mufs.

Dabei kann die Gesamt-Beschleunigung entweder geschlossen oder als geometrische Summe irgend welcher Komponenten gegeben sein, so dafs man eventuell eine Reihe von Zerlegungen (für jede Komponente) vorzunehmen hat.

Analoges gilt für die gegebene Geschwindigkeit.

*In jedem Falle hat man hier von den Beschleunigungen, welche als **Ableitungen** der Geschwindigkeiten nach der Zeit auftreten, zu diesen selbst, d. h. zum **Stamme** fortzuschreiten und von da durch einen weiteren Schritt zu der Inkrementen-Reihe selbst zu gelangen.*

Man geht also hier von drei Gleichungen für die Beschleuni-

gungen auf OX, OY, OZ aus und sucht von da aus zunächst zu den Bewegungen auf OX, OY, OZ und damit auch zur Bewegung auf W_0 .... W_n zu gelangen.

2.

A. **Die Wurf-Bewegung.** Zunächst soll nochmals auf die Verhältnisse zurück gegangen werden, welche an der Erd-Oberfläche bei geworfenen Körpern auftreten.

Hier geht die Bewegung in einer Vertikal-Ebene vor sich, so dafs man mit einem Kreuze XOY auskommt, dessen Achse OX horizontal und dessen Achse OY vertikal und zwar nach unten gerichtet angenommen werden mag.

Wollte man nicht voraussetzen, dafs für dieses Problem nur eine Ebene in Frage kommt, so würde man zunächst ein dreiachsiges Kreuz einführen und erst bei Behandlung der Aufgabe dazu gelangen, die hier gegebenen Verhältnisse als planimetrische zu erkennen.

Die Gesamt-Beschleunigung, deren Richtung parallel zu OY verläuft, ist hier [g], so dafs man hier

$$a_x = o \text{ und } a_y = g$$

anzusetzen hat, wenn man die Beschleunigungs-Werte für OX und OY mit a_x und a_y bezeichnet.

Es folgt sofort durch Übergang zum Stamm in analoger Bezeichnung
$$v_x = m \text{ und } v_y = n + g\,t,$$
wenn man mit m und n irgend welche Gröfsen bezeichnet, die bei dem Übergange von v zu a, d. h. bei der Ableitung von v verloren gegangen sein können.

Um die Bedeutung dieser Gröfsen festzustellen, setzt man $t = o$: man findet $(v_x)_o = m$ und $(v_y)_o = n$, d. h. P_x und P_y haben in dem Zeit-Momente, von welchem ab t gerechnet wird, beziehungsweise die Geschwindigkeiten m und n.

Nimmt man nun an, dafs P in dem durch $t = o$ bezeichneten Zeit-Momente seine Bewegung begann, also in diesem Momente in bestimmter Richtung (α) mit der Geschwindigkeit c geworfen wurde, so ist für diesen Moment

$$c \,.\, \cos\alpha = (v_x)_o = m \text{ und } c \,.\, \sin\alpha = (v_o)_y = n.$$

Man hat also, wie auch sofort zu sehen war,

$$c^2 = m^2 + n^2 \text{ und } \cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}},\ \sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Für einen beliebigen durch t bezeichneten Moment ist

$$v^2 = v^2_x + v^2_y = c^2 + 2\,c\,g\,t \,.\, \sin\alpha + g^2 t^2,$$

während die Richtung von [v] durch $\frac{v_x}{v}$ und $\frac{v_y}{v}$ bestimmt wird.

Aus $v_x = m$ und $v_y = n + g\,t$ folgt durch Übergang zum Stamm
$$x = m' + m\,t \text{ und } y = n' + n\,t + \frac{g\,t^2}{2}.$$

Nimmt man nun an, dafs die Bewegung von P vom Punkte O ausging, so gelten für $t = o$ die Beziehungen $(x)_o = o$ und

$(y)_0 = o$, während die Formel $(x)_0 = m'$ und $(y)_0 = n'$ liefert. Dieser Widerspruch fordert, dafs man $m' = o$ und $n' = o$ setzt, es ist demnach

$$x = m t \text{ und } y = n t + \frac{g}{2} t^2$$

oder auch

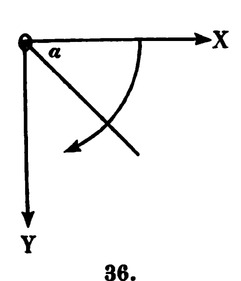
$$x = c . \cos\alpha . t \text{ und } y = c . \sin\alpha . t + \frac{g}{2} . t^2.$$

Die Gröfsen x und y sind also durch eine diophantische Gleichung verbunden, welche durch Elimination von t gefunden wird.

Man findet die bekannte Parabel:

$$y = x . \tan g\alpha + \frac{x^2}{2} . \frac{g}{c^2 . \cos^2\alpha}.$$

Für $\alpha = o$, d. h. für eine Anfangs-Richtung OX (Figur 36) entspricht jedem x ein positiver Wert von y, d. h. die Bahn ist unterhalb OX gelegen.



36.

Für $o < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt dasselbe.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht die obige Gleichung, welcher man auch die Form

$$y \cos^2\alpha = x . \sin\alpha \cos\alpha + \frac{x^2}{2} . \frac{g}{c^2}$$

geben kann, über in $x = 0$, d. h. der Punkt bewegt sich auf OY senkrecht herab.

Für $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{2}$ wiederholt sich auf der linken Seite der Zeichnung dieselbe Gestaltung, welche eben für die rechte betrachtet wurde, weil hier x und $\tan g\alpha$ gleichzeitig negativ sind.

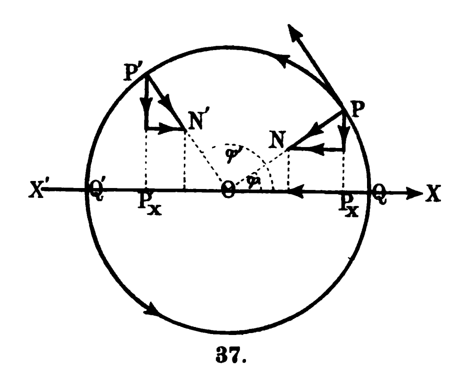
Für $\alpha = \frac{2\pi}{2}$ gilt Analoges wie in Bezug auf $\alpha = 0$.

Für $\frac{2\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ist x negativ, während $\tan g\alpha$ positiv ist, so dafs y für kleine Werte von x negativ und für grofse Werte von x positiv ist: die Bahn erhebt sich über die X-Achse und schneidet dieselbe, um dann unterhalb derselben zu verlaufen.

Für $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ hat man wiederum $x = o$, d. h. der Punkt bewegt sich auf OY senkrecht empor.

Für $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{4\pi}{2}$ ist x positiv, während $\tan g\alpha$ negativ ist, so dafs ein Analogon zu $\frac{2\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ resultiert.

B. **Die gleichmäfsige Schwingung.** Dem Probleme über die **Zusammensetzung** zweier Bewegungen mag auch hier die Behandlung einer **Zerlegung** folgen.



37.

Wenn sich ein Punkt P mit konstanter Geschwindigkeit (c) auf einem Kreise (r) bewegt, so bewegt sich dessen Projektion P_x auf irgend einer Graden X'X zwischen zwei Punkten (Q und Q') der Graden hin und her.

An der Allgemeinheit der Betrachtung (Parallel-Verschiebung) wird nichts geändert, wenn man die Grade X'X durch das Centrum O des Kreises legt. (Figur 37).

Stellt PN die Normal-Beschleunigung $\frac{c^2}{r}$ für die durch Winkel φ bestimmte Lage von P dar, so ist die entsprechende Beschleunigung für P_x gegeben oder $\frac{c^2}{r} \cos\varphi$.

Dasselbe gilt auch für P', weil $\cos\varphi' = -\cos(2R - \varphi')$ ist und hier offenbar der Sinn der Beschleunigung in Bezug auf die erste Stellung umgekehrt ist.

Wenn man OX als positive und OX' als negative X-Achse einführt, so ist die Beschleunigung von P_x ganz allgemein als $-\frac{c^2}{r^2} \cdot x$ gegeben, falls man OP_x durch x bezeichnet. Der Punkt bewegt sich mit einer Beschleunigung, welche seinem jedesmaligen Abstande von dem festen Punkte O proportional ist.

Diese Beschleunigung $a = -\frac{c^2}{r^2} \cdot x$ ist immer nach O gerichtet, dieselbe hat in Q und Q', beziehungsweise die Werte $-\frac{c^2}{r}$ und $+\frac{c^2}{r}$ und hat in O den Wert Null.

Wenn sich ein Punkt auf einer Graden mit einer Beschleunigung, welcher seinem jedesmaligen Abstande von einem Punkte O der Graden proportional $\left(k = \frac{c^2}{r}\right)$ ist, bewegt, so vollführt er **gleichmäfsige Schwingungen** um den Punkt O.

Auf beiden Seiten des Punktes O treten dieselben Bewegungs-Verhältnisse ein.

Wenn P den oberen Halb-Kreis durchläuft, bewegt sich P_x von Q nach Q' mit den Beschleunigungen $-\frac{c^2}{r} \ldots o \ldots + \frac{c^2}{r}$; wenn P den unteren Halb-Kreis durchläuft, bewegt sich P_x von Q' nach Q mit den Beschleunigungen $+\frac{c^2}{r} \ldots o \ldots -\frac{c^2}{r}$.

Die Geschwindigkeiten (v) von P_x sind offenbar in Q und Q', da dort Umkehrung stattfindet, Null.

Die Projektion der Geschwindigkeit (Geschwindigkeit der Projektion) für die Lage P ist $- c . \sin \varphi$, wie man sofort sieht, wenn man die Geschwindigkeit in P durch eine Strecke darstellt und bedenkt, dafs Beschleunigung und Geschwindigkeit in P gleichen Sinnes sind.

Wenn sich P durch den oberen Halb-Kreis bewegt, so durchläuft φ die Werte $0 \ldots R \ldots 2R$ und $\sin \varphi$ die Werte $0 \ldots 1 \ldots 0$.

Wenn sich P durch den unteren Halb-Kreis bewegt, so durchläuft 0 die Werte $2R \ldots 3R \ldots 4R$ und $\sin \varphi$ die Werte $0 \ldots -1 \ldots 0$.

Bei dem Hingange QQ' hat die Geschwindigkeit von P_x die Richtung QQ', bei dem Hergange Q'Q hat die Geschwindigkeit von P_x die Richtung Q'Q: das Maximum (c) wird beide Male für den Punkt O erreicht.

Da P die Zeit $\frac{2 r \pi}{c} = T$ gebraucht um gleichförmig einen Kreislauf zu vollenden, so gebraucht P_x die Zeit $\frac{T}{2}$ um den Hingang und die Zeit $\frac{T}{2}$ um den Hergang auszuführen.

Man nennt T in Bezug auf P_x die **Schwingungs-Dauer** für eine Doppel-Schwingung.

Einzelne Autoren (z. B. französische) führen $\frac{T}{2}$ als Schwingungs-Dauer ein, d. h. sie rechnen mit der Schwingungs-Dauer eines Hinganges oder eines Herganges (einfache Schwingungen).

Wenn für gleichmäfsige Schwingungen das Gesetz $a = -k . x$ gegeben ist, so hat man in Bezug auf die gleichförmige Kreis-Bewegung gegeben:

$$k = \left(\frac{c}{r}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \text{ d. h. } T = 2\pi . \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Die **Schwingungs-Dauer** für einen Punkt, dessen Bewegung dem Gesetze $a = -k . x$ unterliegt, ist $T = 2\pi . \sqrt{\frac{1}{k}}$.

Damit ist die Darstellung der Schwingung unabhängig gemacht von der gleichförmigen Kreis-Bewegung, von welcher ausgegangen wurde.

Die Gröfse c stellt die Maximal-Geschwindigkeit von P_x und zwar im Punkte O dar, während die Gröfse r die Maximal-Entfernung zwischen den Punkten P_x und O bezeichnet.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse mag man sich innerhalb der Erde einen Schacht von Pol zu Pol gegraben denken.

Wenn eine Kugel am Nordpole in diesem Schacht in demselben Momente zu fallen beginnt, in welchem eine zweite, ihr

gleiche, vom Nordpole aus in horizontaler Richtung mit einer Geschwindigkeit von $\frac{7731{,}11 \text{ Meter}}{\text{Sekunden}}$ abgeschlossen wird, so begegnen sich beide Kugeln am Südpole.

Nimmt man an, dafs keine Störungen irgend welcher Art vorkommen, so beschreibt der Mittelpunkt der ersten Kugel mit konstanter Geschwindigkeit einen Meridian-Kreis, während der Mittelpunkt der zweiten Kugel auf dem Durchmesser desselben, d. h. auf der Erdachse gleichmäfsig hin- und herschwingt.

Wenn die Änderung von g im Innern der Erde durch

$g'_{\varrho,\,\varphi} = \frac{\rho}{R} \cdot g_{R,\,\varphi}$ *dargestellt würde, so hätte man die Gleichung*

$g'_{\varrho,\,90} = \rho \cdot \frac{g_{R,\,90}}{R}$ *zu verwenden, aus welcher hervorgeht, dafs die Beschleunigung der Bewegung proportional zu* ρ *ist.*

Innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung ist diese Vorstellung zuläfsig, so dafs man für die schwingende Bewegung

$a_T = -\frac{g_{R,\,90}}{R} \cdot \rho$ *anzusetzen hat und demnach zu*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_{R,\,90}}}$$

gelangt.

Durch denselben Wert $\left(2\pi \sqrt{\frac{R}{g_{R,\,90}}}\right)$ *wird auch die Umlaufs-Zeit* (*S. 229*) *der umkreisenden Kugel gegeben.*

Da T ungefähr $1^2/_5$ *Stunde beträgt, so wird der Schacht* (*Erd-Achse*) *von der schwingenden Kugel in circa 42 Minuten durchlaufen.*

Da die Kreis-Bewegung, von der ausgegangen wurde, gleichförmig ist, so dürfen die zusammengehörigen Werte der Zeit-Dauer t und des Winkels φ als proportional vorausgesetzt werden. *Man mufs dabei den Anfangs-Punkt der Zeit-Dauer t der Lage Q, in welcher auch* φ *den Wert Null hat, entsprechen lassen.*

Durch die Proportionalität von t und φ gelangt man dazu, die Gröfsen a, c und x durch t darzustellen.

Aus $t : \varphi = T : 360^0$ *folgt* $\varphi = \frac{t}{T} \cdot 360^0$.

Mifst man Winkel φ, welcher Phasen-Winkel genannt wird, im Bogen-Mafs, so ist $\varphi = \frac{t}{T} \cdot 2\pi$ oder $\varphi = t \cdot \sqrt{k}$.

Man hat:

$$x = r \cdot \cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k}),$$

$$v = -c \cdot \sin\varphi = -c \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = -c \cdot \sin(t \cdot \sqrt{k}),$$

$$a = -k \cdot x = -c\sqrt{k} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = -c\sqrt{k} \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k}).$$

Durch zwei Konstanten z. B. durch c und k oder durch c und r sind die Gröfsen x, v und a vollständig bestimmt.

Man nennt r die ***Amplitude*** *der Schwingung.*

Unter x ist die Entfernung OP_x zu verstehen, welche in den Grenzen $+r \ldots o \ldots -r \ldots o \ldots +r$ veränderlich ist. Diese Veränderung stellt der Cosinus direkt dar: für $t = o$ ist $x = \frac{c}{\sqrt{k}} = r$, für $t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $x = o$, für $t = \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $x = -\frac{c}{\sqrt{k}} = -r$, für $t = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $x = o$, für $t = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $x = \frac{c}{\sqrt{k}} = r$.

Zwei Werte t_1 und t_2, welche um $2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ differieren, entspricht (T) derselbe Cosinus und derselbe Sinus.

Hier liegt eine Bewegung vor, bei welcher x, v, a nicht mehr durch endliche Summen aus Potenzen von t dargestellt werden können und für welche infolgedessen alle Glieder der Reihe

$$a^0, a^I, a^{II}, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

im allgemeinen von Null verschieden sind.

Nach den Sätzen über die Beziehung von Stamm und Ableitung folgt:

$$\text{Ableitung } (\cos mt) = -m \sin t \text{ und}$$
$$\text{Ableitung } (\sin mt) = m \cdot \cos t.$$

Für die Reihe $a^0, a^I, a^{II}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ folgen hier aus $x = \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k})$ die Beziehungen:

$$\text{Ableitung } (x) = v = -\sqrt{k} \cdot \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \sin(t\sqrt{k}) = a^0,$$

$$\text{Ableitung } (v) = a = -(\sqrt{k})^2 \cdot \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \cos(t\sqrt{k}) = a^I,$$

$$\text{Ableitung } (a) = a^{II} = +(\sqrt{k})^3 \cdot \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \sin(t\sqrt{k}) = a^{II},$$

$$\text{Ableitung } (a^{II}) = a^{III} = +(\sqrt{k})^4 \cdot \frac{c}{\sqrt{k}} \cdot \cos(t\sqrt{k}) = a^{III}.$$

Man sieht unmittelbar ein, dafs die Reihe nicht abbrechen kann.

Trotzdem ist die Bewegung aus einer sehr einfachen Bewegung (gleichförmige Kreis-Bewegung) herleitbar.

Wenn man die Linie QQ′ verbiegt, ohne auf ihr an den tangentialen Bewegungs-Verhältnissen etwas zu ändern, so bleiben alle bisherigen Betrachtungen in Geltung.

Man hat Normal-Komponenten der Beschleunigung hinzuzusetzen, aus welchen die Krümmung der gebogenen Bahn resultiert.

Wenn ein Punkt P_x auf einer Kurve $X X'$ nach dem Gesetze $a_T = - k . s$ um einen Punkt (O) der Kurve Schwingungen vollführt, so ist die Dauer einer Doppel-Schwingung $T = 2 \pi \sqrt{\frac{1}{k}}$.

Dabei ist die Gröfse s von O aus auf der Kurve zu messen, da s vor der Verbiegung mit x übereinstimmte.

Wenn man zu der Ebene des Kreises, von welcher die ganze Betrachtung ihren Ausgang nahm, eine Normal-Ebene konstruiert, so führt die Projektion der Bewegung auf die bereits betrachteten Schwingungen.

Zur Veranschaulichung kann man den Mittelpunkt einer, die Erde umkreisenden, Kugel auf den Durchmesser der Erde projiciert denken.

Wenn man dagegen auf eine andere Ebene projiciert, so wird der Kreis nicht als Grade, sondern als Ellipse projiciert; statt der gradlinigen Schwingungen treten bestimmte Bewegungen auf elliptischer Bahn ein.

Jede Sehne aus einer Schar von parallelen Sehnen, $y_1, y_2, y_3, \ldots$ eines Kreises wird durch einen bestimmten Diameter $X O X'$ halbiert.

Projiciert man Kreis und Sehnen-Schar auf einer Ebene, welche die Kreis-Fläche in jenem Durchmesser XX' unter dem Winkel α schneidet, so gehört zu jeder Sehne y_i eine Projektion $y_i . \cos\alpha = y'_i$.

Legt man durch den Mittelpunkt (O) des Kreises eine Normal-Ebene zum Diameter XX', welche die beiden Ebenen beziehungsweise in $O Y$ und $O Y'$ schneidet, so entstehen zwei Koordinaten-Kreuze $X O Y$ und $X O Y'$, für welche $x = x'$ und $y . \cos\alpha = y'$ gilt.

Da der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ als diophantische Gleichung hat, so gilt ($x' = x$ und $y' = y . \cos\alpha$) für dessen Projektion:

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\cos^2\alpha} - r^2 = 0 \text{ oder } \left(\frac{x'}{r}\right)^2 + \left(\frac{y'}{r . \cos\alpha}\right)^2 = 1.$$

Die Achsen der Ellipse, welche hier durch Projektion entsteht, sind $2 r$ und $2 r . \cos\alpha$.

Bei den **elliptischen** Schwingungen sind die Beschleunigungen stets nach dem Centrum der Ellipse gerichtet, während ihre Werte den zugehörigen radii vectores proportional sind.

Wenn man den zu projicierenden Kreis durch ein reguläres Polygon von n Seiten ersetzt, welches während der Zeit-Dauer $T = n . \tau$ durchlaufen wird, und wenn man beachtet, dafs für die gleichförmige Bewegung auf einem solchen Polygon in jeder Ecke desselben die centripetale Zusatz-Geschwindigkeit

$\tau \cdot \left(\frac{c^2}{r}\right)$ in Rechnung zu bringen ist, so erhält man statt der Ellipse ein irreguläres Polygon, welches unter Zusatz von lauter centripetalen Geschwindigkeiten durchlaufen wird, welche den radii vectores, auf denen sie zur Geltung kommen, proportional sind.

Der Grenz-Übergang weist die Behauptung auch für die Ellipse nach.

Die Centripetal-Beschleunigung $-k \cdot s$ für die Kreis-Bewegung ist stets $\frac{c^2}{r}$ und zwar ist dabei durchweg $s = r$ zu setzen, so dafs $k = \left(\frac{c}{r}\right)^2$ resultiert.

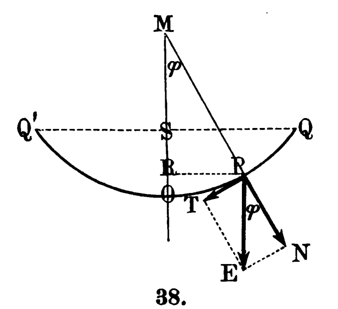
Derselbe Wert $k = \left(\frac{c}{r}\right)^2$ gilt auch für die Ellipse, da für die Endpunkte des unverkürzten Durchmessers (r) die Centripetal-Beschleunigung $\frac{c^2}{r}$ vorhanden ist: die Umlaufs-Zeit hat auch für die Ellipse den Wert $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}}$.

C. **Das ideale Pendel.** Wenn eine Bleikugel am Ende eines Fadens (l) befestigt ist, so nimmt dieselbe eine Ruhe-Lage an, bei welcher der Faden in vertikaler Richtung gespannt erscheint.

Wird die Kugel (Pendel) gestofsen, so vollführt sie Schwingungen um die Ruhe-Lage: wenn ihr Mittelpunkt die Stofs-Richtung aufnahm, so schwingt dieselbe in einer Vertikal-Ebene und zwar auf einem Kreis-Bogen.

Diese Schwingungen lassen sich mit einer gewissen Annäherung als gleichmäfsige Schwingungen auffassen, so dafs die eben gegebenen Darstellungen verwendet werden können.

Stellt man die Beschleunigung g für die Lage φ durch PE (Figur 38) dar und zerlegt man aufserdem PE in PN und PT, so sieht man ein, dafs nur die Komponente $PT = g \cdot \sin\varphi$ zur Wirkung kommt, weil ja PN durch die Festigkeit des Fadens aufgehoben wird. In Richtung der Bahn, d. h. auf dem Kreis-Bogen kommt also $a_T = g \cdot \sin\varphi$ zur Geltung.



38.

Wenn a_T zu $-OP$ proportional wäre, so hätte man hier in aller Strenge gleichmäfsige Schwingungen anzunehmen. Da aber a_T zu $-RP$ proportional ist, so würden gleichmäfsige Schwingungen auf QQ' eine andere Beschleunigung $a'_T = a_T + \varepsilon_\varphi$ voraussetzen, wobei ε_φ ein von φ abhängiges Korrektions-Glied bedeutet, welches dem Unterschiede von OP und RP entspricht.

Wenn also statt der Gröfse $a_T = -\frac{g}{l} \cdot RP$ *die Gröfse*

$$a'_T = -\frac{g}{l} \cdot OP = -\frac{g}{l}(RP + [OP - RP])$$
$$= a_T - \frac{g}{l}(OP - RP)$$

aufträte, so würden gleichmäfsige Schwingungen vorhanden sein.

Die Untersuchung des Wertes $\varepsilon_\varphi = -\frac{g}{l}(OP - RP)$ *zeigt, dafs trotzdem auch für* a_T *innerhalb gewisser Grenzen gleichmäfsige Schwingungen vorhanden sind.*

Man hat für φ *im Bogen-Mafs* $OP = l \cdot \varphi$ *und* $RP = l \cdot \sin\varphi$ *zu setzen, so dafs* $\varepsilon_\varphi = g(\varphi - \sin\varphi)$ *resultiert.*

Für die Reduktion von Gradmafs (α) *auf Bogenmafs* (φ) *benutzt man entweder die Gleichung* $\varphi = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi$ *oder man bedient sich entsprechender Tabellen* [1]. *Man findet:*

α	$\varphi - \sin\varphi$	$\varepsilon_\varphi = g(\varphi - \sin\varphi)$
1	0,000001	0,0000098
2	0,000007	0,0000686
3	0,000023	0,0002255
4	0,000056	0,0005589
5	0,000111	0,0010884
6	0,000191	0,0018728

So lange also φ *unter* 5^0 *liegt, macht sich der Fehler nicht vor der dritten Decimal-Stelle bemerkbar.*

So lange der Ausschlags-Winkel φ im Gradmafs 5^0 nicht übersteigt, darf die Bewegung von P als eine gleichmäfsige Schwingung um O betrachtet werden.

Innerhalb dieser Grenzen ist $a_T = a'_T = -\frac{g}{l} \cdot OP$ *zu setzen, so dafs also* k *hier den Wert* $\frac{g}{l}$ *erhält.*

Mifst man die Bogen-Länge OP = x auf QQ' stets von O aus, so ist also

$$a_T = -c\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$
$$v = -c \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

1) Dieselben sind im allgemeinen auch den zum Schulgebrauch angefertigten Logarithmen-Tafeln beigegeben.

$$x = \frac{c}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \cdot \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Dabei bedeutet c die Geschwindigkeit im Punkte O, d. h. die Geschwindigkeit beim Durchgange durch die Ruhe-Lage.

Führt man den Ausschlags-Winkel σ ein, welcher der gröfsten Entfernung (O Q) von der Ruhe-Lage entspricht, so ist

$$OS = MO - MS = l\,(1 - \cos\sigma)$$

die Vertikal-Strecke, um welche P auf den Bogen Q O gefallen ist.

Demnach (S. 214) ist $c = 2\sqrt{gl}\,\sin\frac{\sigma}{2}$.

Die **Schwingungs-Dauer** des Punktes P läfst sich innerhalb der festgestellten Grenzen durch $2\pi\sqrt{\frac{l}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wiedergeben.

Ein Pendel, welches bei 30′ Ausschlag (σ = 0°, 30′ 0″) eine Schwingungs-Dauer von 1″ hat, schwingt bei wachsendem Ausschlags-Winkel längere Zeit.

Den Zusammenhang der Werte soll folgende Tabelle[1]) *darstellen.*

σ	T
1°	1″,00002
2°	1″,00008
3°	1″,00017
4°	1″,00030
5°	1″,00048
10°	1″,00190
20°	1″,00766

Um den Wert für T genauer darzustellen, hat man sich der folgenden Formel zu bedienen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left[\frac{1}{2}\right]^2 \sin^2\frac{\sigma}{2} + \left[\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right]^2 \sin^4\frac{\sigma}{2} + \left[\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right] \sin^6\frac{\sigma}{2} + \ldots\ldots\right).$$

In der Klammer steht eine unendliche Reihe, deren Glieder kleiner und kleiner werden.

---

1) Vergl. Buff, Lehrbuch, S. 328.

Für $\sigma = 5^{\circ}$ ist $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\sigma}{2} = 0{,}0004756$, so daſs bei einer Beschränkung auf das erste Glied $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ hier der Fehler erst in der dritten Decimal-Stelle sichtbar wird.

Um diese Formel für T abzuleiten, hat man die Korrektur ε_φ zu berücksichtigen [1]).

Bei der Bewegung auf dem Kreis-Bogen darf die Schwingungs-Dauer nur innerhalb gewisser Grenzen vom Ausschlags-Winkel (ε_φ) unabhängig gedacht werden.

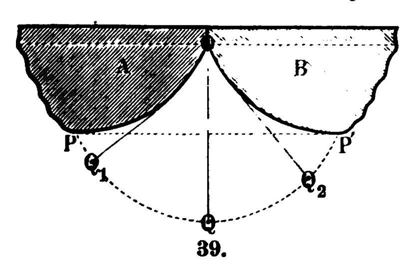
Es giebt eine Kurve, für welche dieser Isochronismus durchweg vorhanden ist: dieselbe heiſst Cykloide. Wenn ein Kreis ohne zu gleiten auf einer Graden (Basis) abrollt, so beschreibt jeder Punkt desselben eine Cykloide.

Denkt man einen Kreis unterhalb einer horizontalen Graden auf dieser hinrollen, bis der ursprüngliche Berührungs-Punkt zum zweiten Male berührt, so wird von jedem Punkte der Peripherie (Fleck auf dem Kranze eines sich bewegenden Wagenrades) ein Cykloiden-Bogen beschrieben, dessen konkave Seite nach oben gekehrt ist und welche also eine analoge Lage hat wie der bisher betrachtete Kreis-Bogen.

Auf einem solchen Cykloiden-Bogen braucht der Mittelpunkt einer schweren Kugel stets dieselbe Zeit-Dauer, um von irgend einem Punkte nach dem tiefsten Punkte zu fallen, beziehungsweise um wieder vom tiefsten Punkte auf der andern Seite eben so weit emporzusteigen.

Die Cykloide heiſst infolgedessen Tautochrone: Schwingungen auf ihr sind isochron.

Um eine solche Cykloiden-Bewegung herzustellen, hängt man ein Pendel zwischen zwei cylindrischen Holz-Backen (A und B) auf (Figur 39), deren Querschnitt zum teil durch je einen halben Cykloiden-Bogen (O P und O P') gebildet wird.



39.

Der Faden des Pendels O Q beziehungsweise (O Q_1 oder O Q_2) wickelt sich bei der Bewegung immer von der einen Backe ab, um sich auf die andere aufzuwickeln: der Mittelpunkt der Kugel beschreibt dabei wiederum einen Cykloiden-Bogen.

Die Cykloide hat auſserdem noch die bemerkenswerte Eigen-

1) Eine Durchführung der Rechnung für den allgemeinen Fall, welche allenfalls noch als elementar bezeichnet werden kann, giebt Schellbach, „Neue Elemente“, S. 224 flg. Bekanntlich wird t als elliptisches Integral erster Gattung dargestellt: daſs umgekehrt die Wert-Verhältnisse eines solchen an der Pendel-Bewegung veranschaulicht werden können, verdient bemerkt zu werden.

schaft, dafs sie diejenige Kurve ist, auf welcher ein Punkt unter dem Einflusse der Schwere im allgemeinen am schnellsten von einem Punkte P nach einem Punkte Q gelangt.

Die Cykloide heifst infolgedessen Brachistochrone.

Die Konstruktion des Cykloiden-Pendels rührt von Huyghens (Horologium oscillatorium 1673) her, welcher diese Kurve als Tautochrone erkannte.

Zur Geschichte des Problems der Tautochrone vergleiche Ohrtmann, Programm der königlichen Realschule zu Berlin, 1872.

Das Problem der Brachistochrone, welches zuerst von Galilei berührt und dann von Jakob Bernoulli (Acta eruditorum 1696) scharf präcisiert wurde, verdankt Leibniz seine Lösung.

Wenn man von dem Widerstande der Luft und von der Reibung in der Aufhängung absieht, so läfst sich die Schwingungs-Dauer einer pendelnden Bleikugel in einer gewissen Annäherung durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

darstellen.

Wenn man also T durch den Versuch bestimmt und l der Messung unterwirft, so kann man einen angenäherten Wert von g ableiten.

Rohe Werte von g erhält man äufserst leicht mit sehr einfachen Mitteln, genaue Werte von g gewinnt man selbst mit sehr guten Mitteln nur äufserst schwierig.

Eine durchbohrte Flintenkugel, welche an einem dünnen Seiden-Faden aufgehangen wird, genügt, um den Wert 9,8 abzuleiten [1].

Da man bei jedem physischen System, welches unter dem Einflusse der Erd-Schwere schwingt, einen Punkt (Schwingungs-Punkt) auffinden kann, welcher dem Punkte P in unserer Betrachtung entspricht, so lassen sich die Sätze über das ideale Pendel unmittelbar auf das physische Pendel übertragen.

Die Theorie des physischen Pendels kann erst in der Dynamik gegeben werden.

Bei vielen Beobachtungen handelt es sich darum, die Schwingungs-Dauer (T) eines pendelnden Körpers festzustellen.

Um dies durchzuführen, zählt man im allgemeinen eine gröfsere Anzahl von Schwingungen und sucht gleichzeitig die im ganzen dazu verwendete Zeit zu bestimmen.

Statt der Schwingungs-Dauer (T) pflegt man wohl auch die Schwingungs-Zahl (n) anzugeben, d. h. mitzuteilen, wie viel Schwingungen in einer Sekunde gemacht werden.

---

1) Als ich im Sommer 1882 den Schülern der Ober-Sekunda des hiesigen Gymnasiums als freiwillige Ferien-Aufgabe die Bestimmung von g vorgeschlagen hatte, erhielt ich fast durchweg Arbeiten mit ganz befriedigenden numerischen Ergebnissen.

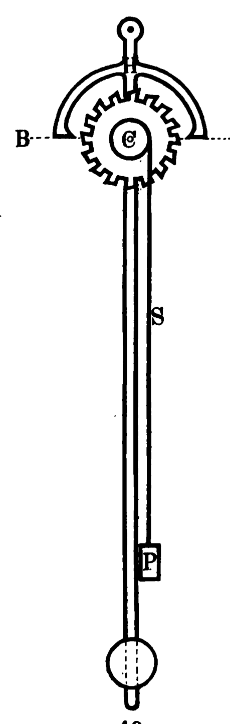
Hat man z. B. $T = 0'',25$ gefunden, so ist $n = 4$, d. h. bei einer Schwingungs-Dauer von $0'',25$ gehen 4 Schwingungen in 1'' vor sich.

Das **Pendel** ist eins der wichtigsten **Mess-Instrumente.** *Abgesehen von seiner Verwendung für die Konstruktion von Uhren dient dasselbe hauptsächlich zur Bestimmung der Konstante g.*

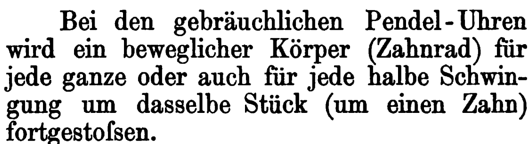
Die **Konstruktion der ersten Pendel-Uhr** (durch Huyghens) fand im Jahre 1658 statt, während Taschen-Uhren mit Feder-Getriebe schon seit dem Anfange des 16. Jahrhunderts in Brauch gekommen waren.

Da ein Pendel innerhalb gewisser Grenzen zu jedem Hingange und zu jedem Hergange dieselbe Zeit-Dauer gebraucht, so kann man Vorrichtungen ersinnen, welche das Vorüberfliefsen gleicher Zeit-Teile in irgend einer Weise kenntlich machen, indem sie den Ablauf jeder halben oder jeder ganzen Pendel-Schwingung notieren.

So könnte man z. B. eine pendelnde Bleikugel mit einem, vertikal nach unten gerichteten Stifte versehen, welcher auf einer vorübergleitenden, horizontal gelegenen Tafel, bei jedem Durchgange durch die Ruhelage eine Marke aufzeichnet.



40.


Bei den gebräuchlichen Pendel-Uhren wird ein beweglicher Körper (Zahnrad) für jede ganze oder auch für jede halbe Schwingung um dasselbe Stück (um einen Zahn) fortgestofsen.

Die Belastung P spannt eine Schnur (S), welche auf einem drehbaren Cylinder (C), d. h. auf einer Welle aufgewickelt ist. Die Welle trägt ein Rad, in dessen Zähne ein Haken (H) eingreifen kann, mit welchem ein Pendel fest verbunden ist, so dafs dieses durch seine Bewegungen den Haken in gleichmäfsige Schwingung versetzt.

Beim Durchgange durch die Ruhelage (Figur 40) stellt das Pendel die Basis (B B') des Hakens horizontal: das Zahnrad kann sich drehen.

Bei den Bewegungen nach rechts und nach links stellt das Pendel eine Neigung der Basis (B B') des Hakens her: das Zahnrad ist gehemmt.

Ein physisches Pendel kömmt durch die Reibung in der Aufhängung und durch die Reibung an der umgebenden Luftmasse sehr

bald zur Ruhe: das Gewicht einer Uhr giebt dem Pendel-Haken vermittelst des Zahnrades in dem Momente, wo derselbe die Drehung der Welle gestattet, einen Stofs, der den Einflufs der Reibung wieder aufhebt.

Die Feder-Uhren (z. B. Taschen-Uhren) werden durch eine starke elastische Feder getrieben, welche aufserdem ein kleines Schwungrad mit Spiralfeder (Unruhe) in Bewegung setzt: diese Konstruktion ersetzt Gewicht und Pendel.

Die Erfindung der Unruhe mit Spiralfeder, welche den Gang der Feder-Uhren reguliert, verdankt man Huyghens.

Im Hinblick auf die gebräuchliche Wahl der Zeit-Einheit (Sekunde) hat es einen gewissen Wert, Pendel zu konstruieren, welche gerade **eine Sekunde** gebrauchen, um eine **halbe Schwingung** auszuführen: man nennt dieselben **Sekunden-Pendel.**

Aus der Gleichung $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt:

$$2 \cdot 1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}, \text{ d. h.}$$

die Länge l_1 des Sekunden-Pendels hat den Wert $\frac{g}{\pi^2}$.

Da g nach den früher mitgeteilten Angaben zwar an einem Orte der Erdoberfläche für alle Materialien denselben Wert hat, an verschiedenen Orten der Erdoberfläche aber verschiedene Werte annimmt, so kann man die Länge des Sekunden-Pendels nur für einen bestimmten Ort angeben.

Für Berlin hat man z. B. $l_1 = 994{,}224$ *mm, für Paris hat man dagegen* $l_1 = 993{,}856$ *mm.*

Oberhalb und unterhalb eines Punktes der Erdoberfläche für welchen l_1 *die Länge des Sekunden-Pendels bezeichnet, wird ein Pendel von der Länge* l_1 *seine halben Schwingungen nicht mehr in einer Sekunde ausführen.*

Aus der Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ *folgt, dafs für ein und denselben Wert von l die Gröfse T bei abnehmendem Werte von g gröfser und gröfser wird.*

Auf Erhebungen der Erdoberfläche verzögert sich der Gang eines Pendels im Vergleich zu den Schwingungen in der Höhe des Meeres-Niveaus.

Eine Uhr mit Sekunden-Pendel würde unter sonst gleichen Umständen auf dem Brocken (1143 m) täglich 11″ bis 12″ nachgehen, wenn der Gang desselben für das Meeres-Niveau berechnet ist.

Richer mufste während seiner wissenschaftlichen Reise (1672) in Cayenne das Sekunden-Pendel seiner astronomischen Uhr, welche für Paris reguliert war und nun täglich circa 148 Sekunden nachging, um 1,25 Pariser Linie, d. h. um 2,82 mm verkürzen und schlofs dies auf eine Abnahme der Konstante g.

Das Sekunden-Pendel, welches nun für Cayenne berechnet war, mufste in Paris wiederum um 1,25 Pariser Linie, d. h. um 2,82 mm verlängert werden um dort richtig zu gehen.

Cayenne liegt ungefähr unter dem 5ten Grade nördlicher Breite (also ziemlich nahe am Äquator) und hat infolgedessen einen relativ kleinen Wert von g, während Paris unter dem 49ten Grade nördlicher Breite liegt, so dafs dort der Mittel-Wert von g, d. h. g_{45} noch um etwas überschritten wird.

Durch Beobachtungen von **Pendel-Schwingungen** kann der Wert der Konstante g bestimmt werden.

Wenn man im Hinblick auf die Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ die Gröfse l mifst und T beobachtet, so gelangt man zu

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Wie die Länge l für ein physisches Pendel festgestellt wird, soll später (in der Dynamik) gezeigt werden.

*Borda hat 1792 die sehr genaue **Methode der Coincidenzen** für die Bestimmung von g entwickelt und selbst eine grofse Reihe von Beobachtungen gemacht.*

*Biot und Arago wiederholten 1821 die Bordaschen Versuche, während Kater (1818) das **Reversions-Pendel** einführte.*

*Die genauesten Beobachtungen verdankt man Bessel, welcher (1828) die **Differenz-Methode** einführte.*

Durch die Besselschen Beobachtungen wurde bestätigt, dafs der Wert von g an einem und demselben Orte für alle Stoffe (z. B. Gold, Holz, Bei etc.) konstant ist, dafs also alle Körper, wie man sich höchst ungenau auszudrücken pflegte, gleich schwer sind.

Die berühmte Expedition zur Gradmessung in Peru, welche auf Veranlassung der Pariser Akademie in den Jahren 1735 bis 1744 ausgeführt wurde, gab den beiden Forschern De la Condamine und Bouguer Gelegenheit, die Schwingungs-Dauer eines und desselben Pendels, dessen Bewegungs-Verhältnisse man für Paris kannte, in Guayaquil am stillen Ocean, in Quito und auf dem Pinchincha festzustellen, während die Beobachtungen von Maupertuis für Torneo weitere Vergleichs-Punkte boten.

Da man dasselbe Pendel benutzte, so hatte man nur die Schwingungs-Dauer oder auch die Schwingungs-Zahl des Pendels an den verschiedenen Orten festzustellen, nachdem der Wert von g für einen Ort (hier für Paris) durch Beobachtung und Rechnung gefunden war.

Die Beobachtungen führen, verglichen mit der Berechnung[1]

---

1) Die Formel entsteht aus der oben (S. 226) angegebenen durch Einführung von

aus der Formel $g^a_{\varrho,\varphi} = 9805{,}92 \frac{R^2}{\varrho^2} (1 - 0{,}00259 \cos 2\varphi)$ *zu folgendem Ergebnisse* [1]).

Beobachtungs-Ort.	*Schwingungs-Zahl pro Tag.*	*Geographische Breite.*	*Höhe über dem Meere in Pariser Fufs.*	*g in* $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sek.}) \cdot (\text{Sek.})}$ *beobachtet.*	*g in* $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sek.}) \cdot (\text{Sek.})}$ *berechnet.*
Paris	*98891*	*48°50′ n.*	*185*	*9808,8*	*9808,9*
Torneo	*98964*	*66° 0′ n.*	*0*	*9822,5*	*9822,9*
Guayaquil	*98770*	*2°11′ s.*	*0*	*9784,8*	*9780,6*
Quito	*98740*	*0°14′ s.*	*8970*	*9778,9*	*9771,6*
Pinchincha	*98720*	*0°14′ s.*	*14988*	*9774,9*	*9765,6*

In der Übereinstimmung der letzten beiden Kolumnen liegt eine Gewährleistung für die Richtigkeit der Formel für $g^a_{\varrho,\varphi}$.

Eine **Zusammenstellung der Werte von g**, welche für die verschiedenen Punkte der Erdoberfläche gefunden wurden, gestattet bestimmte Schlüsse über die **Gestalt der Erdoberfläche** zu machen.

Die Formel für $g^a_{\varrho,\varphi}$ *lehrt, dafs zwei verschiedene Werte von g zwei Orten entsprechen, welche vom Mittelpunkte der Erde ungleichen Abstand haben und zwar mufs* $g^a_{\varrho,\varphi}$ *mit wachsendem* ϱ *selbst abnehmen.*

Die erste genauere Grad-Messung (1669), welche von Picard und Cassini durchgeführt wurde, ergab für Nord-Frankreich gröfsere Grade (= 15 geographische Meilen) als für Süd-Frankreich, so dafs man die Oberfläche der Erde als ein verlängertes Rotations-Ellipsoid auffassen zu müssen glaubte.

Eine Zusammenstellung der Werte von g widerlegt diese Annahme für immer: die Erde ist wie schon Newton geschlossen hatte, an den Polen abgeplattet und mufs als ein verkürztes Rotations-Ellipsoid aufgefafst werden. Die Ergebnisse der Peruanischen Grad-Messung bestätigen diese Anschauung auf das vollkommenste, während die immerhin noch relativ ungenauen Werte von Picard und Cassini allerdings auf ein verlängertes Rotations-Ellipsoid schliefsen liefsen.

$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$. Man rechnete den Halbmesser der Erde zu 19 630 000 Pariser Fufs.

1) Vergl. Buff, Lehrbuch I, 344.

C. Die Polar-Methode.

§. 1. Die allgemeine Theorie.

Wenn man einen Punkt P mit einem festen Punkte O, dem Pole, durch eine Grade OP, den radius vector, verbindet, so kann man die Lage von P durch die Lage und Länge von OP bestimmen.

Für die Lagen-Bestimmung von OP soll hier stets die Methode der Längen und Breiten angewandt werden, so dafs also durch O eine feste Ebene mit einem festen Strahle OL zu legen und aufserdem die Normale (ON) der festen Ebene zu errichten ist.

Eine Hülfs-Ebene NOP projiciert den radius vector als Strahl OM auf die feste Ebene und nun ist $\sphericalangle$ NOP $= \zeta$ und $\sphericalangle$ LOM $= \lambda$ zu messen, wobei sich ζ in den Grenzen $0^\circ \ldots 180^\circ$ und λ in den Grenzen $0^\circ \ldots\ldots 360^\circ$ bewegt.

Ein Punkt W_i der Bahn von P ist hiermit als $(\rho_i; \lambda_i, \zeta_i)$ gegeben. Die Bewegung von P auf $W_0, W_1, W_2 \ldots\ldots W_n$ ist hier durch die Veränderung der Länge OP, d. h. durch die Werte $\rho_0, \rho_1 \ldots\ldots \rho_n$ und zugleich durch die Änderung der Winkel λ und ζ, d. h. durch die Werte $\lambda_0, \lambda_1, \ldots\ldots \lambda_n$ und $\zeta_0, \zeta_1, \ldots\ldots \zeta_n$ völlig bestimmt, da man für jedes Tripel $(\rho_i; \lambda_i, \zeta_i)$ das zugehörige W_i konstruieren kann.

Abgesehen von der Veränderung der Länge ρ kommen also hier Winkel-Änderungen in Frage, deren jede durch die Mafs-Zahlen verschiedener Bogen eines und desselben Kreises dargestellt werden mufs.

Wenn sich der eine Schenkel eines Winkels um den Scheitelpunkt O bewegt, während der andere Schenkel seine Lage beibehält, so beschreibt jeder Punkt des beweglichen Schenkels einen Kreis.

Wenn wir irgend einen Punkt S des Schenkels herausgreifen, der durch die Festsetzung $OS = r$ gegeben sein mag, so wird die Änderung des Winkels, beziehungsweise des Bogens dargestellt durch die Bewegung von S auf einem Kreise vom Radius r. Diese Bewegung wird durch eine elementare Inkrementen-Reihe der Kreis-Peripherie angegeben, für welche Geschwindigkeit, Beschleunigung etc. wohl definiert sind.

Wenn man nun jedes Inkrement, das ja ein bestimmter Kreisbogen ist, als ein Bruchteil des Radius darstellt, so gelangt man dazu, die Änderung des Winkels, welcher der Bewegung entspricht, in der Darstellung unabhängig zu machen von der Lage des zufällig ausgewählten Punktes S . . . man wählt mit andern Worten stets die Bewegung auf einem Kreise vom Radius 1 als mafsgebende Bewegung aus.

Dividiert man das in dieser Weise gemessene Inkrement durch τ, so gelangt man zu einer Gröfse ω, welche ***Winkel-Geschwindigkeit*** *genannt wird.*

Da die Punkte des beweglichen Strahles sich auf Kreisen von

verschiedenem Radius bewegen, so hat jeder Punkt eine andere Geschwindigkeit, während doch für alle ω *denselben Wert hat.*

Bezeichnet man auf einem Kreise (r) den zum Inkremente $W_{i-1}W_i$ *gehörigen Winkel im Grad-Maſs mit* α_i, *so ist*

$$\frac{\alpha_i}{360} = \frac{W_{i-1}W_i}{2r\pi}, \text{ d. h. } W_{i-1}W_i = r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha_i}{180}.$$

Man hat demnach für die Winkel-Geschwindigkeit des Strahles OS *in der Lage i (d. h. für das Zusammenfallen von S und* W_i) *die Beziehung:*

$$\omega_i = \lim\left(\frac{W_{i-1}W_i}{r \cdot \tau}\right) = \lim\left(\frac{\pi \cdot \alpha_i}{180} \cdot \frac{1}{\tau}\right),$$

$$\text{d. h. } v_i = r \cdot \omega_i = \lim\left(\frac{r \cdot \pi \cdot \alpha_i}{180\,\tau}\right).$$

Ebenso definiert man die Winkel-Beschleunigung I. O. des Strahles OS *in der Lage i (d. h. für das Zusammenfallen von S und* W_i) *durch die Gleichung:*

$$\eta_i = \lim\left(\frac{\frac{W_{i-1}W_i}{r \cdot \tau} - \frac{W_{i-2}W_{i-1}}{r \cdot \tau}}{\tau}\right).$$

Wenn ω_i *für jedes i denselben Wert hat, so nennt man die (stets konstante) Zeit-Dauer eines Umlaufes von S die Umdrehungs-Zeit oder die Umlaufs-Zeit.*

Bezeichnet man dieselbe durch u, so hat man für die Geschwindigkeit (c) auf irgend einem Kreise (r) die Relationen

$$\frac{2r\pi}{u} = c, \text{ d. h. } u = \frac{2r\pi}{c} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Bei dieser gleichförmigen Kreis-Bewegung ist eine centripetale Komponente der Beschleunigung von der Höhe $\frac{c^2}{r}$ *in Rechnung zu bringen, d. h. man hat*

$$\frac{c^2}{r} = \frac{4r^2\pi^2}{r \cdot u^2} = \frac{4r\pi^2}{u^2} = r \cdot \omega^2.$$

Bezeichnet man mit n die Anzahl der Umläufe für die Zeit-Dauer d, so ist

$$c \cdot d = n \cdot 2r\pi.$$

Setzt man nun ein für alle Mal eine bestimmte Zeit-Dauer fest, z. B. 1'' oder 1' = 60'' etc., so ist $\frac{2\pi}{d}$ *eine Konstante, z. B. 6,2831 oder 0,1047.*

Für die Technik, wo man die Anzahl der Umläufe für die Minute berechnet, hat man die Formeln:

$$c = 0{,}1047\, r \cdot n \text{ und } \omega = 0{,}1047\, n \text{ oder } n = 9{,}5493\, \omega.$$

Man hat nun einerseits die Bewegung des Strahles OM in der festen Ebene zu verfolgen, indem man $\sphericalangle LOM = \lambda$ miſst, man hat andererseits die Bewegung von OP innerhalb der beweglichen Vertikal-Ebene NOP zu verfolgen, indem man in dieser $\sphericalangle NOP = \zeta$ miſst.

Führt man eine Hülfs-Kugel ein, deren Centrum in O liegt, so werden für die festen und für die beweglichen Ebenen Kreise bestimmt, auf denen die Winkel-Messung vorgenommen werden kann.

Für Inkrementen-Reihen auf diesen Kreisen (für Punkte P_λ und P_ζ) würde man Ausdrücke in t finden, welche für $t = o, \tau, 2\,\tau \ldots\ldots$ die Lage eines beweglichen Punktes S bestimmen und zwar könnte dies direkt oder mit Hülfe von v oder auch mit Hülfe von a geschehen.

Da die Winkel durch Bogen in Bezug auf den Radius gemessen werden sollen und da ferner ω_i und η_i, beziehungsweise der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes S proportional sind, so gilt auch für die Änderung von λ und ζ Analoges.

Ebenso wie bei der Projektions-Methode **drei** Bewegungen (von P_x, P_y, P_z) festgestellt werden mufsten, um die Bewegung von P auf seiner Bahn wiederzugeben, so müssen auch hier **drei** Bewegungen in Rechnung gezogen werden.

Man betrachtet einerseits die Bewegung von P selbst und zwar auf der **graden** Linie OP, man betrachtet andererseits die Bewegung der Strahlen OM und OP, beziehungsweise die Bewegungen von Punkten P_λ und P_ζ auf ein für alle Mal festgestellten Hülfs-Kreisen.

Auch hier sind drei Fälle für die Darstellung zu unterscheiden: 1) Es sind unmittelbar ρ, λ, ζ gegeben, 2) es sind die Geschwindigkeiten von P, P_λ und P_ζ für OP und die beiden Hülfs-Kreise gegeben und aufserdem ein Wert ρ_i, λ_i, ζ_i, 3) es sind die Beschleunigungen von P, P_λ und P_ζ für OP und die beiden Hülfs-Kreise gegeben und aufserdem ein Wert ρ_i, λ_i, ζ_i und die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Will man von der Polar-Methode zur Projektions-Methode und von da zur Fundamental-Methode zurückkehren, so hat man ON als Z-Achse, OL als Y-Achse und eine in O errichtete Normale OK auf der Ebene NOL als X-Achse einzuführen und P auf die drei Achsen zu projicieren.

Man hat hier:

$$\left.\begin{aligned} z &= \rho\,.\cos\zeta \\ y &= \rho\,.\sin\zeta\,.\cos\lambda \\ x &= \rho\,.\sin\zeta\,.\sin\lambda \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} &\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ &\cos\zeta = \frac{z}{\rho} \text{ und } \sin\zeta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho} \\ &\sin 2\lambda = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} \end{aligned}\right.$$

Projiciert man P auf die feste Ebene durch die Normale PQ, so bestehen für $o < \zeta < 90^0$ die Beziehungen

$$OQ = \rho\,.\cos(90 - \zeta) = \sqrt{x^2 + y^2},\ OQ = \cos\lambda = x \text{ und } OQ\,.\sin\lambda = y.$$

Daraus folgen obige Formeln für $o < \zeta < 90^0$; *man überzeugt sich leicht, dafs sie auch für* $90^0 < \zeta < 180^0$ *(und für die Grenzen) gelten.*

Aus den links geschriebenen Systemen folgen die ersten beiden Gleichungen des rechts geschriebenen Systems unmittelbar; für die dritte bildet man $y x = \rho^2 . \sin^2 \zeta . \cos \lambda . \sin \lambda$.

Es ist wohl zu beachten, dafs bei gegebenem ρ, ζ, λ *nur* ***ein*** *Wert-System* x, y, z *gefunden wird, während bei gegebenem* x, y, z *unendlich viele Winkel-Paare* ζ, λ *gefunden werden.*

Wegen der Beziehungen

$$\cos(-\alpha) = \cos(+\alpha) \text{ und } \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$$

liefern die Werte-Paare $+\zeta$, φ *und* $-\zeta$, $\varphi \pm \pi$ *dieselbe Werte-Tripel* x, y, z, *ganz abgesehen davon, dafs ein Winkel durch die goniometrischen Funktionen immer nur bis auf ein ganzes Vielfaches von* 2π *bestimmt ist. Infolgedessen gehören zu einem bestimmten Werte-Tripel* (x, y, z) *die beiden unendlichen Reihen von Werte-Paaren*

$\zeta + m . 2\pi$, $\varphi + n . 2\pi$ *und* $-\zeta + m' . 2\pi$, $\varphi + (2n' \pm 1)\pi$ *für* m, n *und* m', n' *als beliebige ganze Zahlen.*

Diese Unbestimmtheit hebt sich für eine bestimmte Lage von P *durch die bereits getroffene Festsetzung, dafs* ζ *nur positive Werte innerhalb der Grenzen* $o \ldots . 180^0$ *annehmen soll und durch die Überlegung, dafs für ein so bestimmtes* ζ *auch* $\rho . \sin\zeta$ *nur einen Wert erhält und dafs damit endlich auch* $\cos\lambda = \frac{y}{\rho . \sin\zeta}$ *und* $\sin\lambda = \frac{x}{\rho . \sin\zeta}$ *völlig bestimmt werden, falls man* λ *auf die Grenzen* $o \ldots . 360^0$ *beschränkt.*

Für jede andere Lage von P *mufs man die Bedeutung der Werte* λ *und* ζ *dadurch gewinnen, dafs man* P *während seiner Bewegung von der Anfangs-Lage aus verfolgt, im besonderen ganze Umläufe der Hülfs-Punkte* P_λ *und* P_ζ *zählt und ferner auf Umkehr im Bewegungs-Sinne achtet* [1]).

§. 2. Die Flächen-Sätze.

Wenn die feste Ebene, welche früher als Äquatorial-Ebene bezeichnet wurde, die Bahn der Bewegung in sich aufnimmt, wenn also $\sphericalangle \zeta$ den Wert 90^0 hat, so geht das oben gegebene Formel-System über in:

$$\left.\begin{array}{l} y = \rho . \cos\lambda \\ x = \rho . \sin\lambda \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \sin 2\lambda = \dfrac{2\,xy}{x^2 + y^2} \end{array}\right. .$$

Wenn $\sphericalangle \lambda$ *konstant bleibt, so geht die Bewegung in der Hülfs-*

---

1) Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen S. 43.

Ebene NOP vor sich. Wenn man den festen Strahl OL oder den festen Strahl OK mit der Schnittlinie der beiden Ebenen zusammenfallen läſst, so hat beziehungsweise sin λ oder cos λ den Wert „Null", d. h. die Bewegung läſst sich darstellen durch

$$\left.\begin{array}{l} z = \rho \,.\, \cos\zeta \\ y = \rho \,.\, \sin\zeta \end{array}\right\} \text{ oder durch } \left\{\begin{array}{l} z = \rho \,.\, \cos\zeta \\ x = \rho \,.\, \sin\zeta \end{array}\right.$$

Hierbei muſs ζ von der Beschränkung, im Intervalle 0° . . . . 180° zu bleiben, befreit werden.

Um eine solche ebene Bewegung von der Bewegung im Raume auszuzeichnen, soll eine Achse OF eingeführt und der Winkel des Strahles OP gegen dieselbe durch φ bezeichnet werden.

Für die Winkel-Messung mag ein Kreis gewählt werden, dessen Sinn der Uhrzeiger-Bewegung entgegengesetzt ist.

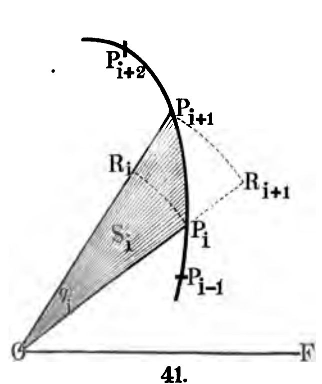
Wenn man für ρ und φ Rechnungs-Ausdrücke gegeben hat, welche die Zeit-Dauer t enthalten, so kann man für t = o, τ, 2τ . . . . die Werte von ρ und φ berechnen und damit die Lage von P für jeden Zeit-Moment darstellen. Man betrachtet dabei die Bewegung von P auf der Graden OP und die Bewegung der Graden OP um O, beziehungsweise eines Punktes P_φ derselben auf seiner Kreisbahn.

Wenn man den Pol O mit den Teil-Punkten W_0, W_1 . . . W_n einer Bahn-Inkrementen-Reihe verbindet, so entstehen eine Reihe von Sektoren W_0, OW_1, W_1OW_2 . . . . $W_{n-1}OW_n$, welche kurz als S_1, S_2 . . . . S_n eingeführt werden mögen.

Es verdient bemerkt zu werden, daſs S_i die Fläche darstellt, welche den radius vector in dem Zeitteile $[t_i]$ beschreibt, welcher dem Bahnstücke $[s_i]$ entspricht.

Bezeichnet man die Centri-Winkel der einzelnen Sektoren, beziehungsweise mit φ_1, φ_2 . . . . φ_n, so kann man die Fläche eines jeden derselben bei elementarer Teilung durch $\frac{1}{2}\varphi_i\rho^2_i$ darstellen.

Ersetzt man S_i durch den Kreis-Sektor P_iOR_i, welcher die Gröſse $\frac{1}{2}\varphi_i\rho^2_i$ hat, so erhält man ein Resultat, welches zu klein ist, ersetzt man S_i durch den Kreis-Sektor $P_{i+1}OR_{i+1}$, welcher die Gröſse $\frac{1}{2}\varphi_i\rho^2_{i+1}$ hat, so erhält man ein Resultat, welches zu groſs ist. (Figur 41).



41.

Demnach ist:

$$\frac{1}{2}\varphi_i\rho^2_i < S_i < \frac{1}{2}\varphi_i\rho^2_{i+1}.$$

Die Differenz der beiden Kreis-Sektoren, d. h. die Gröſse $\frac{1}{2}\varphi_i(\rho^2_{i+1} - \rho^2_i)$

hat den Wert $\varphi_i \left(\rho_i \delta_i + \frac{1}{2} \delta^2_i\right)$, *falls man den Unterschied von* ρ_{i+1} *und* ρ_i *als* δ_i *einführt.*

Bezeichnet ε *einen echten Bruch, so läſst sich* S_i *darstellen als*

$$\frac{1}{2} \varphi_i \rho^2_i + \varepsilon \varphi_i \left(\rho_i \delta_i + \frac{1}{2} \delta^2_i\right) = \varphi_i \left(\frac{1}{2} \rho^2_i + \varepsilon \delta_i + \frac{\varepsilon}{2} \delta^2_i\right).$$

Bei elementarer Teilung darf man innerhalb der Klammer die Glieder $\varepsilon \delta_i + \frac{\varepsilon}{2} \delta^2_i$ *im Hinblick auf die endliche Gröſse* $\frac{1}{2} \rho^2_i$ *vernachlässigen.*

Offenbar darf die Reihe $S_1, S_2 \ldots . S_n$ als **Flächen-Inkrementen-Reihe** bezeichnet werden, insofern als $S_1 + S_2 + \ldots . S_n$ die Fläche $W_0 O W_n$ darstellt.

Im Hinblick auf die Analogie zwischen den Reihen $s_1, s_2 \ldots s_n$ *und* $S_1, S_2 \ldots \ldots S_n$ *wird man von Flächen-Geschwindigkeit, Flächen-Beschleunigung etc. sprechen dürfen.*

$\frac{S_1}{\tau}, \frac{S_2}{\tau} \ldots . \frac{S_n}{\tau}$ *stellen für jede Einteilung mittlere Flächen-Geschwindigkeiten dar, ebenso wie* $\frac{s_1}{\tau}, \frac{s_2}{\tau} \ldots . \frac{s_n}{\tau}$ *für jede Einteilung mittlere Bahn-Geschwindigkeiten bezeichneten.*

Setzt man $\frac{S_i}{\tau} = \Phi[s_i]$, *so entspricht die Reihe* $\varphi[s_1], \varphi[s_2] \ldots \ldots \varphi[s_n]$ *der Reihe* $\Phi[s_1], \Phi[s_2] \ldots . \Phi[s_n]$.

In analoger Weise mag die mittlere Flächen-Beschleunigung

$$\frac{\frac{S_2}{\tau} - \frac{S_1}{\tau}}{\tau}$$

mit $A[s_2]$ *bezeichnet werden, da dieselbe mit der Gröſse*

$$\frac{\frac{s_2}{\tau} - \frac{s_2}{\tau}}{\tau} = a[s_1]$$

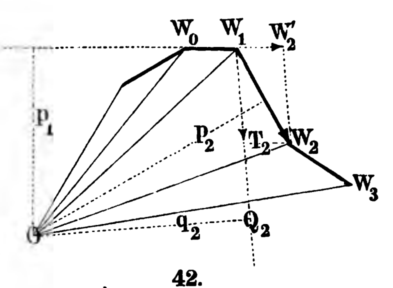
völlig korrespondiert.

Wenn die Glieder einer Flächen-Inkrementen-Reihe bei elementarer Einteilung alle einander gleich sind, so hat man ein Analogon zur gleichförmigen Bewegung: In gleichen Zeitteilen werden gleiche Flächen-Stücke durchlaufen.

Solche Verhältnisse sind bei den physischen Bewegungen im Gegensatz zu der Seltenheit gleichförmiger Bewegungen wenigstens in einer gewissen Annäherung ziemlich häufig vorhanden.

Es giebt ein wichtiges Theorem, welches zwischen den am Anfang eingeführten und den jetzt erst gebildeten phoronomischen Gröſsen, d. h. zwischen Linear-Beschleunigungen und Flächen-Beschleunigungen gewisse Beziehungen nachweist.

Dieses Theorem, welches den Namen „Flächen-Satz“ führt, lautet: Für jeden Bahn-Punkt ist die **Flächen-Beschleunigung** in Bezug auf einen bestimmten Pol gleich dem **halben Momente**



42.

der Linear-Beschleunigung in Bezug auf jenen Pol[1]).

Zunächst hat man für elementare Einteilung $S_1 = \frac{s_1 \cdot p_1}{2}$, *falls man mit* p_1 *die Länge des Lotes* $O\,P_1$ *aus* O *auf* $W_0\,W_1$ *bezeichnet.* (*Figur 42*).

Demnach ist: $\frac{S_1}{\tau} = \frac{1}{2} p_1 \cdot \frac{s_1}{\tau}$

d. h. die Flächen-Geschwindigkeit ist gleich dem halben Momente der Linear-Geschwindigkeit.

Soll nun $\dfrac{\frac{S_2}{\tau} - \frac{S_1}{\tau}}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{p_2 s_2 - p_1 s_1}{\tau^2}$ *dem obigen Satze gemäſs gebildet sein, so muſs sich* $p_2 s_2 - p_1 s_1$ *in bestimmter Weise transformieren lassen.*

Bezeichnet man die Gesamt-Beschleunigung, welche in W_1 *für das Element* $W_1\,W_2 = [s_2]$ *zur Geltung kommt, durch* $[\overline{a_2}]$ *und bezeichnet man ferner die Länge der Normale* ($O\,Q_2$) *aus* O *auf die Richtung dieser Beschleunigung mit* q_2, *so stellt die Gröſse* $q_2\,\overline{a_2}$ *das Moment der Beschleunigung* $[\overline{a_2}]$ *in Bezug auf* O *dar.*

Wenn in W_1 *keine Beschleunigung aufträte, so würde im nächsten Zeitteile* τ *statt des Bahn-Stückes* $W_1\,W_2$ *ein Bahn-Stück* $W_1\,W'_2$ *mit der Geschwindigkeit* $\frac{s_1}{\tau}$ *durchlaufen werden, so daſs* $W_0\,W_1 = s_1 = W_1\,W'_2$ *wäre. Die Zusatz-Geschwindigkeit* ($W_1\,T_2$) *aus der Beschleunigung muſs im Verein mit der Geschwindigkeit* $\frac{s_1}{\tau}$ *die Länge und Lage des wirklich durchlaufenen Bahnstückes* $W_1\,W_2$ *bestimmen, d. h.* $W_1\,W_2$ *ist die geometrische Summe aus* $W_1\,T_2$ *und* $W_1\,W'_2$.

Demnach existiert die Momenten-Gleichung:

$$p_2 \cdot W_2\,W_1 = q_2 \cdot W_1\,T_2 + p_1 \cdot W_1\,W'_2$$

$$\text{oder } p_2 \cdot s_2 = q_2 \cdot (\overline{a_2} \cdot \tau^2) + p_1 \cdot s_1.$$

Man hat also $p_2 s_2 - p_1 s_1 = q_2 (\overline{a_2} \cdot \tau^2)$ *zu setzen, so daſs resultiert:*

$$A_2 = \frac{\frac{S_2}{\tau} - \frac{S_1}{\tau}}{\tau} = \frac{1}{2} q_2 \cdot \overline{a_2}.$$

Es ist leicht zu übersehen, wie die Schlüsse auf $\frac{A_3 - A_2}{\tau}$ *etc. auszudehnen sind.*

1) In dieser erweiterten Form erscheint der Flächen-Satz gewissermaſsen auf seinen phoronomischen Gehalt reduciert.

Da man auf diese Weise imstande ist, die Reihe der Beschleunigungen, welche man aus S ableiten kann, zurückzuführen auf die Reihe der Beschleunigungen, welche man aus s abzuleiten pflegt, so wird man des öfteren die Flächen-Beschleunigungen statt der Linien-Beschleunigungen bei der Behandlung der Probleme benutzen dürfen.

Es wird sich darum handeln S, A^0, $A^{(I)}$ . . . . in derselben Weise durch diophantische Gleichungen mit t zu verbinden, wie es sich früher darum handelte s, a^0, a^I . . . . . in dieser Weise auszudrücken.

Es ist ohne weiteres klar, dafs auch hier einer Gleichung $A^{(I)} = G$ eine Gleichung $A^0 = V_0 + G \cdot t$ und eine Gleichung $S = constans + V_0 \cdot t + G \cdot \frac{t^2}{2}$ entsprechen wird.

Von besonderer Bedeutung ist es in diesem Gebiete, das Analogon der **gleichförmigen** Bewegung aufzusuchen: man gelangt dabei zur **Central-Bewegung.**

Wenn hier die Reihe S_1, S_2, S_3 . . . . . S_n aus lauter gleichen Gliedern bestehen soll, so mufs $\frac{S_{i+1} - S_i}{\tau^2} = A_i$ stets Null sein, d. h. die Gröfse $q_i \cdot \overline{a_i}$ mufs für jeden Punkt verschwinden.

Wenn $\overline{a_i}$ stets Null ist, so hat man eine gleichförmige Bewegung auf grader Linie vor sich: die Gröfsen S_1, S_2 . . . S_n sind Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Wenn q_i stets Null ist, so geht die Beschleunigung immer durch den Pol O, d. h. sie ist stets nach einem festen Punkte (Centrum) gerichtet.

Wenn man für die Beschleunigungen auch den Special-Wert Null zuläfst, so kann man den ersten Fall in den zweiten hineinziehen und die Analogie zwischen der gleichförmigen Bewegung und der Central-Bewegung ganz allgemein behaupten.

Umgekehrt gilt der Satz: Wenn die Beschleunigung eines Punktes stets nach einem festen Centrum gerichtet ist, so ist auch die Flächen-Geschwindigkeit in Bezug auf das Centrum stets konstant.

Der Gleichung $s = c \cdot t + constans$ aus dem Gebiete der **gleichförmigen Bewegung** entspricht im Gebiete der **Central-Bewegungen** die Gleichung $S = C \cdot t + constans$.

Der **gleichmäfsig-geänderten** Bewegung entspricht hier eine Bewegung, für welche $\overline{a_i}\, q_i$ eine **Konstante** ist.

Das ist z. B. erreicht, wenn $[\overline{a_i}]$ stets denselben Wert hat und dabei stets einen und denselben Kreis berührt.

Die Schlüsse, welche hier zu machen sind, entsprechen genau den oben gegebenen, falls man S_i für s_i setzt.

Die Gröfse $a_i\, q_i$ läfst eine zweckmäfsige Umformung zu, mit

deren Hülfe man das Problem der Ebene für den Raum verwendbar machen kann.

Führt man ein rechtwinkliges Koordinaten-Kreuz ein, dessen Centrum im Pole O liegt, so kann man $[\bar{a}_i]$ parallel zu den Achsen in zwei Komponenten $a_i^{(x)}$ und $a_i^{(y)}$ zerlegen.

Bezeichnet man die Koordinaten von W_i durch x_i und y_i, so gilt die Momenten-Gleichung:

$$q_i a_i = y_i a_i^{(x)} - x_i a_i^{(y)}.$$

Man hat also die Beziehungen:

$$A_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{\tau^2} = \frac{1}{2} q_i a_i = \frac{1}{2} (y_i a_i^{(x)} - x_i a_i^{(y)}).$$

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse mag die gleichförmige (c) Kreis-Bewegung (r) dienen, bei welcher $\bar{a}_i$ *stets den Wert* $\frac{c^2}{r}$ *hat und stets nach dem Centrum des Kreises gerichtet ist.*

Bildet der radius vector nach P_i *mit der X-Achse den Winkel* φ_i, *so ist* $x_i = r . \cos\varphi_i$; *und* $y_i = r . \sin\varphi_i$; *während* $a_i^{(x)} = -\frac{c^2}{r} . \cos\varphi_i$ *und* $a_i^{(y)} = -\frac{c^2}{r} . \sin\varphi_i$ *ist: man hat offenbar:*

$$\frac{1}{2} q_i a_i = -\frac{1}{2} (y \;. a_i^{(x)} - x_i . a_i^{(y)}) = 0.$$

Um diese Betrachtungen auf den **Raum** auszudehnen, vervollständigt man das System der Längen und Breiten zu einem dreiachsigen Koordinaten-System, in welchem die Grade ON die Z-Achse darstellen mag.

Wenn man den Strahl OP auf die drei Koordinaten-Ebenen projiciert, um in jeder derselben die Bewegung des projicierten Strahles zu verfolgen, so wendet man das Verfahren, welches ursprünglich in Bezug auf die Äquatorial-Ebenen eingeführt wurde, auf jede der Achsen-Ebenen an.

Bezeichnet man die Projektion von P mit $P^{(x)}$, $P^{(y)}$, $P^{(z)}$, so hat man die Bewegungen der Strahlen $OP^{(x)}$, $OP^{(y)}$, $OP^{(z)}$ darzustellen.

Zerlegt man die Gesamt-Beschleunigung $[\bar{a}_i]$ von P_i, dessen Koordinaten x_i, y_i, z_i sein mögen, in die drei Komponenten $a^{(x)}{}_i$, $a^{(y)}{}_i$, $a^{(z)}{}_i$, so gilt für die entsprechenden Sektoren

$$2\,\frac{S^{(z)}{}_i - S^{(z)}{}_{i-1}}{\tau^2} = y_i a^{(x)}{}_i - x_i a^{(y)}{}_i = D^{(z)}{}_i.$$

$$2\,\frac{S^{(y)}{}_i - S^{(y)}{}_{i-1}}{\tau^2} = x_i a^{(z)}{}_i - z_i a^{(x)}{}_i = D^{(y)}{}_i.$$

$$2\,\frac{S^{(x)}{}_i - S^{(x)}{}_{i-1}}{\tau^2} = z_i a^{(y)}{}_i - y_i a^{(z)}{}_i = D^{(x)}{}_i.$$

Wenn hier in einer Ebene, z. B. in der Ebene XOY in Bezug auf O für $P^{(z)}$ eine **Central-Bewegung** entstehen soll, so mufs $D^{(z)}{}_i = 0$ sein.

Die Projektion der Strecken, welche für P_i die Beschleunigung darstellt, mufs durch O gehen: diese Bedingung stimmt überein mit $x_i : y_i = a^{(x)}_i : a^{(y)}_i$.

Wenn hier in zwei Ebenen, z. B. in den Ebenen OY und XOZ in Bezug auf O für $P^{(z)}$ und $P^{(y)}$ **Central-Bewegungen** entstehen sollen, so mufs gleichzeitig $D^{(z)}_i = 0$ und $D^{(y)}_i = 0$ sein, womit auch aufserdem $D^{(x)}_i = 0$ erfüllt ist.

Allgemein ist $z_i \,.\, D^{(z)}_i + y_i \,.\, D^{(y)}_i + x_i \,.\, D^{(x)}_i = 0$, so dafs in unserem Falle $D^{(x)}_i = 0$ resultiert.

Wenn also gleichzeitig $D^{(z)}_i = 0$ und $D^{(x)}_i = 0$ ist, so beschreiben alle drei Projektionen Central-Bewegungen: Die Bewegung des gegebenen Punktes P_i ist hier eine Central-Bewegung und geht stets in derselben Ebene vor sich.

Da für x_i, y_i, z_i eine diophantische Gleichung ersten Grades ($z_i D^{(x)} + y_i \,.\, D^{(y)}_i + x_i \,.\, D^{(z)}_i = 0$) vorhanden ist, welche hier ($D^{(z)}_i = D^{(y)}_i = D^{(x)}_i = 0$) identisch erfüllt ist, so ist die Bahn von P_i eine Ebene.

Die obigen Schlüsse müssen zum Teil etwas umgestaltet werden, wenn einzelne der Gröfsen x_i, y_i, z_i von vornherein den Wert Null erhalten.

§. 3. Die Newtonsche Central-Bewegung.

Die **gleichmäfsigen Schwingungen** auf elliptischer Bahn, als deren Specialfall die gradlinige Bahn erscheinen könnte, stellen eine **Central-Bewegung** dar, bei welcher die Beschleunigung stets durch das Centrum der Ellipse geht.

Die Pendel-Schwingungen auf kreisförmiger Bahn stellen keine Central-Bewegung dar, weil hier die wirksame Komponente der Beschleunigung $g \,.\, \sin\varphi$ stets Tangente eines Kreises ist.

Das **Charakteristische** jeder Central-Bewegung war die Forderung, dafs der Beschleunigungs-Wert stets der ersten Potenz der Entfernung vom Centrum proportional sein soll.

Man zeigt leicht, dafs diese Beziehungen umkehrbar sind, dafs also jedesmal eine elliptische Bewegung entsteht, wenn der Beschleunigungs-Wert der Entfernung von einem und demselben Punkte (O) proportional ist und wenn die Beschleunigung selbst immer durch den nämlichen Punkt (O) geht.

Andere Klassen von Central-Bewegungen werden bestimmt durch die Forderung, dafs der Beschleunigungs-Wert einer bestimmten positiven oder negativen Potenz der Entfernung vom Centrum proportional sein soll.

Die Theorie dieser Bewegungen führt im allgemeinen nicht zu Ergebnissen, welche für die Physik verwendbar sind.

Von grofser Wichtigkeit ist die Central-Bewegung, bei welcher der Beschleunigungs-Wert dem Quadrate der Central-Entfernung

umgekehrt proportional ist, weil eine grofse Reihe der in der Natur gegebenen Bewegungen diesem Gesetze gehorchen.

Zunächst konnte man aus der Verarbeitung von Beobachtungen, welche in den Keplerschen Gesetzen niedergelegt ist, schliefsen, dafs bei der Bewegung der Planeten-Centra Beschleunigungen in Frage kommen, welche jedesmal dem Quadrate ihres Abstandes vom Mittelpunkte der Sonne proportional sind.

Dieser Schlufs wurde 1687 von Newton in seinen „Philosophiae naturalis principia mathematica“ gezogen.

Später wurde die Annahme immer allgemeiner, dafs alle physischen Bewegungen nach Analogie der Planeten-Bewegungen zu interpretieren seien.

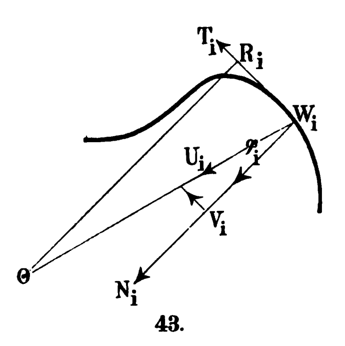
Die ersten beiden Gesetze (1609) Keplers lauten:

I. Der Mittelpunkt der Sonne steht in dem einen Brennpunkte der Ellipse, welche von einem Planeten-Centrum beschrieben wird.

II. Der radius vector, welcher den Mittelpunkt der Sonne mit dem Planeten-Centrum verbindet, beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen-Stücke.

Das zweite Gesetz bezeichnet die Planeten-Bewegung als Central-Bewegung, während deren Charakteristicum aus dem ersten Gesetze abzuleiten ist.

Für diese Bestimmung mag zunächst ein allgemeiner Satz über Central-Bewegungen vorangestellt werden.



43.

Wenn der Strahl OW_i, der durch r_i bezeichnet werden mag, mit der Normale ($W_i N_i$) in W_i den Winkel φ_i bildet, so kann man die Central-Beschleunigung ($k_i = W_i U_i$) für W_i in zwei Komponenten

$$k_i \sin\varphi_i = V_i U_i \text{ und}$$
$$k_i \cos\varphi_i = W_i V_i$$

zerlegen, von denen die eine in tangentialer Richtung ($W_i T_i$), die andere in normaler Richtung zur Geltung kommt. (Figur 43).

Da die Normal-Komponente für die Krümmung der Bahn verwendet wird, so hat man mit Bezug auf den Ausdruck $\left(\frac{v^2_i}{\rho_i}\right)$ der Centripetal-Beschleunigung:

$$k_i = \frac{v^2_i}{\rho_i \,.\, \cos\varphi_i}.$$

Da für jede Bewegung das halbe Moment der Geschwindigkeit in Bezug auf das Centrum gleich der Flächen-Geschwindigkeit ist und da diese letztere im besonderen für die Central-Bewegung konstant ist, so hat man

$$\frac{1}{2} v_i \,.\, OR_i = constans = \frac{1}{2} v_i r_i \,.\, \cos\varphi_i.$$

Bezeichnet man die konstante Flächen-Geschwindigkeit mit f, so ist die Maſs-Zahl von f zugleich die Maſs-Zahl der in der Zeit-Einheit beschriebenen Fläche.

Man hat:

$$\frac{1}{2}\, v_i r_i . \cos\varphi_i = f, \text{ d. h. } v_i = \frac{2f}{r_i . \cos\varphi_i}.$$

Demnach gilt für die Beschleunigung jeder Central-Bewegung die Formel:

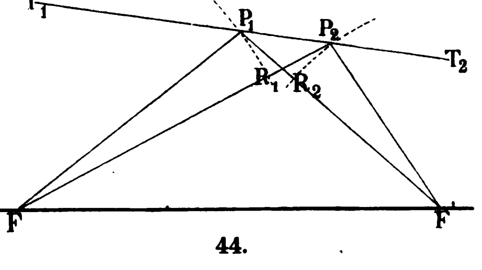
$$k_i = \frac{4f^2}{r^2_i . \cos^3\varphi_i} . \frac{1}{\rho_i}.$$

Es handelt sich nun darum für eine **Ellipse** Beziehungen zwischen den Gröſsen r_i, φ_i und ρ_i herzuleiten, da diese den Wert der Central-Beschleunigung k_i bestimmen. Dabei ist gemäſs dem ersten Keplerschen Gesetze der Brennpunkt als Centrum zu wählen.

Laut Definition ist eine Ellipse eine Kurve, für deren Punkte die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (F und F') stets denselben Wert (2 a) hat.

Verbindet man zwei Punkte (P_1 und P_2) der Ellipse mit F und F', so hat man

$$FP_1 + P_1F' = FP_2 + P_2F'.$$

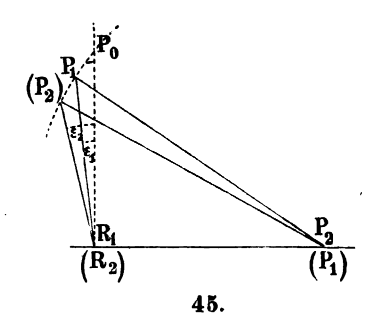


44.

Wenn man FP_1 auf FP_2 und $F'P_2$ auf $F'P_1$ durch Kreisbogen abträgt, so daſs $FP_1 = FR_1$ und $F'P_2 = F'R_2$ wird, so ist $P_2R_1 = P_1R_2$ (Figur 44).

Die Dreiecke $P_1R_1P_2$ und $P_2R_2P_1$ stimmen in der gemeinschaftlichen Seite P_1P_2 und in den beiden Seiten P_2R_1 und P_1R_2 überein.

Wenn nun der Abstand P_1P_2 relativ klein ist, so sind die Winkel P_1FP_2 und $P_1F'P_2$ beide sehr spitz, so daſs die beiden Winkel $P_1R_1P_2$ und $P_2R_2P_1$ beide einen Rechten um relativ weniges überschreiten und demnach beziehungsweise als $R + \varepsilon_1$ und $R + \varepsilon_2$ dargestellt werden können.



45.

Legt man die Dreiecke (Figur 45) so auf einander, daſs R_1P_2 auf R_2P_1 zu liegen kommt, so werden bei gleichzeitig abnehmendem ε_1 und ε_2 die Punkte P_1 und (P_2) auf den um P_2 bezie-

hungsweise (P_1) *beschriebenen Kreisbogen* $P_2 P_1 P_0$ *nach* P_0 *zu gleiten, ohne jemals* P_0 *zu überschreiten.*

Läſst man nun die Punkte P_1 *und* P_2 *auf der Ellipse sich immer näher und näher rücken, so werden* ε_1 *und* ε_2 *gleichzeitig immer kleiner und kleiner, d. h. der Unterschied* φ *zwischen* $\sphericalangle\ R_1 P_2 P_1 = \sphericalangle\ F P_2 T_1$ *und* $\sphericalangle\ R_2 P_1 P_2 = F' P_1 T_2$ *nimmt mehr und mehr ab.*

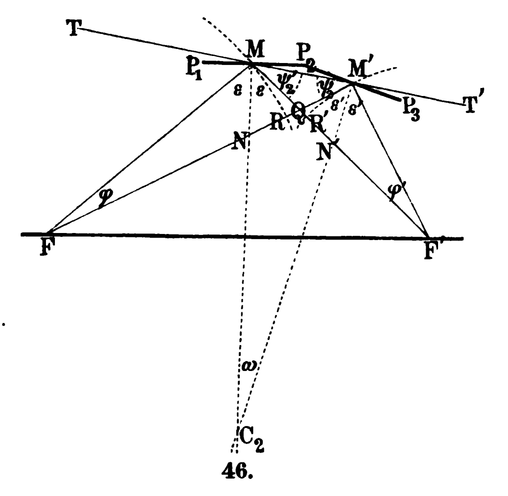
Fällt P_1 *und* P_2 *zusammen (Tangente), so erreichen* ε_1 *und* ε_2 *gleichzeitig die Null, d. h. es wird* $\sphericalangle\ F P_2 T_1 = \sphericalangle\ F' P_1 T_2$: *die radii vectores aus den Brennpunkten einer Ellipse nach den Berührungspunkten einer Tangente derselben schlieſsen mit der Tangente gleiche Winkel ein.*

Die Normale halbiert den Winkel, den die radii vectores aus den beiden Brennpunkten nach ihrem Fuſspunkte bilden.

Um den Krümmungs-Radius einer Kurve zu erhalten, hat man drei benachbarte Punkte (P_1, P_2, P_3) *auszuwählen und in den Mitten* (*M und M'*) *der entsprechenden Elemente* ($P_1 P_2$ *und* $P_2 P_3$) *Normalen zu errichten: der Schnittpunkt* (C_2) *dieser Normalen ist der zu den drei Punkten* (P_1, P_2, P_3) *gehörige Krümmungskreis.*

Da MC_2 *und* $M'C_2$ *beziehungsweise (Figur 46) die Winkel* FMF' *und* $FM'F'$ *halbieren, so gelangt man durch Summation der Winkel des Vierecks* $C_2 N Q N'$ *zu der Relation:*

$$2\,\omega = \varphi + \varphi'.$$



46.

Wenn man mit FM *und* $F'M'$ *beziehungsweise um* F *und* $F'M$ *Kreise beschreibt, welche* FM' *und* $F'M$ *beziehungsweise in* R *und* R' *schneiden, so besteht für die Bogen* MR *und* MR' *die Gleichungen*

$$\widehat{MR} = \varphi \,.\, FM \text{ und}$$

$$\widehat{M'R'} = \varphi' \,.\, F'M'.$$

Andrerseits gilt für ein Kreisbogen aus C_2, *welcher durch* M *und* M' *geht, die Gleichung*

$$\omega \,.\, MC_2 = \widehat{MM'} = \omega \,.\, M'C_2.$$

Aus $2\,\omega = \varphi + \varphi'$ *folgt demnach:*

$$2\,\frac{\widehat{MM'}}{MC_2} = \frac{\widehat{MR}}{FM} + \frac{\widehat{M'R'}}{F'M'} = 2\,\frac{\widehat{MM'}}{M'C_2}.$$

Bezeichnet man die $\sphericalangle$ *TM'F und T'MF' beziehungsweise durch* ψ_2 *und* ψ'_2*, so ist in grofser Annäherung*

$$MM' \,.\, \sin\psi'_2 = MR \text{ und } MM' \,.\, \sin\psi_2 = M'R'.$$

Läfst man nun P_1 *und* P_3 *immer näher an* P_2 *heranrücken, so verschwindet der Unterschied von MR und M'R' immer mehr und mehr: Dabei schmiegen sich die Bogen* $\widehat{MM'}$, $\widehat{MR}$, $\widehat{M'R'}$ *den Sehnen MM', MR, M'R' näher und näher an.*

Für die Grenze gilt also die Gleichung:

$$\frac{2}{MC_2 \,.\, \sin\psi'_1} = \frac{1}{FM} + \frac{1}{F'M'} = \frac{2}{M'C_2 \,.\, \sin\psi'_2}.$$

Da die Gröfsen MC_2 *und* $M'C_2$ *den Krümmungs-Halbmesser* ρ_2 *darstellen, so hat man:*

$$\frac{2}{\rho_2 \,.\, \sin\psi_2} = \frac{1}{FM} + \frac{1}{F'M'} = \frac{2}{\rho_2 \,.\, \sin\psi'_2}.$$

Da an der Grenze $FM = FP_2$ *und* $F'M' = F'P_2$ *zu setzen ist, wobei übrigens* $\psi_2 = \psi'_2$ *wird, so hat man für jeden Punkt* (P_i) *der Ellipse die Beziehung*

$$\rho_i \,.\, \sin\psi_i = 2\,\frac{FP_i \,.\, F'P_i}{FP_i + F'P_i} = \frac{FP_i \,.\, F'P_i}{a}.$$

Führt man statt des Winkels (ψ_i) *zwischen dem Strahle aus F beziehungsweise aus F' und zwischen der Tangente den Winkel* (φ_i) *zwischen dem Strahle aus F beziehungsweise aus F' und der Normale* (ρ_i) *ein, so ist*

$$\rho_i \,.\, \cos\varphi_i = \frac{FP_i \,.\, F'P_i}{a}.$$

Um das Produkt $FP_i \,.\, F'P_i$ *umzuformen, kann man den Satz* [1]) *benutzen:*

---

1) Derselbe läfst sich für die Ellipse auf folgende Form bringen:

Das Produkt aus den Loten (l_a und l_b), welche sich von zwei Ecken (A und B) eines Dreieckes auf die Halbierungs-Linie des, zur dritten Ecke (C) gehörigen Aufsen-Winkels fällen lassen, ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrate der halben Summe der einschliefsenden Seiten und dem Quadrate der halben dritten Seite, d. h. $l_a \,.\, l_b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Mit diesem Satze eng verbunden ist ein anderes elementar-geometrisches Theorem, welches für die Auflösung der Dreiecke bei gegebenen Winkelhalbierungs-Linien (w_a, w_b, w_c) äufserst brauchbar ist.

Dieses Theorem ist der Ausdruck der Formel:

$$w^2_c = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right].$$

Bei der Ellipse entspricht der Gröfse w_c des Dreiecks die sogenannte Normal-Strecke (n_i), während $a + b$ die Summe der Entfernungen eines Punktes von den beiden Brennpunkten (2 a) bedeutet, deren Abstand (2 c) durch c gemessen wird.

Für das Dreieck ist der Winkel φ_i der Ellipse als $\frac{\gamma}{2}$ einzuführen, so dafs $\cos\varphi_i$ durch die Gleichung $\cos\frac{\gamma}{2} = w_c \,.\, \frac{a+b}{2ab}$ gegeben ist.

Das Rechteck aus den Loten, welche von den beiden Brennpunkten einer Ellipse (oder Hyperbel) auf eine Tangente gefällt werden können, hat stets dieselbe Gröſse: es ist gleich dem Quadrate über der halben kleinen Achse.

Die beiden Lote sind hier $FP_i \,.\, \cos\varphi_i$ *und* $F'P_i \,.\, \cos\varphi_i$, *so daſs also*

$$FP_i \,.\, F'P_i = \frac{b^2}{\cos^2\varphi_i} \text{ ist.}$$

Demnach hat man: $\rho_i \cos^3\varphi_i = \frac{b^2}{a}$.

Wenn man die Central-Beschleunigung

$$k_i = \frac{4\,f^2}{r^2_i \,.\, \cos^3\varphi_i} \,.\, \frac{1}{\rho_i}$$

durch die hier (Keplersche Gesetze) für die Ellipse gültige Relation $\rho_i \,.\, \cos^3\varphi_i = \frac{b^2}{a}$ transformiert, so entsteht

$$k_i = \frac{4\,a\,f^2}{b^2} \,.\, \frac{1}{r^2_i}.$$

Für die **Bewegung,** welche durch die **Keplerschen Gesetze** bezeichnet wird, ist die **Central-Beschleunigung** dem **Quadrate der Entfernung** (r^2_i) des Planeten-Centrums vom Mittelpunkte der Sonne **umgekehrt proportional.**

Diese Beziehung entspricht dem ersten Teile der Erfahrungen, welche im **Newtonschen Gesetze** niedergelegt worden sind.

Da sowohl die Ableitung des Krümmungs-Radius als auch die Transformation der Gröſse $FP_i \,.\, F'P_i$ *für die Hyperbel der hier durchgeführten Untersuchung analog ist, so steht zu erwarten, daſs auch auf hyperbolischen Bahnen in Bezug auf den einen Brennpunkt eine Central-Beschleunigung proportional zu* $\frac{1}{r^2_i}$ *stattfinden kann.*

Diese Vermutung bestätigt sich [1]: *Wenn eine Central-Bewegung durch ein Gesetz* $k \,.\, \frac{1}{r^2_i}$ *bestimmt wird, so ist die Bahn der Bewegung ein Kegelschnitt, d. h. eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel.*

Die Natur der Kurven hängt von der Gröſse der Anfangs-Geschwindigkeit des beweglichen Punktes und von der Gröſse des

---

Diese Gleichung führt sofort für die Ellipse zu den wichtigen Ergebnissen:

$$\cos\varphi_i = \frac{b^2}{a} \,.\, \frac{1}{n_i} \text{ und } \rho_i = \frac{a^2}{b^4} \,.\, n^3_i.$$

Für die Hyperbel lassen sich die analogen Sätze ebenso leicht herleiten.

Man hat zu beachten, daſs in der Theorie der Dreiecke jeder Satz, welcher nur a + b und c oder a — b und c benutzt, unmittelbar in ein Theorem über die Ellipse oder über die Hyperbel verwandelt werden kann.

1) Vergl. Schell, Theorie I, S. 379.

anfänglichen Central-Abstandes desselben ab, nicht aber von seiner Anfangs-Richtung.

Das **dritte Keplersche Gesetz** lautet: Die Quadrate der Umlaufs-Zeiten je zweier Planeten verhalten sich zu einander wie die Kuben der mittleren Central-Entfernungen ihrer Mittelpunkte.

Unter der mittleren Central-Entfernung versteht man das arithmetische Mittel aus der gröfsten und aus der kleinsten Central-Entfernung, d. h. die Gröfse $\frac{(a+c)+(a-c)}{2} = a$.

Die Mafs-Zahl der mittleren Central-Entfernung ist zugleich die Mafs-Zahl der grofsen Halb-Achse der Bahn.

Da die Fläche einer Ellipse die Gröfse $a b \pi$ hat, so ist die Flächen-Geschwindigkeit f für eine Umlaufs-Zeit T als $\frac{a b \,.\, \pi}{T}$ einzuführen, so dafs resultiert:

$$k_i = \frac{4 \pi^2}{r^2_i} \cdot \frac{a^3}{T^2}.$$

Um die Fläche (F) einer Ellipse abzuleiten, denkt man dieselbe durch die Projektion eines Kreises (r) unter dem Winkel α entstanden.

Wenn man durch die Mittelpunkte des Kreises und der Ellipse Parallelen zu der Schnitt-Linie ihrer Ebenen zieht und beide Figuren senkrecht zu diesen Parallelen in äquidistante Streifen teilt, so verhalten sich die Flächen entsprechender Streifen wie $r : r \,.\, \cos\alpha$.

Man hat also:

$$r^2 \pi : F = r : r \cos\alpha, \text{ d. h. } F = \pi \,.\, r\,(r \cos\alpha).$$

Da r und r cos α die Halb-Achsen der Ellipse sind, so ist der Satz bewiesen.

Das dritte Keplersche Gesetz sagt aus, dafs $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten-Bahnen eine Konstante ist, welche μ genannt werden mag.

Demnach gilt die Formel:

$$k_i = 4\pi^2 \mu \,.\, \frac{1}{r^2_i}.$$

Die Central-Beschleunigung würde im Abstande 1 für **alle** Planeten **dieselbe** ($4\pi^2\mu$) sein.

Verbindet man mit diesen Gesetzen die Erfahrung, dafs g oberhalb der Erdoberfläche gemäfs der Formel $g^{(a)}_{\rho,\varphi} = g_{R,\varphi} \cdot \frac{R^2}{\rho^2}$ *variiert und dafs auch die Bewegung des Mondes durch die Erdbeschleunigung* $g^{(a)}_{\rho,\varphi}$ *bestimmt wird, so scheint eine bedeutende Erweiterung des Newtonschen Satzes möglich zu sein:*

die Planeten scheinen in Bezug auf ihre Trabanten genau dieselbe Rolle zu spielen, welche die Sonne in Bezug auf die Planeten spielt.

Diese Vermutung bestätigt sich in vollem Maſse: Alle Bewegungs-Erscheinungen im Weltall weisen darauf hin, daſs stets Beschleunigungen auftreten, welche den Quadraten bestimmter Central-Entfernungen, in deren Richtungen sie fallen, umgekehrt proportional sind.

Der Wert dieser Beschleunigungen wird durch den zweiten Teil des Newtonschen Gesetzes bestimmt, dessen Besprechung in der Dynamik erfolgen soll.

Wenn man dem **ersten Teile des Newtonschen Gesetzes** die Annahme hinzufügt, daſs die **Central-Beschleunigung in der Entfernung 1** vom Centrum für **jeden** Planeten **dieselbe** ist, so gelangt man zu Bewegungs-Erscheinungen, welche den **drei Gesetzen Keplers** unterworfen sein **können**.

Es muſs dabei ein Kegelschnitt resultieren, d. h. eine Ellipse oder eine Hyperbel oder eine Parabel.

Es hat ein gewisses Interesse, nun auch diejenige Central-Bewegung auf elliptischer Bahn, für welche der **Mittelpunkt der Ellipse** Centrum der Bewegung ist, darzustellen, d. h. den allgemeinen Ausdruck

$$k_i = \frac{4\,f^2}{\rho_i\,.\,\cos^3\varphi_i}\,.\,\frac{1}{r^2_i}$$

für den Special Fall zu transformieren, in welchem φ_i den Winkel zwischen Durchmesser und Normale bedeutet.

Man findet hier mit Hülfe der Formel $\rho_i = \frac{a^2}{b^4}\,.\,n^3_i$ *sehr leicht die Relation*

$$\rho_i\,.\,\cos^3\varphi_i = \frac{a^2 b^2}{r^3_i}.$$

Demnach hat man $k_i = \frac{4\,f^2}{a^2 b^2}\,.\,r_i$, *d. h. bei dieser Bewegung ist die Central-Beschleunigung dem Abstande vom Centrum proportional.*

Die Linear-Geschwindigkeit einer Central-Bewegung bestimmt sich durch die Bemerkung, daſs die Flächen-Geschwindigkeit, welche stets dem halben Momente der Linear-Geschwindigkeit gleichzusetzen ist, hier in Bezug auf das Centrum konstant ist.

Demnach ist die Linear-Geschwindigkeit in einem Punkte der Bahn stets proportional dem Lote, das aus dem Centrum auf die Tangente des Punktes gefällt werden kann.

Wählt man bei einer Ellipse einen Punkt der groſsen oder kleinen Achse zum Centrum, so ist die Geschwindigkeit für je zwei Punkte, welche in Bezug auf jene Achse orthogonal-symmetrisch liegen, bei einer Central-Bewegung dieselbe.

Für die Newtonsche Central-Bewegung erreicht die Geschwindigkeit in dem Endpunkte der grofsen Achse, welcher dem centralen Brennpunkte am nächsten (Perihelium) liegt, ihr Maximum und in dem Endpunkte der grofsen Achse, welcher dem centralen Brennpunkte am fernsten (Aphelium) liegt, ihr Minimum.

Für die elliptischen Schwingungen sind für die Geschwindigkeiten in den Endpunkten der kleinen Achse Maxima und in den Endpunkten der grofsen Achse Minima vorhanden.

Geht die Ellipse in eine Grade über, so haben die Minima den Wert Null.

2. Die Punkt-Systeme der Physik.

Die **Bewegung** eines Raum-Gebildes ist vollständig dargestellt, wenn die Lage jedes seiner Punkte für jeden Zeit-Moment gegeben ist [1]).

Solche Darstellungen werden auch hier abhängig sein von der Methode, welche man für die Lagen-Bestimmung wählt.

Wenn sich verschiedene Punkte gleichzeitig bewegen, **ohne** dabei **gegenseitigen Beeinflussungen** unterworfen zu sein, so ist zur Darstellung aller dieser Bewegungen eine **Behandlung jedes einzelnen Punktes** erforderlich.

Man hat also auf jeden Punkt eine der gegebenen phoronomischen Methoden anzuwenden.

Wenn verschiedene Punkte zu einem **Systeme** verbunden sind, so beeinflufst die Bewegung jedes einzelnen im allgemeinen die Bewegung jedes andern, weil grade die Vorstellung eines **Systemes** für die zusammentretenden Punkte irgend ein **Gesetz der Verbindung** fordert.

Als Grenzfall eines solchen Gesetzes könnte man allerdings die Bestimmung eines gänzlichen Mangels an Verbindungen (Dissolution) hinstellen.

Die Darstellung der Bewegung eines **Punkt-Systemes** erfordert des öfteren nur die Kenntnis der Bewegungen **einzelner System-Punkte**, weil die Kenntnis des Verbindungs-Gesetzes weitere Bestimmungen liefert.

Das Verbindungs-Gesetz ist der Ausdruck für die gegenseitige Beeinflussung der Punkte des Systemes.

Wenn z. B. zwei Punkte fest verbunden sind, so darf man sich dieselben stets als Endpunkte einer unveränderlichen Linie denken: bei allen möglichen Bewegungen des Systems wird jeder

---

1) **Ist das Raumgebilde ein Punkt, so modificiert sich der Ausdruck dieses Satzes in der früher gegebenen Weise.**

Punkt auf einer Kugelfläche bleiben, deren Centrum der andere Punkt ist.

Wenn man die Bewegung eines Punkt-Systemes auf irgend eine Weise vollständig dargestellt hat, so darf die Bewegung jedes einzelnen Punktes als bekannt vorausgesetzt werden. Die Gesamtheit dieser Einzel-Bewegungen, durch welche die Bewegung des vorgelegten Systems zum Ausdruck gebracht wird, läſst eine **zweifache** Auffassung zu: man betrachtet dieselben entweder schlechthin als gegeben oder man nimmt Rücksicht auf die Art ihres Entstehens.

Im **ersten** Falle sieht man davon ab, daſs die Punkte ursprünglich als Glieder eines Systems eingeführt wurden, und daſs sie vielleicht auſserdem noch andern Bedingungen unterworfen waren.

Im **zweiten** Falle sieht man die Gesamtheit der dargestellten Bewegungen als das Endergebnis einer Reihe von Bedingungen an, unter denen die Vorschriften für die Verbindung innerhalb des Systems eine bedeutende Rolle spielen.

Da man das System der Punkte im ersten Falle gewissermaſsen in seine Bestandteile aufgelöst denkt, so mag dabei von einem **dissoluten Systeme** gesprochen werden, für dessen Charakterisierung also **nur** die resultierenden Bewegungen maſsgebend sind.

Den Punkten einer festen Stange, welche um eine Achse drehbar ist, können z. B. die verschiedensten Beschleunigungen erteilt werden, ohne daſs doch andere Bewegungen als Kreis-Bewegungen resultieren.

Betrachtet man nun die einzelnen Kreis-Bewegungen ohne Rücksicht auf die Bedingungen, unter denen sie eingetreten sind, so faſst man das vorgelegte System als ein dissolutes System auf.

Die **Untersuchung eines bestimmten Punkt-Systems** darf als beendet gelten, wenn dasselbe als dissolutes System dargestellt worden ist.

Es handelt sich darum, die Bewegung jedes System-Punktes so zu beschreiben, als ob dieselbe nur für sich da wäre, d. h. für jeden Punkt die Bahn und deren Bewegungs-Verhältnisse darzustellen, ohne auf die Verbindung mit andern Punkten Rücksicht zu nehmen.

Unter allen Punkt-Systemen, welche man zu ersinnen imstande ist, sind zunächst diejenigen, welche sich zur **Darstellung der Natur-Körper** eignen, von hervorragendem Interesse.

Man pflegt in der Physik feste, flüssige und gasförmige Körper zu unterscheiden, ohne sich doch zu verhehlen, daſs zwischen diesen einzelnen Aggregat-Zuständen Übergänge vorhanden sind und daſs ihre Reihe vielleicht auch sonst noch der Vervollständigung bedarf.

Das Punkt-System, welches zur Darstellung der **festen** Körper dient, ist innerhalb gewisser Grenzen der Genauigkeit als ein **unveränderliches** System zu bezeichnen, dessen Charakteristikum es ist „sich selbst in **jeder Lage kongruent** zu bleiben“.

Dagegen sind die Punkt-Systeme, welche zur Darstellung der **Flüssigkeiten** und **Gase** dienen, als **veränderliche** Systeme einzuführen, und zwar ist die Veränderlichkeit, welche man im Hinblick auf das unveränderliche System gemessen denkt, im zweiten Aggregat-Zustande kleiner als im dritten.

Als Grundlage für die Phoronomie der Punkt-Systeme würde, auch abgesehen von dem Bedürfnisse der Physik, die Behandlung des unveränderlichen Systemes gewählt werden müssen, weil die Bewegung jedes Systemes auf Unter-Systeme hinweist, welche den Charakter von uuveränderlichen Systemen haben.

Die Bewegung eines Systems zerfällt stets in die Bewegungen von System-Teilen, welche sich selbst in jeder Lage kongruent bleiben.

In jeder Hinsicht tritt also die Forderung auf, die **Bewegung des unveränderlichen Systems an die Spitze zu stellen** und dieser die Bewegungen anderer Systeme folgen zu lassen.

Für die **Auswahl der veränderlichen Systeme,** welche nach den verschiedensten Gesichtspunkten vorgenommen werden könnte, sollen hier **nur** die Bedürfnisse der Physik mafsgebend sein.

A. Das unveränderliche System.

§. 1. Die allgemeine Bewegung.

1.

Bei einem Systeme, das **sich selbst in jeder Lage kongruent** bleibt, ist die Verbindung der einzelnen Punkte die engste, welche man ersinnen kann. Infolgedessen ist hier die gegenseitige Abhängigkeit der Bewegungen der einzelnen Punkte eine relativ grofse, beziehungsweise die Anzahl der einzelnen Punkte, deren Bewegung als unabhängig gelten darf, eine relativ geringe.

Wenn **ein** Punkt eines unveränderlichen Systems seine Lage nicht ändert, so bewegt sich das System um diesen Punkt: **Drehung** um **einen Punkt.**

Wenn **zwei** Punkte eines unveränderlichen Systems ihre Lage nicht ändern, so bleiben auch alle Punkte, welche auf ihrer Verbindungslinie gelegen sind, in ihrer Lage: **Drehung** um **eine Achse.**

Wenn **drei** Punkte eines unveränderlichen Systems, welche nicht auf einer Graden liegen, ihre Lage nicht ändern, so bleiben auch alle Punkte, die auf ihrer Verbindungs-Ebene gelegen sind, und damit überhaupt **alle** Punkte des Systems in ihrer Lage: das System befindet sich in **Ruhe.**

Infolgedessen darf man **jede Bewegung eines unveränder-**

lichen Systems durch die **Bewegung eines Dreiecks** ersetzen, als dessen Ecken man drei beliebige Punkte des Systems auswählen darf.

Ein solches Dreieck soll ein **Bewegungs-Dreieck** des unveränderlichen Systems heifsen.

Der Grenzfall eines Dreiecks von der Fläche „Null“ ist ausgeschlossen, weil man dann auf eine Achse beziehungsweise auf einen Punkt zurückkäme.

Jede ***Lage des Dreiecks*** *giebt eine* ***Lage des Körpers*** *an und infolgedessen entspricht jeder* ***Lagen-Änderung des Dreiecks*** *eine Lagen-Änderung, d. h. eine* ***Bewegung des Systems.***

Wenn man zwei Lagen des Bewegungs-Dreiecks ABC und A′B′C′ betrachtet, so kann Punkt A mit A′ durch eine Parallel-Verschiebung der Dreiecks-Ebene zur Deckung gebracht werden.

Denkt man diese ausgeführt, so müssen B und C gleichzeitig Kreisbogen beschreiben, um in die Lagen B′ und C′ zu gelangen. Beschreibt man nun um den Punkt A′, in welchem auch A liegt, eine Kugel, welche AB und AB′ beziehungsweise in 𝔅 und 𝔅′, AC und AC′ dagegen in ℭ und ℭ′ schneidet, so sind nach der Verschiebung noch gleichzeitig die **beiden** gröfsten Bogen 𝔅𝔅′ und ℭℭ′ auf der Hülfs-Kugel zu beschreiben, d. h. der **eine** gröfste Bogen 𝔅ℭ ist durch Drehung um A in die Lage 𝔅′ℭ′ zu bringen. Diese Drehung, d. h. die Lagen-Änderung eines solchen Bogens 𝔅ℭ auf einer Kugeloberfläche, läfst sich aber stets als Drehung um eine durch A gelegte Achse darstellen.

Eine Konstruktion folgt aus der Überlegung, dafs einerseits 𝔅 und 𝔅′ und andrerseits ℭ und ℭ′ von dem Pole der gesuchten Achse gleichen Abstand haben müssen, d. h. dieselbe resultiert als die Schnittlinie zweier Ebenen, welche für 𝔅 und 𝔅′ beziehungsweise ℭ und ℭ′ die Orte gleichen Abstandes sind [1].

Man gelangt hier zu einem Satze aus der Geometrie der Kugeloberfläche: Kongruente Figuren können durch Drehung um einen bestimmten Punkt der Kugeloberfläche aus einer Lage in jede andere übergeführt werden. Derselbe Satz gilt auch für die Geometrie der Ebene (Planimetrie), falls man die Drehung um den unendllich fernen Punkt, d. h. die Verschiebung (Translation) als speciellen Fall behandelt.

In andern Gebieten der Flächen-Geometrie, z. B. innerhalb der Geometrie des Rotations-Ellipsoides bedarf die Geltung des Satzes einer sorgfältigen Prüfung, wobei von vornherein zu bemerken ist, dafs man überhaupt nur auf sehr wenigen Flächen eine Figur sich selbst kongruent verschieben kann.

---

1) Die Konstruktion läfst sich ohne Benutzung der Kugelfläche einfacher erledigen. Hier sollte gerade der Hinblick auf den sphärischen Satz gegeben werden.

Da zwei Lagen des Bewegungs-Dreiecks durch **eine** Parallel-Verschiebung (Translation) und **eine** Drehung um eine Achse (Rotation) in einander übergeführt werden können, so kann man von einer bestimmten Lage aus (Anfangs-Lage) zu einer Reihe von n vorgeschriebenen Lagen durch n Translationen und n Rotationen gelangen.

Demnach läfst sich die Bewegung eines unveränderlichen Systems auf folgende Weise darstellen:

Man wählt drei Punkte des Systems aus, welche ein Dreieck von endlicher Fläche bilden, und verfolgt jeden derselben auf seiner Bahn, indem man die Zeit-Dauer [t] der Bewegung in gleiche Teile zerlegt und die zugehörigen Inkrementen-Reihen der drei Bahnen bestimmt.

Wenn die Punkte A, B, C der Reihe nach zu den Bahn-Punkten A_1 . . . . . A_n, B_1 . . . . . B , C_1 . . . . . C_n gelangen, so durchläuft das Dreieck ABC der Reihe nach die Lagen $A_1\, B_1\, C_1$ . . . . A_n, B_n, C_n, während sich jeder der hierbei nötigen Übergänge durch eine Translation und durch eine Rotation ersetzen läfst.

Werden nun (infolge willkürlicher Festsetzung) alle Translationen durch die Elemente der Bahn von A bestimmt [1]), so erfolgen auch alle Drehungen um Achsen, welche durch den Punkt A gehen: der Punkt A schreitet auf A_1 . . . . A_n fort, während sich das System aufserdem um Achsen aus dem Punkte A dreht.

Für den Punkt A_{i+1} findet man die Achse, indem man durch A_{i+1} Parallelen zu $A_i B_i$ und $A_i C_i$ zieht und mit deren Hülfe ein Dreieck $A_{i+1} B'_i C'_i$ konstruiert, welches $A_i B_i C_i$ kongruent ist: diese Konstruktion entspricht der Translation von $A_i B_i C_i$.

Man hat ferner um A_{i+1} eine Kugel zu legen, welche auf den Strahlen $A_{i+1} B_{i+1}$, $A_{i+1} C_{i+1}$ und $A_{i+1} B'_i$, $A_{i+1} C'_i$ beziehungsweise die Punkte $\mathfrak{B}_{i+1}$, $\mathfrak{C}_{i+1}$ und $\mathfrak{B}'_i\, \mathfrak{C}'_i$ bestimmt, und hat dann die Ebenen gleichen Abstandes für die Paare $\mathfrak{B}'_i$, $\mathfrak{B}_{i+1}$ und $\mathfrak{C}'_i$, $\mathfrak{C}_{i+1}$ zu konstruieren: die Schnittlinie dieser Ebenen ist die Achse der Rotation.

Wählt man eine **elementare** Bahn-Inkrementen-Reihe, so bilden die Achsen aus A eine Kegelfläche, welche ihre Spitze in A hat.

Wenn sich eine Grade so bewegt, dafs ein ihrer Punkte seine Lage nicht ändert, so entsteht eine Kegelfläche: die erzeugende Grade wird in jeder bestimmten Lage als eine bestimmte Seite des Kegels bezeichnet.

Die Kreis-Kegelfläche ist ein einfaches Beispiel: hier gleitet die bewegliche Grade auf einem Kreise, während ihr fester Punkt senkrecht über dem Centrum desselben gelegen ist.

---

1) Dasselbe läfst sich auch für B oder für C festsetzen. Es mag daran erinnert werden, dafs die Auswahl der Punkte A, B, C des **beweglichen** Körpers überhaupt der Willkür unterliegt.

Jede Seite des Kegels dient im allgemeinen nur während eines unendlich kleinen Zeit-Teiles als Achse der Rotation, sie ist **Momentan-Achse.**

Nach Ablauf der Zeit-Dauer τ tritt immer eine neue Achse an Stelle der alten.

Denkt man sich die Bahnen A, B, C verzeichnet und mit deren Hülfe die Reihe der Momentan-Achsen für „Drehungen um A" konstruiert, so schneiden sich innerhalb des Systems alle Achsen im Punkte A, während durch je einen Punkt A_i auch nur je eine Achse geht.

Zieht man durch jeden Punkt aus der Reihe $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ eine Parallele zu jeder Achse, so entstehen lauter kongruente Kegel, welche durch Parallel-Verschiebung zur Deckung gebracht und daher alle als verschiedene Lagen **eines** translatorisch fortschreitenden Kegels (F_a) aufgefafst werden können.

Dieser Kegel hat bei seiner Translation mit dem innerhalb des Systems gelegenen Achsen-Kegel in A_1 die erste, in A_2 die zweite etc. Achse gemein, d. h. die beiden Kegel rollen auf einander ab.

So gelangt man endlich zu folgendem Satze:

Die **Bewegung eines unveränderlichen Systems** läfst sich darstellen durch das **Abrollen** zweier **Kegel**, von denen der eine (F_i) dem Systeme angehört, während der andere (F_a) von demselben getrennt zu denken ist.

Die Bahn der gemeinsamen Spitze beider Kegel (A) zeichnet dem äufseren Kegel (F_a) seine translatorische Bewegung vor, während der innere Kegel (F_i) auf ihm abrollt.

Wenn ein physischer Körper in der Nähe der Erdoberfläche geschleudert wird, so bleibt sein Schwerpunkt, indem er eine Parabel (π) beschreibt, stets in gleichem Abstande von einer parallel mit sich selbst bewegten Ebene (E).

Macht man den Schwerpunkt des Körpers zur gemeinsamen Spitze (A) der beiden Kegel F_i und F_a, so gleiten alle Punkte von F_a bei der Bewegung auf congruenten Parabeln (π), während das Central-Ellipsoid (S. 140) des Systems stets jene Ebene E berührt, welche die invariable Ebene genannt wird[1].

Infolgedessen schneidet der Kegel F_i, der hier vom zweiten Grade ist, das Central-Ellipsoid in einer Kurve, welche im Körper durch die Durchgangspunkte (Pole) der aufeinander folgenden Momentan-Achsen gebildet wird und deshalb Polodie (ὁδός) heifst, während der Kegel F_a die invariable Ebene in einer Kurve schneidet, welche im Raume durch die Durchgangspunkte aufeinander folgender Momentan-Achsen gebildet wird. Letztere Kurve läuft in vielen Windungen tangierend zwischen zwei konzentrischen

---

1) Der Beweis dieser Beziehungen kann hier nicht geliefert werden.

Kreisen hin, deren Centrum der Fuſspunkt des vom Schwerpunkt auf die invariable Ebene gefällten Lotes ist, und heiſst deshalb (ἕρπω) *Herpolodie.*

2.

Als Beispiel für diese Auffassung können die **Bewegungs-Verhältnisse der Erde** benutzt werden.

Da die Erde immer um **dieselbe** Achse zu rotieren scheint, so liegt der Schluſs nahe, daſs hier statt des inneren Momentan-Achsen-Kegels (F_i) **eine** Grade, (die Erd-Achse) auftritt, falls man das Erd-Centrum als Punkt A auswählt.

Dieser Schluſs erweist sich als unrichtig: Wenn sich einer der beiden Kegel (F_i oder F_a) auf eine Grade reduciert, so geht gleichzeitig auch der andere Kegel (F_a oder F_i) in eine Grade über, d. h. es findet Drehung um eine feste Achse statt, welche weder innerhalb noch auſserhalb des Systems ihre Lage ändert. *Läſst man z. B. zwei konzentrische Kreiskegel auf einander abrollen, während man die Oberfläche (beziehungsweise die Öffnung) des einen mehr und mehr verkleinert, so wird sich die gegenseitige Lagen-Änderung ihrer beiden Achsen unter sonst gleichen Umständen mehr und mehr vermindern, d. h. dieselbe wird im Grenzfalle Null werden: der Schluſs dieses Specialfalles (Kreiskegel) ist, wie man leicht zeigt, von allgemeiner Geltung.*

Da nun die Erd-Achse bei ruhend gedachtem Erd-Centrum innerhalb eines Zeitraumes von 25868 Jahren (Platonischer Cyklus) einen vollen Kreiskegel-Mantel um eine Normale der Erd-Bahn beschreiben und demnach auf einem Orthogonal-Kreise desselben in einem Jahre ungefähr um 50″ fortrücken würde, so liegt eine Richtungs-Änderung vor: die **Erd-Achse** kann für die **Erd-Bewegung nicht Drehungs-Achse** sein.

Der Kreiskegel der Momentan-Achsen hat die Verbindungs-Linie der Erd-Pole zur Achse: die Seiten dieses Kegels, welcher eine Öffnung von 0″,0087 hat, werden der Reihe nach Drehungs-Achsen.

Macht man das Erd-Centrum zur Spitze eines Kegels (F_a) von ungefähr $23\frac{1}{2}^0$ Öffnung, dessen Achse Normale der Erd-Bahn (Ekliptik) ist, so wird die Bewegung des in Rede stehenden Systems dargestellt, wenn man innerhalb dieses Kegels einen zweiten konzentrischen Kreiskegel (F_i) von 0″,0087 Öffnung rollen läſst, dessen Achse die Verbindungs-Linie der Erd-Pole ist und wenn man auſserdem die Translation beider Kegel so auf der Erd-Bahn vor sich gehen läſst, daſs dieselbe in demselben Sinne wie das Abrollen der Kegel erfolgt.

Eine volle Umdrehung des kleineren Kegels ändert die Richtung der Erd-Achse stets um dieselbe Gröſse: dieselbe schreitet auf einem bestimmten (mit F_a konzentrischen und coaxialen) Kegel fort und zwar in umgekehrtem Sinne zur Translation des Systems.

Um die Öffnung x des kleineren Kegels angenähert zu bestimmen, benutzt man die Formel:

$$365 . (2\pi . \sin x) = \frac{50}{360 . 60 . 60} . (2\pi . \sin 23^1/_2).$$

Denkt man durch das Centrum der Erd-Bahn eine Ebene gelegt, welche auf der Achse der Erde senkrecht steht und also dem Erd-Äquator parallel ist, so rücken die Schnittpunkte derselben auf der Erd-Bahn in umgekehrtem Sinne fort wie das Erd-Centrum selbst: nach jedem Umlaufe der Erde findet man diese Punkte, welche Äquinoktial-Punkte heifsen, um 50″ vorgerückt.

Neben dieser ***Präcession*** *der Tag- und Nacht-Gleichen*[1] *ist bei genauerer Beschreibung der ganzen Bewegung noch die* ***Nutation*** *der Erd-Achse in Rechnung zu bringen: die Erd-Achse beschreibt einen Kegel, dessen erzeugende Grade auf einer Schleifen-Kurve gleitet, welche sich um einen Kreis windet.*

Da die gröfste Abweichung der Erd-Achse, welche bei Ersatz des Kreises durch die Schleifen-Kurve erzeugt wird, nur 9″,2 beträgt, während eine Schleife erst in ungefähr $18^3/_4$ Jahren zustande kommt, so ist die Nutation, d. h. die Schwankung um die Mittel-Lage (innerhalb je einer Schleife) eine relativ geringe.

Neben der Präcession und neben der Nutation, welche beziehungsweise durch den Einflufs der Sonne und des Mondes bedingt werden, wären noch viele geringe Störungen durch andere Himmels-Körper in Rechnung zu bringen.

§. 2. Translation und Rotation.

Wenn die Bahnen für A, B, C die Eigenschaft haben, dafs bei elementarer Einteilung die Ebenen A_i, B_i, C_i und aufserdem die entsprechenden Bahn-Inkremente einander parallel sind, so befindet sich das System in **Translation.**

Hier beschreiben alle Punkte des Systems in einem Zeit-Elemente Parallel-Strecken von gleicher Länge.

Da hier die Bahnen beliebig vieler Punkte nur Wiederholungen der Bahn eines beliebig gewählten Punktes sind, so darf man statt der Bewegung des Systems die Bewegung eines seiner Punkte betrachten.

Man darf hier — und zunächst ***nur***[2] *hier — auch von der Bahn-Geschwindigkeit beziehungsweise von der Bahn-Beschleunigung des ganzen Systems sprechen, weil hier für alle Punkte gilt, was für einen in Geltung ist.*

---

1) Auf diesem Fortschreiten beruht der Unterschied zwischen dem siderischen und dem tropischen Jahre. Vergl. A. II. 3 dieses Buches.

2) Wenn in den Lehrbüchern schon im Eingang der Physik von der Geschwindigkeit eines Körpers gesprochen wird, so ist das im Hinblick auf die Anforderungen der logischen Strenge sehr zu bedauern; man denke nur an die Geschwindigkeit (!) eines geschleuderten Stabes oder an die Geschwindigkeit (!) der Wassermasse eines Springbrunnens etc.

Wenn die Bahnen für A, B, C Kreise sind, deren Centra auf einer Graden liegen, während ihre Ebenen die gemeinsame Central-Achse rechtwinklig schneiden, so rotiert das System um eine feste Achse.

Hier beschreiben alle Punkte des Systems in einem Zeit-Elemente Kreisbogen, die zu gleichen Winkeln gehören.

Auch hier ist die Bahn eines beliebigen Punktes in gewissem Sinne (Ähnlichkeit) nur eine Wiederholung der Bahn irgend eines andern Punktes.

Man darf auch hier — und das ist der **zweite** *Fall — von der Winkel-Geschwindigkeit beziehungsweise von der Winkel-Beschleunigung des ganzen Systems sprechen, weil hier in gewissem Sinne für alle Punkte gilt, was für einen in Geltung ist.*

§. 3. Die Schrauben-Bewegung.

Die allgemeine Bewegung eines unveränderlichen Systems läfst auch eine andere Deutung zu.

Wenn das Bewegungs-Dreieck aus der Lage ABC in die Lage A′B′C′ übergeht, so kann man für jeden der Punkte A, B, C eine Darstellung gewinnen, indem man der Reihe nach die Translationen AA′, BB′, CC′ der Betrachtung unterwirft und jedesmal eine geeignete Rotation hinzufügt: die **Achsen** dieser **drei Rotationen** sind einander **parallel.**

Der Beweis für dieses Theorem läfst sich äufserst einfach geben, wenn man durch die Ecken A, B, C Parallelen zu einer bereits konstruierten Achse (z. B. zu der Achse aus A) zieht [1].

Denkt man eine Ebene, normal zur gemeinsamen Rotations-Richtung, mit dem Bewegungs-Dreiecke fest verbunden, so wird diese bei den einzelnen Drehungen nur in sich gedreht, während ihre Überführung aus der durch A, B, C bezeichneten Lage in die durch A′, B′, C′ bezeichnete Lage durch jede der Translationen AA′, BB′, CC′ bewirkt werden kann.

Da die Normale der festen Ebene durch die Translation in jedem Falle um ein bestimmtes Stück σ verschoben werden mufs, so ist σ die Projektion von jeder der Translationen AA′, BB′, CC′.

Ein **unveränderliches System** kann durch **eine** Translation und **eine** Rotation in Bezug auf **dieselbe** Grade (Central-Achse) aus einer gegebenen Lage A, B, C in jede andere Lage A′, B′, C′ übergeführt werden: Dabei resultiert eine **Schrauben-Bewegung.**

Wenn sich ein Punkt aus der Ecke eines Rechtecks mit konstanten Geschwindigkeiten gleichzeitig auf den beiden anstofsenden Seiten bewegen soll, so schlägt er die diagonale Richtung ein.

---

1) Man kann diese Beziehungen auch durch eine Untersuchung über die gemeinsamen Elemente kongruenter Systeme herleiten. Diese Untersuchung läfst sich auch auf der Schule z. B. im Anschlufs an Seeger, Die Elemente der Geometrie (Güstrow) leicht bewältigen.

Denkt man zwei Gegenseiten eines Rechtecks je zu einem vollen Kreise zusammengebogen, so wird ein Cylinder-Mantel gebildet, auf welchem die Diagonale eine Schrauben-Linie verzeichnet: ein Punkt, welcher gleichzeitig auf dem Grundkreise und auf einer Seite des Cylinders in gleichförmiger Bewegung fortschreiten soll, beschreibt eine gewöhnliche Schrauben-Linie.

Wenn die Bewegungen nicht gleichförmig sind, so werden Stücke von Schrauben-Linien erzeugt, welche in ihrer Gesamtheit eine Kurve darstellen, der eine Schrauben-Bewegung entspricht.

Zur Konstruktion der Central-Achse kann man davon ausgehen, dafs dieselbe für homologe Punkte nach Ausführung der centralen Translation eine Linie gleichen Abstandes sein mufs [1]).

Gelangt △ ABC durch die centrale Translation in die Lage 𝔄𝔅ℭ, so müssen die Ebenen, welche man in der Mitte der Strecken A′𝔄, B′𝔅, C′ℭ normal zu diesen errichten kann, als Schnittlinie die Central-Achsen liefern.

Um die centrale Translation auszuführen, hat man eine Strecke zu suchen, welche die Projektion dreier, nach Gröfse und Richtung gegebener Strecken AA′, BB′, CC′ ist.

Diese Aufgabe erledigt sich sofort, wenn man bedenkt, dafs jede Höhe eines Dreiecks zu den anstofsenden Seiten und dafs jede Höhe eines Tetraëders zu den anstofsenden Kanten die gesuchte Stellung hat.

Demnach gelangt man zu folgender Konstruktion: In die drei Punkte A, B, C legt man die Ecken dreier Tetraëder, deren Seiten aus A, B, C, beziehungsweise der Gröfse und Richtung nach gleich AA_1, BB_1, CC_1 sind und fällt in ihnen die Höhen aus A, B, C.

Nennt man die Fufspunkte dieser Höhen 𝔄, 𝔅, ℭ, so schneiden sich die Ebenen gleichen Abstandes für die Paare A′𝔄, B′𝔅, C′ℭ auf der Central-Achse.

Verfolgt man die Bewegung eines unveränderlichen Systems durch eine Reihe von Lagen, welche elementaren Bahn-Inkrementen der einzelnen Punkte entsprechen, so gelangt man zu einer Reihe von Central-Achsen der Translation und Rotation. Wenn man jede dieser Achsen sowohl in dem Systeme als auch im umgebenden Raume verzeichnet denkt, so gelangt man zu zwei Flächen F_1 und F_2, welche **Regel-Flächen** heifsen, weil auf ihnen grade Linien (règle) liegen, welche sich übrigens im allgemeinen nicht schneiden.

So gelangt man zu dem Satze:

Die **Bewegung eines unveränderlichen Systems** läfst sich darstellen durch das **Gleiten** und **Rollen** zweier **Regel-Flächen,**

---

1) Eine andere Konstruktion (vergl. Schell, Theorie I, S. 162) rührt von Chasles her; die hier gegebene scheint mir in den Rahmen der hier gewählten Darstellung besser hineinzupassen.

von denen die eine (F_i) dem Systeme angehört, während die andere (F_a) von ihm getrennt zu denken ist.

Für jede Central-Achse findet eine Translation (Gleiten) und eine Rotation (Rollen) statt.

Wenn ein fester Punkt vorhanden ist, so gehen die Kegel-Flächen in Kegel-Mäntel über.

Liegt der Punkt im Unendlichen, so gehen die Kegel-Mäntel in Cylinder-Mäntel über: ein Normalschnitt des einen oder des andern Cylinders ist jeder Zeit derselben Ebenen-Schar des Systems parallel.

Wenn eine Ebene des Systems stets einer festen Ebene parallel bleibt und von dieser denselben Abstand behält, so beschreiben alle Punkte des Systems ebene Bahnen: es handelt sich dann blofs um die Bewegung eines ebenen Systems.

Die **allgemeine Bewegung** eines unveränderlichen Systems läfst sich durch eine **Reihe zusammengehöriger Translationen und Rotationen** darstellen.

Einer bestimmten Verschiebung um die Translations-Strecke h_i ist eine bestimmte Drehung um den Rotations-Winkel ϑ_i zuzuordnen, so dafs man zu einer Reihe (h_1, ϑ_1), (h_2, ϑ_2) .... (h_n, ϑ_n) gelangt.

Die Translations-Strecke h_i pflegt man abkürzend als Translation, den Rotations-Winkel ϑ_i pflegt man abkürzend als Amplitude einzuführen.

Wenn man die Zeit [t], während welcher die Bewegung betrachtet wird, in eine Reihe $[t_1]$, $[t_2]$ .... $[t_n]$ von Zeitteilen gleicher Dauer τ zerlegt, so stellt die Reihe

$$\frac{h_1}{\tau}, \frac{h_2}{\tau} \cdots \frac{h_n}{\tau}$$

die Reihe der **Translations-Geschwindigkeiten** des Systems dar.

Für eine elementare Einteilung gelangt man auf dem, bereits des öfteren angegebenen, Wege zu der Reihe der Translations-Geschwindigkeiten für die einzelnen auf einander folgenden Zeit-Momente.

In analoger Weise hat man die Reihe

$$\frac{\vartheta_1}{\tau}, \frac{\vartheta_2}{\tau} \cdots \frac{\vartheta_3}{\tau}$$

als die Reihe der mittleren **Rotations-Geschwindigkeiten** des Systems einzuführen.

Für eine elementare Einteilung gelangt man hier zu der Reihe der Rotations-Geschwindigkeiten für die einzelnen auf einander folgenden Zeit-Momente.

Innerhalb der Zeit $[t_i]$ haben alle Punkte des Systems, abgesehen von der Momentan-Achse, dieselbe Winkel-Geschwindigkeit $\frac{\vartheta_i}{\tau}$.

Die Betrachtungen, welche in der Phoronomie des Punktes für die Reihe der Beschleunigungen verschiedener Ordnung zur Geltung kommen, lassen sich auf die Reihe der Translations-Inkremente und auf die Reihe der Amplituden-Inkremente nicht unmittelbar übertragen, weil hier im allgemeinen für die Bewegung von Moment zu Moment andere Achsen in Frage kommen.

§. 4. Zusammensetzung und Zerlegung von Bewegungen.

1.

Wenn ein unveränderliches System aus einer Lage A in eine Lage B gelangt, so läfst sich immer eine bestimmte Achse der Translation und Rotation konstruieren, in Bezug auf welche jene Lagen-Änderung entstanden gedacht werden kann, obwohl die wirklich vorhandene Bewegung möglicher Weise in ganz anderer Weise zu Stande gekommen ist.

Alle Bewegungen, welche **eine und dieselbe** Lagen-Änderung hervorrufen können, sollen **äquivalent** genannt werden.

Bewegungen, welche in ihrer Gesamtheit einer bestimmten Bewegung **äquivalent** sind, heifsen die **Komponenten** jener Bewegung, während diese selbst als **Resultante** zu bezeichnen ist.

Man darf hier die Vorstellungen, welche in der Phoronomie des Punktes zur Geltung kommen, ohne weiteres übertragen.

Als Komponenten einer resultierenden Bewegung können Translationen, Rotationen und Schrauben-Bewegungen auftreten.

Demgemäfs erwächst eine Reihe von Aufgaben in Bezug auf die Zusammensetzung beziehungsweise in Bezug auf die Zerlegung von Bewegungen.

Beliebig viele Translationen sind äquivalent **einer einzigen Translation,** deren Gröfse sich bei mechanischer Addition als die Summe der einzelnen Translationen darstellt.

Eine Translation läfst sich durch mechanische Addition in eine Reihe von Translationen auflösen, deren Anordnung willkürlich ist: Vertauschbarkeit der Komponenten.

Da translatorische Bewegungen eines Systems unmittelbar auf die Phoronomie des Punktes zurückweisen, so bedürfen die eben erwähnten Sätze an dieser Stelle keines ausführlichen Beweises.

Für die Vereinigung **beliebig vieler Rotationen** gelten **keine** Beziehungen von analoger Einfachheit: namentlich bedarf hier die Frage nach der Vertauschbarkeit [1]) der Komponenten einer eingehenden Beachtung.

Wenn die Rotationen alle um dieselbe Achse zu Stande kommen, so tritt allerdings eine algebraische Addition (Phoronomie des Punktes) der Amplituden ein.

Hier tritt zum ersten Male die Forderung auf, je zwei **auf**

1) Vergl. dazu Schell, Theorie I, S. 165.

einander folgende Bewegungen von je zwei **gleichzeitig auftretenden** Bewegungen streng zu unterscheiden.

Wenn ein Punkt erst um eine Strecke [a] und dann um eine Strecke [b] verschoben wird, so gelangt er (in Bezug auf ein ruhendes Koordinaten-System) in dieselbe Lage, als wenn er erst um eine Strecke [b] und dann um eine Strecke [a] verschoben wird..

Wird der Punkt beiden Bewegungen gleichzeitig unterworfen unter der Bedingung, dafs er die Strecke [a] und [b] in derselben Zeit [t] durchläuft, so gelangt er wiederum in die oben bezeichnete Lage.

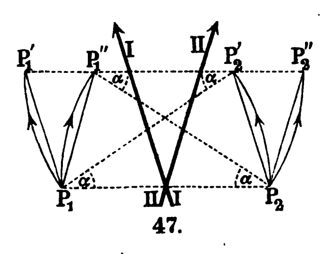
Wenn sich dagegen ein System z. B. um zwei parallele Achsen, beziehungsweise um die Amplituden [α_1] und [α_2] dreht, so stimmt die Endlage bei der Folge [α_1] . . . . [α_2] nicht überein mit der Endlage bei der Folge [α_2) . . . . [α_1]. Tanzendes Paar.

Für die Vereinigung mehrerer Rotationen ist es von Wichtigkeit, dafs jede **Rotation von der Amplitude** [α], welche um eine Achse I vor sich geht, äquivalent ist einer **Rotation von derselben Amplitude** [α], welche um eine beliebig auszuwählende Parallel-Achse II vor sich geht, falls man das System aufserdem **senkrecht** zu dieser Achse (II) um eine bestimmte Strecke [a] verschiebt.

Eine Rotation und eine Translation dürfen in **beliebiger Folge** oder auch **gleichzeitig** vorgenommen werden.

*Den Beweis dieser Beziehungen führt man leicht mit Hülfe von **Rotations-Paaren,** d. h. mit Hülfe der Verbindung von zwei Rotationen um parallele Achsen, deren Amplituden bei gleichem Werte entgegengesetzten Sinn haben.*

*Ein **Rotations-Paar** ist stets einer **Translation** äquivalent.*



47.

Die parallelen Achsen mögen die Ebenen der Zeichnung (Figur 47) in P_1 und P_2 schneiden.

Dreht man (I) erst um P_1, so dafs P_2 in die Lage P'_2 gelangt, und dann um P'_2, so dafs P_1 in die Lage P'_1 gelangt, so ist $P_1 P_2$ um die Strecke $P_1 P'_1$ oder $P_2 P'_2$ parallel mit sich verschoben.

Dreht man (II) erst um P_2, so dafs P_1 in die Lage P''_1 gelangt, und dann um P''_1, so dafs P_2 in die Lage P''_2 gelangt, so ist $P_1 P_2$ in der Strecke $P_1 P''_1$ oder $P_2 P''_2$ parallel mit sich verschoben.

Die Translations-Strecke hat in beiden Fällen die Länge $2\, P_1 P_2 \sin\frac{\alpha}{2}$; dieselbe steht immer (I und II) auf den Orthogonal-Symmetralen der Amplituden und aufserdem auf den Achsen

senkrecht und hat gegen die Achsen-Ebene (P_1 P_2) die Neigung $R - \frac{\alpha}{2}$.

Wenn man nun für irgend eine Achse II, welche der Achse I einer gegebenen Rotation von der Amplitude [α] parallel ist, zwei Drehungen von den Amplituden + [α] und — [α] einführt, so bildet + [α] an I mit — [α] an II ein Rotations-Paar, welches einer Translation äquivalent ist, so dafs also eine bestimmte Translation und eine Rotation [α] resultiert.

Dafs die komponierenden Bewegungen hier vertauschbar sind, ist unmittelbar (Kongruenz) einzusehen: man darf ebensowohl erst drehen und dann verschieben als auch erst verschieben und dann drehen.

Die weitere Entwicklung zerlegt sich in mehrere Teile:

I. Eine **Folge von Rotationen** um Achsen, welche einem **Parallel-Strahlen-Systeme** angehören, ist äquivalent **einer einzigen Rotation** um einen Strahl dieses Systems, falls die Bewegung **nicht** durch eine **Translation** dargestellt werden kann.

Wählt man irgend eine Achse A des Systems aus, so kann man in Bezug auf diese jede Rotation in der oben gegebenen Weise zerlegen und wegen der Vertauschbarkeit der Komponenten die einzelnen Amplituden für sich und die einzelnen Translationen für sich vereinigen.

Wenn die resultierende Amplitude „Null“ ist, so bleibt eine Translation übrig.

Wenn die resultierende Amplitude nicht Null ist, so läfst sich dieselbe mit der resultierenden Translation zu einer Amplitude für eine bestimmte Achse des Parallel - Strahlen - Systems vereinigen.

Tritt aufser einer **Folge von Rotationen um Parallel-Achsen** noch eine **Folge von Translationen** auf, so resultiert im allgemeinen eine **Schrauben-Bewegung.**

Zerlegt man die Resultante der Translationen parallel und senkrecht zur resultierenden Rotations - Achse, so liefert die letztere Komponente im Verein mit der resultierenden Amplitude eine Drehung, deren Achse der ersteren Komponente der Translation parallel ist.

Wenn keine Parallel-Komponente der Verschiebung vorhanden ist, so gelangt man zu einer einfachen Drehung.

II. Eine **Folge von Rotationen** um Achsen, welche einem **Strahlen-Bündel** angehören, ist äquivalent **einer einzigen Rotation** um einen Strahl jenes Systems.

Ein unveränderliches System kann aus einer Lage durch eine Rotation um eine bestimmte Achse und durch eine Translation längs derselben Achse in jede andere Lage übergeführt werden, während

hier im besonderen das Centrum des Strahlen-Bündels in Ruhe bleibt [1]).

Tritt aufser einer **Folge von Rotationen um Achsen aus einem Punkt** noch eine **Folge von Translationen** auf, so resultiert im allgemeinen eine **Schrauben-Bewegung.**

Wenn die resultierende Translation auf der Achse der resultierenden Drehung senkrecht steht, so gelangt man auch hier zu einer einfachen Drehung.

III. Eine **Folge von Rotationen um windschiefe Achsen** führt im allgemeinen zu einer **Schrauben-Bewegung.**

Wenn man durch einen Punkt einer Graden (I) zu einer windschief dazu gelegenen Graden (II) eine Parallele (III) legt, so kann die Drehung um I abgesehen von einer Translation in eine Drehung um III verwandelt werden, so dafs nur Drehungen um Grade eines Strahlen-Bündels und aufserdem Translationen in Frage kommen.

Tritt aufser einer **Folge von Rotationen um beliebig gelegene Achsen** noch eine **Folge von Translationen** auf, so resultiert im allgemeinen eine **Schrauben-Bewegung**.

Die allgemeine Bewegung eines unveränderlichen Systems ist hiermit von neuem dargestellt worden.

Bei der Vereinigung von **Drehungen von endlicher Amplitude** lassen sich die **resultierenden Achsen** auf **keine** Weise durch **geometrische** (beziehungsweise mechanische) **Addition** herstellen, während Translationen in **jedem** Falle durch **geometrische** (beziehungsweise mechanische) **Addition** zusammengesetzt werden können.

Zwei Drehungen um sich schneidende Achsen (I und II) sind z. B. jederzeit äquivalent einer Drehung um eine Achse (III), welche aus der Ebene der gegebenen Achsen (I und II) heraustritt.

Zwei Translationen auf sich schneidenden Graden (I und II) sind dagegen jederzeit äquivalent einer Translation auf einer Achse (III), welche in der Ebene der gegebenen Graden (I und II) liegt.

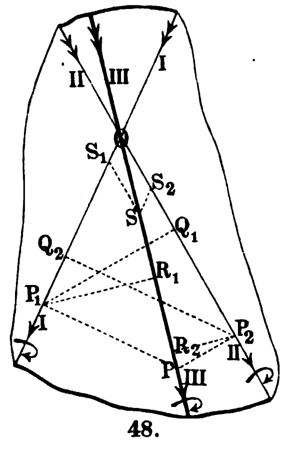
Bei der Vereinigung **elementarer Drehungen** lassen sich die **resultierenden Achsen** durch **mechanische Addition** herstellen.

Die **Folge elementarer Rotation** ist stets **vertauschbar.**

Wenn zwei Rotations-Achsen (I und II) einen Punkt O gemeinsam haben, so bleibt dieser bei Drehungen um jene Achsen in Ruhe. Wenn man unter den vier Halb-Strahlen aus O diejenigen

---

1) Ein direkter Beweis dieses Satzes (vergl. z. B. Schell, Theorie I, S. 174) würde im Verein mit dem hier Gegebenen die Ausführungen von §. 1, §. 2 und §. 3 von neuem begründen.



48.

(*markiert durch einfache und doppelte Pfeilspitzen) zusammenfaſst, um welche die Drehungen für einen Beobachter in O in demselben Sinne vor sich gehen, so bemerkt man, daſs ruhende Punkte nur in den, von diesen beiden Paaren begrenzten, Scheitelräumen (durch starke Umrandung kenntlich gemacht) vorhanden sein können (Figur 48).*

Bezeichnet man einen der ruhenden Punkte, deren Existenz hier noch fraglich ist, mit P, so muſs bei bezüglichen Drehungen (um die Lote PP_1 *und* PP_2*) von den Amplituden* α_1 *und* α_2

$$\alpha_1 \, . \, PP_1 = \alpha_2 \, . \, PP_2$$

$$\text{oder } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{PP_1}{PP_2} = \frac{\sin(I, II)}{\sin(II, III)}$$

sein, d. h. P liegt auf einer Graden aus O, deren Abstände von I und II, beziehungsweise α_2 *und* α_1 *proportional sind.*

Alle Punkte der Graden O P werden durch die Drehung um I ebensoviel unter die Ebene der Zeichnung gesenkt, wie sie durch die Drehung um II über die Ebene der Zeichnung erhoben werden, d. h. die Grade O P bleibt in Ruhe.

Bei diesem Schlusse ist es wesentlich vorauszusetzen, daſs die Bogen $\alpha_1 \, . \, PP_1$ *und* $\alpha_2 \, . \, PP_2$ *so klein sind, daſs sie als elementare Strecke angesehen werden können: die Folge der Rotationen, welche auch gleichzeitig vorgenommen werden dürfen, ist in diesem Falle gleichgültig.*

Um die Amplitude α *der Drehung für die Achse O P festzustellen, hat man zu beachten, daſs* P_1 *nur durch die Drehung um* OP_2 *und daſs* P_2 *nur durch die Drehung um* OP_1 *bewegt wird, während ihre Bewegungen andererseits durch eine Drehung von der Amplitude* α *um O P zu Stande kommen. Demnach ist:*

$$P_1 Q_1 \, . \, \alpha_2 = P_1 R_1 \, . \, \alpha \text{ und } P_2 Q_2 \, . \, \alpha_1 = P_2 R_2 \, . \, \alpha.$$

$$\text{Daraus folgt } \frac{\alpha}{\alpha_2} = \frac{P_1 Q_1}{P_1 R_1} = \frac{\sin(I, II)}{\sin(I, III)}$$

$$\text{und } \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{P_2 Q_2}{Q_2 R_2} = \frac{\sin(I, II)}{\sin(II, III)},$$

$$\text{d. h. } \frac{\alpha_1}{\sin(II, III)} = \frac{\alpha}{\sin(I, II)} = \frac{\alpha_2}{\sin(I, III)}.$$

Trägt man auf den Achsen I und II von O aus nach der Seite hin, für welche ein Beobachter in O die beiden Drehungen umgekehrt zu dem Sinne einer Uhrzeiger-Bewegung verlaufen sieht, beziehungsweise Strecken OS_1 *und* OS_2 *ab, welche den Bogen* α_1 *und* α_2 *proportional sind, so liefert eine Parallelogramm-Konstruktion die Diagonale O S proportional zu der gesuchten Amplitude* α *und zwar verläuft die Drehung von der Amplitude* α *für einen*

Beobachter in O umgekehrt zu dem Sinne einer Uhrzeiger-Bewegung.

Man hat nämlich:

$$\frac{OS_1}{sin(II, III)} = \frac{OS}{sin(I, II)} = \frac{OS_2}{sin(I, III)}.$$

Da die elementare Drehung hier durch eine Strecke von bestimmter Länge und Lage symbolisiert werden kann, so gilt das Verfahren der geometrischen Addition für die Vereinigung von elementaren Drehungen um Achsen aus einem Punkte.

Gehen die Achsen der Rotation nicht durch einen Punkt, so treten, abgesehen von dem Falle der Parallelität, außerdem Translationen auf, welche für sich zu vereinigen sind.

Der Unterschied zwischen der **Vereinigung endlicher Drehungen** und der **Vereinigung elementarer Drehungen** weist in letzter Instanz darauf zurück, daſs die **Folge von Drehungen** im allgemeinen **nicht vertauschbar** und daſs überhaupt die Anordnung von Drehungen nicht willkürlich ist.

Man gelangt hier leicht zu der unrichtigen Vorstellung, daſs eine elementare Teilung endlicher Drehungen den Fall der endlichen Amplituden auf den Fall der elementaren Amplituden zurückzuführen gestattet.

Die Vereinigung der Drehungen von elementaren Amplituden läſst sich durch die Einführung des Begriffs der Winkelgeschwindigkeiten auf eine andere Form der Darstellung bringen.

Die Theorie der Addition elementarer Drehungen führt hier zu dem Satze:

Dreht sich ein unveränderliches System gleichzeitig um zwei sich schneidende Achsen (I und II), beziehungsweise mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2, so ist diese Bewegung äquivalent einer Drehung um eine Achse (III). Trägt man auf den gegebenen Achsen (I und II) Strecken auf, deren Längen den Werten der gegebenen Winkelgeschwindigkeit, beziehungsweise proportional sind, während ihre Richtungen den Sinn der Drehungen bezeichnen, so stellt die Diagonale des hierdurch bestimmten Parallelogramms die resultierende Winkelgeschwindigkeit dem Werte und dem Sinne nach dar.

Geht während des Zeit-Elementes τ eine Drehung von der Amplitude α vor sich, so wird die Winkelgeschwindigkeit hier durch den Quotienten $\frac{\alpha}{\tau}$ dargestellt: die elementaren Amplituden, welche einem Zeit-Elemente τ entsprechen, sind den bezüglichen Winkelgeschwindigkeiten proportional, so daſs man diese gleichfalls durch Strecken darstellen kann.

Einer **elementaren Schrauben-Bewegung** entspricht eine bestimmte **Schrauben-Geschwindigkeit,** welcher man für Punkte im Abstande r von der Schrauben-Achse die Form $\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}$

geben kann, falls man die Translations-Geschwindigkeit (längs der Achse) mit v und die Rotations-Geschwindigkeit (für dieselbe Achse) mit ω bezeichnet.

Die Komponenten $r\omega$ und v stehen normal zu einander.

Bezeichnet man die Komponenten der elementaren Verschiebung und die Komponente der elementaren Drehung für einen Punkt (x, y, z), beziehungsweise mit ξ, η, ζ und mit φ, χ, ψ, so werden die Komponenten der elementaren Schrauben-Bewegung, deren Achse durch den Punkt (o, o, o) geht, dargestellt durch

$$\xi + z\chi - y\psi$$
$$\eta + x\psi - z\varphi$$
$$\zeta + y\varphi - x\psi.$$

In analoger Weise ergeben sich die Formeln der entsprechenden Geschwindigkeit, falls man $\frac{\xi}{\tau} = \xi'$, $\frac{\eta}{\tau} = \eta'$, $\frac{\zeta}{\tau} = \zeta'$ und $\frac{\varphi}{\tau} = \varphi'$, $\frac{\chi}{\tau} = \psi'$, $\frac{\psi}{\tau} = \psi'$ setzt, als

$$\xi' + z\chi' - y\psi'$$
$$\eta' + x\psi' - z\varphi'$$
$$\zeta' + y\varphi' - x\psi'.$$

Bei der Ableitung dieser Formeln hat man zu beachten, daſs z. B. die Verschiebung längs der X-Achse unabhängig ist von der Komponente der Drehung um die X-Achse, während die beiden andern Komponenten der Drehung hier mit in Rechnung zu ziehen sind.

2.

Der Foucaultsche Pendelversuch. Ein **schwingendes Pendel**, dessen Beweglichkeit durch nichts gehindert ist, gestattet die **Achsen-Drehung der Erde** unmittelbar zur Anschauung zu bringen.

Wenn der Aufhänge-Punkt eines frei (d. h. nach allen Seiten) beweglichen Pendels mit einer horizontalen Platte fest verbunden ist, welche um eine vertikale Achse gedreht werden kann, so kann man die Schwingungs-Ebenen des Punktes bei ebenen Schwingungen des Pendels sowohl in ihrer Lage zu der drehbaren Platte als auch in ihrer Lage zur Begrenzung des umgebenden Raumes bestimmen.

Wenn man zunächst das Pendel in Bewegung setzt und wenn man dann die Platte in einem Augenblicke zu drehen beginnt, in welchem das Pendel durch die Ruhelage geht, so bleibt die Lage der Schwingungs-Ebene in Bezug auf den umgebenden Raum ungeändert, während sie in Bezug auf die ruhend gedachte Platte rotiert.

Wenn man über dem Pole der Erde ein Pendel aufhängen könnte, so müſste sich die Ebene desselben für Schwingungen aus der Ruhelage gegen eine bestimmte Vertikal-Ebene des Poles drehen, falls die Erde der gebräuchlichen Annahme gemäſs rotiert.

Wenn man das Pendel nicht aus der Ruhelage schwingen lieſse, so würde es bei einer bestimmten Erhebung aus derselben für

einen Augenblick mit der Erde fest verbunden gedacht werden müssen, so dafs es eine bestimmte, einem gewissen (allerdings sehr kleinen) Parallelkreise entsprechende, seitliche Geschwindigkeit mitbekäme.

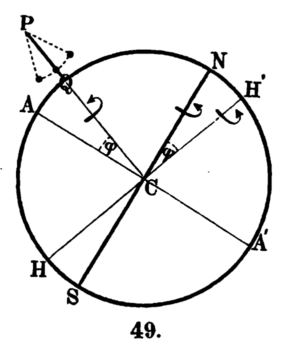
In diesem Falle würde das Pendel nicht in einer Ebene schwingen, so dafs von einer Drehung der Schwingungs-Ebene nicht gesprochen werden dürfte: trotzdem würde eine Lagen-Änderung des Pendels gegen die Vertikal-Ebene zu konstatieren sein.

Wenn man über einem Punkte des Äquators ein Pendel aufhinge, so würde für ebene Schwingungen in der Äquatorial-Ebene selbst keine Drehung der Pendel Ebene zu beobachten sein, wenn die Erde der gebräuchlichen Annahme gemäfs rotiert.

Da sich der Aufhänge-Punkt des Pendels in diesem Falle in der Äquatorial-Ebene befindet, so sind ebene Schwingungen vorhanden.

Wenn man über einem Punkte irgend eines Breitenkreises (φ) ein frei bewegliches Pendel anfhängt, so werden ebene Schwingungen [1]) überhaupt nicht herzustellen sein: trotzdem mufs hier eine Analogie zur Drehung der Schwingungs-Ebene, wie sie am Pole vor sich geht, zu beobachten sein, falls die Erde der gebräuchlichen Annahme gemäfs rotiert.

Wenn in Figur 49 ein Meridianschnitt durch den Ort Q dargestellt wird, so bewegt sich ein in P aufgehängtes Pendel, das momentan auf seinem Meridiane schwingt, in der Ebene der Zeichnung.



49.

Die eventuelle Drehung der Erde um die Achse NS kann dargestellt werden durch gleichzeitige Drehungen um die Achse CQ und CH, d. h. durch eine Drehung um die Vertikal-Achse des Ortes Q und durch eine Drehung um die im Meridian gelegene Horizontal-Achse des Ortes Q.

Wäre nur die Drehung um die Horizontal-Achse vorhanden, so würde nur der Aufhängepunkt (P) des Pendels mit der Schwingungs-Ebene verschoben werden, so dafs diese gegen eine beliebige Vertikal-Ebene des Ortes A' keine Lagen-Änderung zeigen könnte.

Die andere Drehung läfst die Horizontal-Ebene des Ortes Q um PQ rotieren, so dafs hier Verhältnisse auftreten, welche den am Pol geschilderten näherungsweise analog sind.

Bezeichnet man die Umlaufszeit der Erde mit T, so hat deren

1) Vergl. Schellbach, Neue Elemente I, S. 248.

Winkel-Geschwindigkeit für die Achse NS den Wert $\frac{2\pi}{T}$, *so dafs für die Achsen CQ und H'H die Gröfsen* $\frac{2\pi}{T} . \sin\varphi$ *und* $\frac{2\pi}{T} . \cos\varphi$ *resultieren.*

Für Q tritt nach der obigen Betrachtung eine scheinbare Drehung der Momentan-Schwingungs-Ebene ein, welche nur von der Winkel-Geschwindigkeit $\frac{2\pi}{T} . \sin\varphi$ *für die Achse CQ abhängt, so dafs hier eine Umlaufszeit* $\frac{T}{\sin\varphi}$ *anzusetzen ist: die Momenten-Schwingungs-Ebene macht hier in der Zeit* $\frac{T}{\sin\varphi}$ *eine volle Umdrehung.*

Diese Darstellung ist im Hinblick auf die Natur der wirklich vorhandenen Schwingungen, welche durchaus nicht eben sind, als eine angenäherte Beschreibung der Thatsachen aufzufassen, da man höchstens von einer Momentan-Schwingungs-Ebene sprechen darf.

Weil sich die eventuelle Drehung der Erde in Bezug auf eine unveränderlich gelegene Ebene von Pendel-Schwingungen für einen Beobachter als eine scheinbare Drehung der Pendel-Ebene darstellen mufs, so kann man hier durch Beobachtung über die Frage der Erd-Rotation entscheiden.

Die scheinbare Drehung D_φ *für eine mittlere Sekunde ergiebt sich aus der Bemerkung, dafs 360° innerhalb der Zeit-Dauer* $\frac{T}{\sin\varphi}$ *durchlaufen werden.*

Man findet $D_\varphi = \frac{360 . \sin\varphi}{86164,09}$.

Foucault bat zuerst (1851) im Pariser Observatorium und später im Pantheon (zu Paris) Versuche angestellt, welche die Annahme einer Drehung der Erde unmittelbar beweisen.

Diese Versuche sind des öfteren wiederholt worden und haben stets sehr günstige Resultate ergeben [1]).

Für das Gelingen der Untersuchungen ist es abgesehen von der Art der Aufhängung, von Wichtigkeit, das Pendel mehrere Tage lang in der Ruhelage sich selbst zu überlassen, damit die Torsion (Drehung) des Aufhängungs-Drahtes ausgeglichen wird und die Pendelkugel darauf bei gespanntem Drahte im Meridiane um ein kleines Stück zu erheben und dieselbe in dieser Lage an einem kurzen Faden zu befestigen.

Nachdem man das System wiederum einige Zeit lang sich selbst überlassen hat, brennt man den Befestigungs-Faden ab, so dafs die Pendelkugel der Fall-Beschleunigung folgt.

---

1) **Man benutzt am besten lange Pendel mit schwerer Belastung: Foucaults Pendel, welches für die Versuche im Pantheon hergestellt wurde, hatte eine Länge von 62 Metern.**

Eine vertikal nach unten gerichtete Spitze, welche man in die Pendelkugel eingeschraubt hat, markiert die Abweichung auf einer horizontal gelegenen Kreisteilung.

Da die scheinbare Drehung, welche man hier beobachtet, der wirklichen Drehung der Erde entgegengesetzt ist, so mufs sich die Pendel-Ebene scheinbar auf der nördlichen Halbkugel von Osten durch Süden nach Westen, auf der südlichen Halbkugel von Westen durch Süden nach Osten drehen.

Von diesen Verhältnissen gewinnt man am leichtesten eine Anschauung, wenn man die Betrachtung zunächst nur für die beiden Pole anstellt und sich vergegenwärtigt, dafs für den Äquator keine Drehung stattfindet.

Denkt man eine Taschenuhr (horizontal) auf den Nordpol der Erde gelegt, so drehen sich deren Zeiger und die Erde in umgekehrtem Sinne, während die Pendel-Ebene mit dem Zeiger der Uhr rotiert.

Denkt man die Uhr parallel mit sich in einem Schachte vom Nordpol zum Südpol bewegt und am Südpole umgedreht, so drehen sich nunmehr die Zeiger der Uhr und die Erde in demselben Sinne, während sich die Pendel-Ebene dem Uhrzeiger entgegen bewegt.

Denkt man eine Taschenuhr auf einem Meridiane vom Nordpol zum Südpol gleiten, so dafs ihre Zeigerfläche stets nach oben gerichtet ist, so tritt für den Äquator die Umdrehung des Drehungssinnes ein: die Drehung der Pendel-Ebene findet auf der Nordhälfte der Erde im Sinne eines Uhrzeigers, auf der Südhälfte gegen den Sinn eines Uhrzeigers statt.

Die Zeit einer vollen Umdrehung T_φ ist für Berlin, wo $\varphi = 52^\circ\, 30'$ zu setzen ist, gegeben als

$$T_{52^\circ\, 30'} = 30^h\, 10'\, 0'', 73 \text{ mittlerer Zeit.}$$

Man hat angenähert $D_{52^\circ\, 30'} = \frac{1}{24 \,.\, 60 \,.\, 60} \,.\, 285^\circ\, 36'$, d. h. die Drehung beträgt hier in einem Tage etwa $285^\circ\, 36'$, oder sie beträgt in einer Stunde etwa $15^\circ\, 1'\, 18''$.

B. Elastische Systeme.

§. 1. Reguläre Wellen grader Punkt-Reihen.

Wenn man das Verbindungs-Gesetz eines unveränderlichen Systems so geändert denkt, dafs die **einzelnen Punkte** um die bisher eingenommenen Orte (Ruhelagen) **Schwingungen** vollführen, so gelangt man zu der Vorstellung eines **elastischen** Systems.

Eine ruhende Stimmgabel, welche durch einen Schlag in Schwingungen versetzt wird, verliert damit den Charakter eines unver-

änderlichen Systems: die einzelnen Punkte pendeln (vergl. Phoronomie des Punktes Figur 27) um die bisher eingenommenen Orte, die nun als ihre Ruhelagen zu bezeichnen sind.

Die Punkte der **physischen Körper** vollführen des öfteren Schwingungen, deren Gesamtheit eine **Wellen-Bewegung** darstellt.

Solchen Wellen entsprechen unsere Schall- und unsere Licht-Empfindungen.

Auf einem schwach gespannten Seile pflanzt sich eine Welle fort, wenn dasselbe durch einen Schlag bewegt wird.

Zur Demonstration der verschiedenen Wellen dienen Zootrop und Wellen-Maschine.

Der **einfachste Fall** eines elastischen Systems wird durch eine **grade Punkt-Reihe** P_1, P_2 . . . . P_n dargestellt, deren einzelne Individuen Schwingungen ausführen.

Eine gespannte Saite, welche an einer bestimmten Stelle gezupft wird, kann zur Veranschaulichung derartiger Bewegungen dienen: die einzelnen Punkte der Saite schwingen senkrecht zu der Graden, welche die Achse der ruhenden Saite bildet.

Wenn die **Bewegung jedes Punktes** der Reihe als die **Wiederholung der Bewegung eines bestimmten Punktes** erscheint, so sollen die **Schwingungen** der einzelnen Punkte **konform** genannt werden.

Dabei können die Bahnen der einzelnen Punkte, welche einander kongruent sind, durch Translationen in einander übergeführt werden.

In einem bestimmten Zeit-Momente werden die einzelnen Punkte im allgemeinen nicht in entsprechenden Punkten ihrer bezüglichen Bahnen sein.

Bei **gradlinigen Schwingungen** der einzelnen Punkte hat der **Winkel** zwischen der Bahn eines Punktes und der Punkt-Reihe eine gewisse Bedeutung: bei **konformen** Schwingungen, welche hier stets vorausgesetzt werden sollen, ist dieser **Winkel** für alle Punkte der Reihe **konstant.**

Da sich die verschiedensten Schwingungen aus gradlinigen Schwingungen zusammensetzen lassen, so hat ein solcher Winkel eine sehr weitgehende Bedeutung.

Unter allen **Werten dieses Winkels** nehmen **0°** und **90°** eine hervorragende Stellung ein: man spricht im ersten Falle von **longitudinalen** und im zweiten Falle von **transversalen** Schwingungen.

Analoge Bezeichnungen gelten für die Wellen, welche den Schwingungen der einzelnen Punkte entsprechen: bei **longitudinalen Wellen** finden die Schwingungen in der Graden statt, welche die ruhende Punkt-Reihe aufnimmt, bei transversalen Wellen finden

die Schwingungen normal zu der Graden statt, welche die ruhende Punkt-Reihe aufnimmt.

Ein ziemlich getreues Bild einer transversalen Wellen-Bewegung liefern Wellen, welche auf einem gespannten Seile durch Erschütterung eines kleinen Bereiches (Anschlagen oder Zupfen) erregt werden: die einzelnen Teilchen schwingen senkrecht zur ursprünglich gegebenen Achse des Seiles.

Ein angenähertes Bild einer longitudinalen Wellen-Bewegung liefern Wellen, welche in einem ruhenden Kornfelde durch einen darüber streichenden Windstofs erregt werden: die einzelnen Ähren-köpfe pendeln um einen (tief unten gelegenen) Punkt des Halmes und zwar nahezu parallel zur Richtung des Windes.

Es mag bemerkt werden, dafs unsere Schall-Empfindungen longitudinalen und dafs unsere Licht-Empfindungen transversalen Wellen entsprechen.

Bei der **Wellen-Bewegung** einer Punkt-Reihe $P_1, P_2 \ldots P_n$ gehen nicht alle Punkte gleichzeitig durch ihre bezüglichen Ruhelagen.

Wenn die Bewegung den Punkt P_1 zur Zeit $[t_1]$ erreicht, so verlassen die Punkte $P_2, P_3, P_4 \ldots\ldots\ldots$ ihre bezüglichen Ruhelagen der Reihe nach später als P_1, d. h. man hat

$$t_1 < t_2 < \ldots\ldots t_n.$$

Ein Gesetz, welches den Durchgang der einzelnen Punkte durch ihre bezüglichen Ruhelagen regelt, charakterisiert eine bestimmte Wellen-Bewegung, d. h. es unterscheidet dieselbe von anderen Wellen-Bewegungen, für welche andere Gesetze gelten.

Wenn man für eine Reihe von Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ die Zeit-Punkte $[t_1], [t_2] \ldots\ldots [t_n]$ bestimmt, in welchen dieselben **nach** einander durch ihre bezüglichen Ruhelagen gehen, so stellen die Quotienten

$$\frac{P_2 P_1}{t_2 - t_1}, \frac{P_3 P_2}{t_3 - t_2} \ldots\ldots \frac{P_n P_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

gewisse mittlere Geschwindigkeiten dar.

Wenn man sich vorstellt, die Wellen-Bewegung habe die Zeitdauern $t_2 - t_1, t_3 - t_2 \ldots\ldots t_n - t_{n-1}$ gebraucht, um beziehungsweise von P_1 nach P_2, von P_2 nach $P_3 \ldots\ldots$ von P_{n-1} nach P_n zu gelangen, so kann man die Quotienten

$$\frac{P_2 P_1}{t_2 - t_1}, \frac{P_3 P_2}{t_3 - t_2} \ldots\ldots \frac{P_n P_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

als mittlere Geschwindigkeiten der Wellen-Bewegung für die Strecken $P_1 P_2, P_2 P_3 \ldots\ldots P_n P_{n-1}$ einführen.

Unter einer **regulären Welle** einer graden Punkt-Reihe, deren Elemente sich konform bewegen, soll eine Welle aus **gleichmäfsigen Schwingungen auf graden Linien** verstanden werden, welche sich mit **konstanter Geschwindigkeit** fortpflanzt.

Gewisse Licht-Bewegungen, z. B. in Krystallen des regulären

Systems (im Steinsalz), stellen in grofser Annäherung solche reguläre Wellen dar.

Um einen **Rechnungs-Ausdruck** für eine **reguläre Welle** der oben charakterisierten Art aufzustellen, geht man von der Formel aus, welche in der Phoronomie des Punktes (S. 238) für die Verschiebung (x) bei gleichmäfsigen Schwingungen aufgestellt wurde.

Dort war gefunden worden:

$$x = r \, . \cos\left(2\,\pi \, . \frac{t}{T}\right).$$

Den Zeit-Momenten $t = o, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3\,T}{4}, T$ entsprechen beziehungsweise die Verschiebungen $x = +r, o, -r, o, +r$, so dafs der schwingende Punkt bei Beginn seiner Bewegung ($t = o$) die gröfste Entfernung (r) aus der Ruhelage hat.

Soll die Bewegung aus der Ruhelage beginnen, so hat man z. B. $t' + \frac{3\,T}{4} = t$ zu setzen: es ist dann

$$x' = r \, . \cos 2\,\pi \left(\frac{t'}{T} + \frac{3}{4}\right) = r \, . \sin\left(2\,\pi \, . \frac{t'}{T}\right).$$

Den Zeit-Momenten $t = o, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3\,T}{4}, T$ entsprechen beziehungsweise die Verschiebungen $x = o, +r, o, -r, o$, so dafs der schwingende Punkt bei Beginn seiner Bewegung ($t = o$) sich in der Ruhelage befindet.

Man nennt r die ***Amplitude*** *der Schwingung, während man den Winkel, dessen Sinus oder Cosinus in Frage kommt, als* ***Phasen-Winkel*** *bezeichnet.*

Wenn nun die Punkte $P_1, P_2 \ldots . P_n$ von einem Punkte P_o, in welchem die Wellen-Bewegung anhebt, beziehungsweise die Abstände $y_1, y_2 \ldots . y_n$ haben, so verfliefst bis zu dem Momente, in dem P_i seine Bewegung beginnt, die Zeit-Dauer $\frac{y_i}{c}$, falls man die Geschwindigkeit der Wellen-Bewegung mit c bezeichnet.

Wenn also die Schwingung von P_o durch $x = r \, . \sin\left(2\,\pi \, . \frac{t}{T}\right)$ dargestellt wird, so gilt für P_i die Gleichung

$$x_i = r \, . \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_i}{c \, . \, T}\right).$$

Zwei Punkte P_k und $P_{k'}$ aus der Reihe P_i, für welche

$$y_{k'} - y_k = n\,(c \, . \, T)$$

ist, haben zu jeder Zeit [t] Verschiebungen von gleichem Werte und gleichem Sinne: man nennt **c . T** die **ganze Länge** (λ) der Welle.

Wenn im besonderen ein Punkt P_i im Zeit-Momente $[t_o]$ durch seine Ruhelage geht, so gehen alle Punkte, welche von P_i um

λ, 2λ, 3λ . . . . . entfernt sind, in demselben Zeit-Momente $[t_o]$ in demselben Sinne durch ihre bezüglichen Ruhelagen.

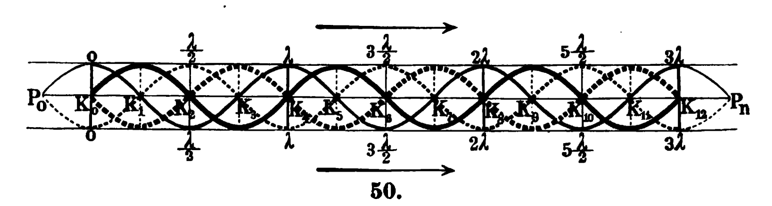
Zwei Punkte P_k und $P_{k'}$ aus der Reihe P_i, für welche

$$y_{k'} - y_k = (2n + 1) . \left(\frac{c . T}{2}\right)$$

ist, haben zu jeder Zeit [t] Verschiebungen von gleichem Werte und entgegengesetztem Sinne: man nennt $\frac{c . T}{2}$ die **halbe Länge** $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ der Welle.

Wenn im besonderen ein Punkt P_i im Zeit-Momente $[t_o]$ durch seine Ruhelage geht, so gehen alle Punkte, welche von P_i um $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$, $\frac{5\lambda}{2}$ . . . . entfernt sind, in demselben Zeit-Momente $[t_o]$ im entgegengesetzten Sinne durch ihre bezüglichen Ruhelagen.

Zerlegt man die ruhende Punkt-Reihe in Strecken von der Länge λ, so bieten die Punkte, welche ursprünglich die verschiedenen Strecken von der Länge λ bilden, in jedem Zeit-Momente dasselbe Bewegungsbild dar, während jeder Punkt alle Verschiebungen des Intervalles $-$ r . . . . . 0 . . . . + r innerhalb der Zeit-Dauer T durchläuft.



50.

Die Figur 50 stellt das Bewegungsbild einer transversalen Welle für einen bestimmten Zeit-Moment dar: die Punkte P_i schwingen senkrecht zu $P_o P_n$, während die Welle im Sinne $P_o P_n$ fortläuft.

Die vier Wellenzüge entsprechen in bestimmter Reihenfolge (stark ausgezogen, schwach ausgezogen, stark punktiert, schwach punktiert) den Zeit-Momenten o, $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$, falls angenommen wird, dafs K_o seine Bewegung zur Zeit „Null" beginnt.

Die Erhebungen der Welle pflegt man Wellen-Berge, die Senkungen der Welle pflegt man Wellen-Thäler zu nennen.

Die **Geschwindigkeit** eines gleichmäfsig schwingenden Punktes wurde (Phoronomie des Punktes, S. 238) dargestellt durch die Gleichung:

$$v = -\frac{r . 2\pi}{T} . \sin\left(2\pi . \frac{t}{T}\right).$$

Soll diese Gleichung mit der oben für x_i benuzten in Übereinstimmung gebracht werden, d. h. soll auch hier die Bewegung für t = o aus der Ruhelage beginnen, so hat man wiederum z. B. $t = t' + \frac{3\,T}{4}$ zu setzen, d. h. man gelangt zu:

$$v' = r \cdot \frac{2\,\pi}{T} \cdot \cos\left(2\,\pi \cdot \frac{t'}{T}\right).$$

Für die Geschwindigkeit v_i eines Punktes innerhalb der gegebenen Reihe ist demnach anzusetzen

$$v_i = r \cdot \frac{2\,\pi}{T} \cdot \cos 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_i}{\lambda}\right).$$

Punkte in der Entfernung λ müssen nach den oben bemerkten Geschwindigkeiten von gleichem Werte und gleichem Sinne, Punkte in der Entfernung $\frac{\lambda}{2}$ müssen nach den oben bemerkten Geschwindigkeiten von gleichem Werte und entgegengesetztem Sinne haben: die Formel für v_i genügt dieser Forderung.

Das Maximum der Geschwindigkeit ist $c = r \cdot \frac{2\,\pi}{T}$.

Die **Beschleunigung** eines gleichmäfsig schwingenden Punktes wurde (Phoronomie des Punktes, S. 239) dargestellt durch die Gleichung:

$$a = -k \cdot x.$$

Diese Gleichung ist mit der oben für x_i und v_i benutzten Gleichung im Einklang, so dafs hier $a_i = -k \cdot x_i$ zu setzen ist.

Mit wachsendem x_i nimmt die Beschleunigung a_i zu, während ihre Richtung dem Sinne (—) des wachsenden x_i entgegengesetzt ist.

Alle diese Beziehungen gelten im Speciellen für transversale und für longitudinale Wellen: im ersten Falle stehen x_i und y auf einander senkrecht, im zweiten Falle sind x_i und y_i gleichgerichtet.

§. 2. Die Komposition regulärer Wellen von gleicher Länge und gleicher Geschwindigkeit.

Wenn dieselbe Punkt-Reihe gleichzeitig **zwei** Wellen-Bewegungen unterworfen wird, so setzen sich die beiden Bewegungen zu einer dritten zusammen.

1.

Die Betrachtung soll zunächst für zwei Wellen-Bewegungen durchgeführt werden, deren Schwingungen **gleichgerichtet** sind: die Wellen, welche in demselben (A) oder in entgegengesetztem (B) Sinne fortlaufen können, möge übereinstimmen in c und T, also auch in λ.

Die Amplituden der Bewegung dürfen der obigen Festsetzung gemäfs verschieden angenommen werden.

Die erste Bewegung mag zur Zeit $t = 0$ in P_1 beginnen und durch

$$x^{(1)}_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$$

dargestellt werden, die zweite Bewegung mag zur Zeit $t = 0$ in P_2 beginnen und durch

$$x^{(2)}_i = r_2 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(2)}_i}{\lambda}\right)$$

dargestellt werden.

Bezeichnet man $P_1 P_2$ durch e, so hat man bei gleicher Fortpflanzungs-Richtung (A) der beiden Wellen

$$P_1 P_2 + P_2 P_i = P_1 P_i, \text{ d. h. } e + y^{(2)}_i = y^{(1)}_i,$$

bei entgegengesetzter (B) Fortpflanzungs-Richtung der beiden Wellen

$$P_1 P_i + P_i P_2 = P_1 P_2, \text{ d. h. } y^{(1)}_i + y^{(2)}_i = e$$

anzusetzen.

Die Gesamt-Verschiebung x_i des Punktes P_i ist in jedem Falle durch $x^{(1)}_i + x^{(2)}_i$ gegeben.

I. A. Im ersten Falle ist:

$$x_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) + r_2 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right)$$

$$= \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) . \left\{r_1 + r_2 \,.\, \cos \frac{2\pi e}{\lambda}\right\}$$

$$+ \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) . \left\{r_2 \,.\, \sin \frac{2\pi e}{\lambda}\right\}.$$

Die Substitutionen

$$R \,.\, \cos \frac{2\pi d}{\lambda} = r_1 + r_2 \,.\, \cos \frac{2\pi e}{\lambda} \text{ und}$$

$$R \,.\, \sin \frac{2\pi d}{\lambda} = r_2 \,.\, \sin \frac{2\pi e}{\lambda}$$

führen zu:

$$x_i = R \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda} + \frac{d}{\lambda}\right).$$

Man gelangt hier zu einer Wellen-Bewegung von der Amplitude R, welche zu einer andern Zeit (Phase) beginnt als die komponierenden Bewegungen aus P_1 und P_2, welche, wie man zu sagen pflegt, ihre Amplitude und ihre Phase geändert hat.

Man hat:

$$R^2 = r^2_1 + r^2_2 - 2\, r_1\, r_2 \cos 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\lambda}\right) \text{ und}$$

$$\sin \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{r_2}{R} \,.\, \sin \frac{2\pi e}{\lambda}.$$

Die Änderung der Phase gegen die erste Bewegung wird durch $+ \frac{d}{\lambda}$ dargestellt, während die Änderung der Phase gegen die zweite Bewegung durch $+ \frac{d - e}{\lambda}$ dargestellt wird.

Würde man die zweite Bewegung, für welche eine Änderung d' gilt, in den Formeln bevorzugen, so würde man zu einer Formel für $\sin \frac{2\pi d'}{\lambda}$ *gelangen.*

Trägt man r_1 und r_2 unter einen Winkel $\frac{2\pi e}{\lambda}$ an einander, so stellt die geometrische Summe von r_1 und r_2 die Gröfse R dar, welche mit r_1 den Winkel $\frac{2\pi d}{\lambda}$ und mit r_2 den Winkel $\frac{2\pi d'}{\lambda}$ bildet. Diese Konstruktion heifst das Fresnelsche Paralellogramm.

Die Gröfse R hängt wesentlich von e ab.

Für $e = n . \lambda$ ist $R = r_1 + r_2$, für $e = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ ist $R = r_1 - r_2$.

Wenn die beiden Bewegungen in den Amplituden übereinstimmen, so ist im ersten Falle $R = 2r$, während im zweiten Falle $R = 0$ ist.

Wenn also hier zwei konforme Wellen in Punkten beginnen, welche um $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots$ aus einander liegen, so bleibt die ganze Punktreihe in Ruhe. Interferenz.

I. B. Im zweiten Falle ist:

$$x_i = r_1 . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) + r_2 . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e - y^{(1)}_i}{\lambda}\right).$$

Wenn $r_1 = r_2 = r$ ist, so vereinfacht sich diese Formel zu:

$$x_i = 2r . \cos \pi \left(\frac{2 y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right) . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{2\lambda}\right).$$

Hier resultiert für P_i eine Bewegung von der Amplitude

$$R_i = 2r . \cos \pi \left(\frac{2 y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right),$$

d. h. die **einzelnen** Punkte schwingen mit **verschiedenen** Amplituden.

Für $\frac{2 y^{(1)}_i - e}{\lambda} = \frac{2n + 1}{2}$ wird x_i zu **jeder** Zeit Null sein, d. h. alle Punkte P_i, für welche $y^{(1)}_i = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{e}{2}$ ist, bleiben stets in Ruhe: diese ruhenden Punkte werden **Knotenpunkte** oder Knoten genannt.

Die einzelnen Knoten bilden eine Reihe, deren Lage durch $\frac{e}{2} + \frac{\lambda}{4}, \frac{e}{2} + \frac{3\lambda}{4}, \frac{e}{2} + \frac{5\lambda}{4} \ldots$ bestimmt wird, d. h. in Abständen von halben Wellenlängen liegen Punkte, welche an der Bewegung nicht teilnehmen.

Für $\frac{2 y^{(1)}_i - e}{\lambda} = \frac{2n}{2}$ wird x_i ein Maximum, d. h. alle

Punkte, für welche $y^{(1)}{}_i = 2\ n\ .\ \frac{\lambda}{4} + \frac{e}{2}$ ist, schwingen mit möglichst grofsen Amplituden: diese Maximal-Punkte werden **Bauchpunkte** oder Bäuche genannt.

Die einzelnen Bäuche bilden eine Reihe, deren Lage durch $\frac{e}{2}$, $\frac{e}{2} + \frac{2\ \lambda}{4}$, $\frac{e}{2} + \frac{4\ \lambda}{4}$, ... bestimmt wird, d. h. in Abständen von halben Wellenlängen liegen Punkte, welche Maximal-Amplituden haben.

Die Mitte von P_1 und P_2 kann als Centrum der ganzen Bewegung angesehen werden.

Der zweite Faktor sin $2\ \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{2\ \lambda}\right)$ ist von $y^{(1)}{}_i$ unabhängig, d. h. alle Punkte befinden sich zu derselben Zeit in gleicher oder in entgegengesetzter Bewegungs-Phase.

Zur Zeit $t = \frac{T}{2}\left(n + \frac{e}{\lambda}\right)$ ist die Verschiebung x_i für alle Punkte Null, d. h. sie liegen hier alle auf der ursprünglich gegebenen Graden.

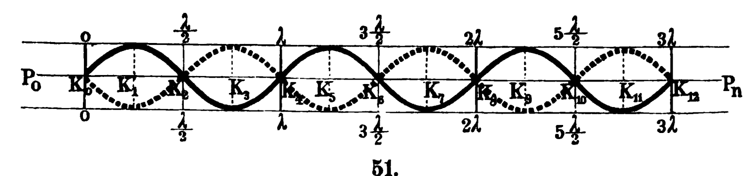
Man spricht in diesem Falle (I. B.) von **stehenden Wellen,** weil die Punktreihe in lauter Teile zerfällt, welche konform schwingen: die Länge eines solchen Teiles beträgt $\frac{\lambda}{2}$.

Die Erzeugung stehender Wellen ist für Messungen von λ von hoher Wichtigkeit.

Wird z. B. eine Glasröhre, deren innere Wandungen leicht mit Lycopodium eingestäubt ist, durch Reiben mit einem leinenen Lappen (Handtuch) in longitudinale Schwingungen versetzt, so folgt das Lycopodium der Bewegung und markiert die Knoten und Bäuche der Wellen, so dafs man $\frac{\lambda}{2}$ direkt messen kann. Kundtsche Staubfiguren.

Bei der stehenden Transversal-Welle, die durch Figur 51 dargestellt wird, sind die Knoten durch K_0, K_2, K_4 . . . . . und die Bäuche durch K_1, K_3, K_5 . . . . . bezeichnet worden:

Die Abstände $K_0\ K_2$, $K_2\ K_4$ . . . . und $K_1\ K_3$, $K_3\ K_5$ . . . . haben die Gröfse $\frac{\lambda}{2}$, wenn die zusammentretenden Wellen die Länge λ haben.



51.

Die ganze Bewegung setzt sich aus den konformen Teil-Bewe-

gungen der Stücke $K_0 K_2$, $K_2 K_4$, ... zusammen, welche gleichzeitig senkrecht zu $P_0 P_n$ ihre Schwingungen vollführen.

2.

Wenn nun die Schwingungen zweier Wellen **nicht gleichgerichtet** sind, so tritt in jedem Punkte P_i eine Verschiebung ρ_i ein, welche aus den gegebenen Verschiebungen durch geometrische Addition (Parallelogramm) herzuleiten ist.

Hier sollte sich P_i gleichzeitig auf zwei Graden I_1 und I_2 bewegen, welche einen bestimmten Winkel φ einschliefsen.

Für die beiden Graden mag wiederum beziehungsweise

$$x^{(1)}_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) \text{ und}$$

$$x^{(2)}_i = r_2 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(2)}_i}{\lambda}\right)$$

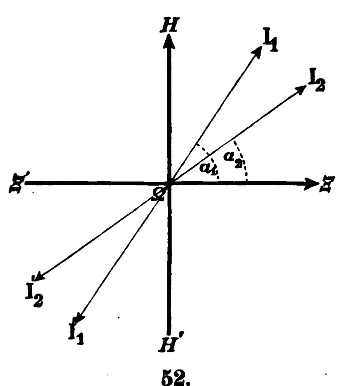
gelten.

Wenn die beiden Wellen in **gleichem Sinne** ($P_1 P_2$) fortschreiten, wie hier ein für alle Mal angenommen werden soll, so ist wiederum $y^{(1)}_i = e + y^{(2)}_i$, d. h. man hat

$$x^{(2)}_i = r_2 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right)$$

zu setzen.

Führt man ein orthogonales Kreuz $H\Omega\Xi$ ein, mit dessen Achse $\Omega\Xi$ durch I_1 und I_2 beziehungsweise die Winkel α_1 und α_2 gebildet werden, so ist (Figur 52) $\alpha_1 - \alpha_2 = \varphi$; die Achse $P_1 P_2$, welche durch Ω geht, tritt im allgemeinen aus der Ebene der Zeichnung heraus, während P_i vor Beginn der Bewegung mit Ω zusammenfällt.



52.

Die Verschiebungen $x^{(1)}_i$ und $x^{(2)}_i$ kann man nach diesen Achsen beziehungsweise in zwei Komponenten-Paare $\xi^{(1)}_i$ und $\eta^{(1)}_i$ und $\xi^{(2)}_i$ und $\eta^{(2)}_i$ zerlegen, so dafs auf $\Xi\Omega\Xi'$ die Verschiebung $\xi^{(1)}_i + \xi^{(2)}_i$ und auf $H\Omega H'$ die Verschiebung $\eta^{(1)}_i + \eta^{(2)}_i$ in Rechnung zu bringen ist.

Man hat:

$$\xi_i = \xi^{(1)}_i + \xi^{(2)}_i = r_1 \,.\, \cos\alpha_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$$

$$+ r_2 \,.\, \cos\alpha_2 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right)$$

$$\eta_i = \eta^{(1)}_i + \eta^{(2)}_i = r_1 \,.\, \sin\alpha_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$$

$$+ r_2 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right).$$

Nach dem oben Gegebenen erhalten ξ_i und η_i beziehungsweise die Formen

$$\xi_i = A_i \,.\, \sin\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - a_i}{\lambda}\right)$$

$$\eta_i = B_i \,.\, \sin\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - b_i}{\lambda}\right).$$

Setzt man $a_i - b_i = d$, so führt die Entwicklung zu der diophantischen Gleichung

$$\left(\frac{\xi_i}{A_i}\right)^2 + \left(\frac{\eta_i}{B_i}\right)^2 - 2\,\frac{\xi_i}{A_i}\cdot\frac{\eta_i}{B_i}\cdot\cos\frac{2\,\pi\,d}{\lambda} = \sin^2\frac{2\,\pi\,d}{\lambda}.$$

Innerhalb der durch I_1 und I_2 gelegten Ebene durchläuft also P_i eine **Kurve**, deren Gleichung im Koordinaten - System (ξ, η) vom **zweiten Grade** ist, die sich also im allgemeinen als ein Kegelschnitt und zwar als Ellipse darstellt.

Hier treten **elliptische Schwingungen** ein [1]).

Die Gröfse und Lage dieser Ellipse, deren Centrum die ursprüngliche Ruhelage (Ω) von P_i ist, hängt von A_i und B_i und von d, d. h. von r_1 und r_2 und e und aufserdem von $\alpha_1 - \alpha_2 = \varphi$ ab.

Bei **physischen** Bewegungen stehen die **Schwingungs-Richtungen** des öfteren auf einander **senkrecht**.

In diesem Falle, wo $\varphi = 90^0$ ist, kann man das Achsenkreuz unmittelbar mit I_1 und I_2 zusammenfallen lassen.

Setzt man hier

$$\xi_i = r_1 \,.\, \sin 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right),$$

$$\eta_i = r_2 \,.\, \sin 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i - e}{\lambda}\right),$$

so gelangt man zu der diophantischen Gleichung

$$\left(\frac{\xi_i}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta_i}{r_2}\right)^2 - 2\,\frac{\xi_i}{r_1}\,.\,\frac{\eta_i}{r_2}\,.\cos\frac{2\,\pi\,e}{\lambda} = \sin^2\frac{2\,\pi\,e}{\lambda}.$$

Da hier ξ_i und η_i auf einander senkrecht stehn, so folgt bei geometrischer Addition für die Gesamtverschiebung

$$\rho_i = \sqrt{\xi^2_i + \eta^2_i}.$$

Der radius vector Ω P_i bildet mit Ω Ξ einen Winkel j, welcher sich durch $\tang j = \frac{\eta_i}{\xi_i}$ bestimmt.

Wenn $\varphi \lesseqgtr 90^0$ ist, so müssen A_i, B_i und d wirklich dargestellt werden, was allerdings eine längere Rechnung erfordert, ohne jedoch theoretische Schwierigkeiten zu bereiten.

---

1) **Da die Kurve geschlossen ist, so gelangt man zu einer Ellipse. Die Erkenntnis der schon früher (Seite 240 und Seite 266) behandelten elliptischen Schwingungen erhält hier eine Erweiterung, welche mit dem Seite 236 etc. Gegebenen genau korrespondiert.**

Nachdem die genannten Gröfsen festgestellt sind, gelten alle im Specialfall ($\varphi = 90^0$) für r_1, r_2 und e gemachten Schlüsse mittelbar für A_i, B_i und d.

Für den Fall, dafs $\varphi = 90^0$ ist, gilt Folgendes:

A. Wenn $\pm \frac{2\pi e}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ ist, d. h. wenn $\pm$ e die Werte $0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \ldots$ hat, so reduciert sich die Gleichung der Ellipse auf

$$\left(\frac{\xi_i}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta_i}{r_2}\right)^2 \mp 2\frac{\xi_i}{r_1} \cdot \frac{\eta_i}{r_2} = 0, \text{ d. h. auf } \left(\frac{\xi_i}{r_1} \mp \frac{\eta_i}{r_2}\right)^2 = 0.$$

Beträgt e eine **grade Anzahl halber Wellenlängen**, so ist statt der Ellipse

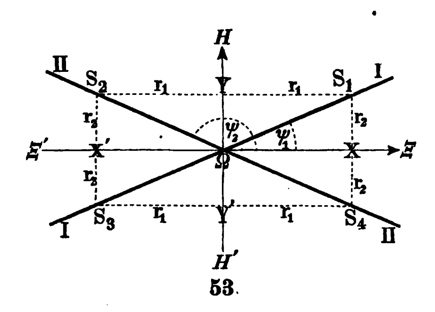
$$\frac{\xi_i}{r_1} = \frac{\eta_i}{r_2} = 0, \text{ d. h. } \frac{\xi_i}{\eta_i} = \frac{r_1}{r_2}$$

zu setzen: die Bahn (I) ist eine **Grade**, welche durch die Winkelräume $\Xi\Omega H$ und $\Xi'\Omega H'$ geht und diese in ein bestimmtes Verhältnis $\left(\text{gegeben durch } \frac{r_1}{r_2}\right)$ teilt.

Beträgt e eine **ungrade Anzahl halber Wellenlängen**, so ist statt der Ellipse

$$\frac{\xi_i}{r_1} + \frac{\eta_i}{r_2} = 0, \text{ d. h. } \frac{\xi_i}{\eta_i} = -\frac{r_1}{r_2}$$

zu setzen: die Bahn (II) ist eine Grade, welche durch die Winkelräume $\Xi'\Omega H$ und $\Xi\Omega H'$ geht und diese in ein bestimmtes Verhältnis $\left(\text{gegeben durch } \frac{r_1}{r_2}\right)$ teilt.



53.

Im ersten Falle (I) sollte (Figur 53) P_i gleichzeitig in X und Y beziehungsweise in X' und Y' sein, im zweiten Falle (II) sollte P_i gleichzeitig in X' und Y beziehungsweise in X und Y' sein.

Die Amplitude (ΩS_i) der resultierenden Bewegung ist in beiden Fällen gegeben durch $\sqrt{r^2_1 + r^2_2}$, während die Lage von I und II beziehungsweise durch $tang\,\psi_1 = \frac{r_2}{r_1}$ und $tang\,\psi_2 = -\frac{r_2}{r_1}$ gegeben ist.

Bezeichnet man $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$ mit ω, so ist hier für I und II beziehungsweise $\xi_i = r_1 . sin\,\omega$, $\eta_i = r_2 . sin\,\omega$ und $\xi_i = r_1 . sin\,\omega$, $\eta_i = -r_2 . sin\,\omega$ zu setzen, so dafs stets $\rho_i = \sqrt{r^2_1 + r^2_2} . sin\,\omega$ resultiert.

B. Wenn $\pm \frac{2\pi e}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$ ist, d. h. wenn $\pm$ e die Werte $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$ hat, so reduciert sich die Gleichung auf

$$\left(\frac{\xi_i}{A_i}\right)^2 + \left(\frac{\eta_i}{B}\right)^2 = 1.$$

Hier hat die **Ellipse**, welche als Bahn von P_i resultiert, die **Achsen** $\Omega\Xi$ und ΩH.

Für $e = \ldots\ldots - \frac{7\lambda}{4}, - \frac{3\lambda}{4}, + \frac{\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$

ist $\xi_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$ und $\eta_i = r_2 \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$.

Für $e = \ldots\ldots - \frac{5\lambda}{4}, - \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$

ist $\xi_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$ und $\eta_i = - r_2 \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$.

Setzt man wiederum $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) = \omega$, so hat man für

$\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \ldots\ldots$ im ersten Falle

$(\xi_i, \eta_i) = (+r_1, 0), (0, -r_2), (-r_1, 0), (0, +r_2) \ldots\ldots$

und im zweiten Falle

$(\xi_i, \eta_i) = (+r_1, 0), (0, +r_2), (-r_1, 0), (0, -r_2)$,

d. h. im **ersten** Falle, wo

$e = \ldots\ldots - \frac{7\lambda}{4}, - \frac{3\lambda}{4}, + \frac{\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$

ist, wird die **Ellipse im Sinne eines Uhrzeigers** und im **zweiten** Falle, wo

$e = \ldots\ldots - \frac{5\lambda}{4}, - \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$

ist, wird die **Ellipse umgekehrt zu dem Sinne eines Uhrzeigers** durchlaufen.

Da ξ_i und η_i von $y^{(1)}_i$ abhängen, so befinden sich bei konformer Bewegung aller Punkte P_i, welche wir stets voraussetzen, die einzelnen Punkte P_i nicht an entsprechenden Punkten ihrer Bahn-Ellipsen.

Wenn I_1 und I_2 in ihrer Lage zwei Transversal-Wellen entsprechen, so bildet die Gesamtheit aller elliptischen Bahnen einen Cylinder, dessen Achse durch die ruhende Punktreihe $P_1 \ldots\ldots P_n$ bestimmt wird.

Die Achse des Cylinders $Z\Omega Z'$ bildet hier mit den Achsen $\Xi_i \Omega_i \Xi'_i$ und $H_i \Omega_i H'_i$ ein orthogonales Kreuz.

Denkt man durch alle Punkte P_i entsprechende Koordinaten-Ebenen gelegt, so daſs man innerhalb jeder dieser Ebenen den Winkel (φ_i) von ρ_i gegen die Achsen $\Omega\,\Xi_i$ und $\Omega\,H_i$ bestimmen kann, so ist stets

$$\xi_i = \rho_i \, . \, \cos \varphi_i \text{ und } \eta_i = \rho_i \, . \, \sin \varphi_i$$

zu setzen, d. h. man hat

$$\operatorname{tang} \varphi_i = \frac{\eta_i}{\xi_i} = \pm \frac{r_1}{r_2} \, . \, \operatorname{tang} 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right).$$

In einem bestimmten Zeit-Moment (t = constans) haben je zwei Punkte P_i und P'_i, welche um eine Wellenlänge

$$\left(\pm \frac{y^{(1)'}_i - y^{(1)}_i}{\lambda} = 1\right)$$

von einander abstehen, entsprechende Stellung, während φ_i dazwischen das Intervall $\varphi_i \ldots\ldots \varphi_i + 2\pi$ einmal durchläuft: die Punkte P_i befinden sich in jedem Zeit-Momente auf einer Schraubenlinie von der Ganghöhe λ.

Da jeder Punkt ($y^{(1)}_i$ = constans) innerhalb der Zeit-Dauer T eine Ellipse in Übereinstimmung oder im Gegensatz zur Uhrzeiger-Bewegung durchläuft, so dreht sich die Schraube in analoger Weise, während der Zeit-Dauer T einmal um und zwar um einen vollen Schrauben-Gang.

Es verdient bemerkt zu werden, daſs innerhalb eines Intervalles (λ) der absolute Betrag von tang φ_i und demnach auch der von φ_i selbst für konstantes t mit wachsendem $y^{(1)}_i$ abnimmt, daſs sich die Schraube also im entgegengesetzten Sinne zu ihrer Drehung windet.

Bei physischen Bewegungen ist des öftern $r_1 = r_2 = r$ zu setzen, so daſs die Gleichung der Ellipse in

$$\xi^2_i + \eta^2_i = r^2$$

übergeht, falls $\pm e = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots\ldots$ ist.

Unter diesen Umständen ist die Bahn eines Punktes P_i ein Kreis.

Solche Bewegungen, bei denen bei transversalen Wellenzügen statt der Schraubenlinie auf dem elliptischen Cylinder eine gewöhnliche Schraubenlinie auftritt, sind vorhanden, wenn Lichtstrahlen in bestimmter Weise durch gewisse Krystallplatten hindurchgehn: man spricht hier im Gegensatze zu gradlinig polarisiertem und elliptisch polarisiertem Lichte von cirkular polarisiertem Lichte.

Damit sind die Mittel für die **Komposition zweier regulärer Wellen** (von gleicher Länge und gleicher Geschwindigkeit) **innerhalb einer graden Punktreihe** gegeben: man gelangt im allgemeinen zu **ebenen** (elliptischen) und im besonderen zu **gradlinigen** Schwingungen.

Die Vereinigung zweier longitudinalen Wellen wird durch die sub I gegebene Betrachtung dargestellt, während die Vereinigung zweier transversalen oder einer longitudinalen und einer transversalen Welle den sub II gegebenen Entwicklungen entspricht: im ersten Falle finden die Schwingungen in einer Ebene statt, welche die ursprünglich gegebene Punktreihe in sich aufnimmt, im zweiten Falle finden die Schwingungen in einer Ebene statt,

welche die ursprünglich gegebene Punktreihe unter rechtem Winkel schneidet.

Bei anderer Lage der Schwingungs-Ebene kann keine Komposition der oben bezeichneten Art stattgefunden haben.

Bei der **Vereinignng von n Wellen** (n > 2) treten im allgemeinen **keine ebenen Schwingungen** ein.

Die Verschiebungen von P_i lassen sich stets nach drei Achsen zerlegen, so daſs z. B. immer eine longitudinale und zwei transversale Gesamt-Komponenten entstehen können.

Die Vereinigung von n **gleichlaufenden Wellen von gleicher Schwingungs-Richtung** führt stets zu **einer** Bewegung derselben Art zurück.

Nur auf den Fall I. A. läſst sich der oft benutzte Satz anwenden: Wenn zwei gleichartige Bewegungen eine Bewegung derselben Art liefern, so lassen sich auch beliebig viele (je zwei) Bewegungen derselben Art zu einer gleichgearteten Bewegung zusammensetzen.

Zur Demonstration der Vereinigung der hier besprochenen Schwingungen bedient man sich eines federnden Stabes von quadratischem Querschnitt.

Klemmt man einen solchen Stab an dem einen Ende ein, so daſs seine Längs-Achse vertikal steht, so schwingt der Diagonalpunkt der oberen quadratischen Stirnfläche bei einem Anstoſs in Richtung der einen oder der andern Mittellinie des Quadrates innerhalb derselben Zeit (T) einmal hin und her, während die Amplitude der Schwingung von der Stärke des Anstoſses abhängt.

Man giebt dem Stabe zunächst einen Stoſs in Richtung der einen Mittellinie und läſst den einen Stoſs in Richtung der andern Mittellinie folgen: je nach den inzwischen verflossenen Zeiten treten elliptische, kreisförmige oder gradlinige Schwingungen des Diagonalpunktes ein.

Man macht den Diagonalpunkt durch eine kleine spiegelnde Metallfläche, die nach oben konvex gekrümmt ist oder durch eine kleine mit Quecksilber ausgefüllte Vertiefung für das Auge kenntlich.

Derartige Stäbe sind zuerst von Wheatstone[1]) konstruiert worden, während später von Lippich[2]) und Melde[3]) fast gleichzeitig statt dessen federnde Metallstreifen angewandt wurden.

---

1) Quaterly Journal of science etc., Neue Folge Nr. 11.

2) Sitzungsbericht der Wiener Akademie, Bd. XLV und Poggendorff Annalen, Bd. CXVII.

3) Poggendorff, Annalen, Bd. CXV.

§. 3. Komposition regulärer Wellen von gleicher Geschwindigkeit.

Die Gleichung $c \,.\, T = \lambda$ führt für zwei verschiedene Wellen zu der Proportion

$$\frac{c_1 \,.\, T_1}{c_2 \,.\, T_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Wenn $c_1 = c_2$ ist, so resultiert $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, d. h. für reguläre Wellen von gleicher Geschwindigkeit verhalten sich die Schwingungs-Perioden (T) der bezüglichen Punktreihen wie die Wellenlängen.

In der Physik sind des öftern Wellen einer Punktreihe zu betrachten, welche bei verschiedenen λ erfahrungsmäfsig dasselbe c haben, so dafs c hier eine Konstante darstellt, welche nicht von der Form der Bewegung, sondern allein von der Beschaffenheit des Materials abhängt.

I. Die **Schwingungs-Richtungen** der beiden Wellen seien **gleichgerichtet.**

Hier wird die Gesamt-Verschiebung (x_i) eines Punktes P_i gegeben durch $x_i = x^{(1)}_i + x^{(2)}_i$, d. h. durch

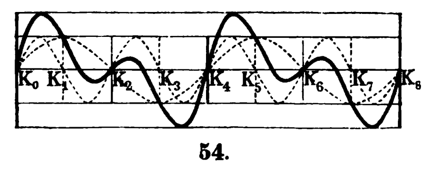
$$x_i = r_1 \,.\, \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda_1}\right) + r_2 \,.\, \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{y^{(2)}_i}{\lambda_2}\right).$$

Da sich die Gröfse x_i hier nicht als

$$R \,.\, \sin 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_i}{\lambda}\right)$$

darstellen läfst, so gelangt man nicht zu gleichmäfsigen Schwingungen, d. h. P_i bewegt sich hier zu beiden Seiten der Ruhelage nicht in analoger Weise.

Eine solche Bewegung stellt man dar, indem man die Wellen aus P_1 und P_2 zeichnet und für jeden Punkt P_i die beiden Verschiebungen algebraisch vereinigt.



54.

Für zwei transversale Wellen, bei denen $\lambda_1 : \lambda_2 = T_1 : T_2 = 1 : 2$ ist, gewinnt man, falls beide Bewegungen von demselben Punkte $(y^{(1)}_i = y^{(2)}_i)$ ausgehen, das nebenstehende Bild (Figur 54), für dessen Konstruktion $r_1 = r_2$ gesetzt wurde.

Die Betrachtung läfst sich hier leicht auf beliebig viele Wellenzüge ausdehnen.

II. Die **Schwingungs-Richtungen** der beiden Wellen seien **nicht gleichgerichtet.**

Hier wird die Gesamt-Verschiebung (x_i) eines Punktes P_i durch geometrische Addition von $x^{(1)}_i$ und $x^{(2)}_i$ gegeben: Die einzelnen Punkte $P_1, P_2, \ldots . P_n$ beschreiben innerhalb eines bestimmten

Zeitteiles von beliebiger Gröfse im allgemeinen verschiedene Kurven, während aufserdem die Bewegungen, welche einen bestimmten Punkt P_i innerhalb verschiedener Zeitteile ausführt, im allgemeinen niemals konform sind.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse diene die Betrachtung des folgenden Specialfalles: Die Bewegungen mögen gleichzeitig im Punkte P_0 beginnen und normale Schwingungs-Richtungen und gleiche Amplituden haben.

Wenn nun T_1 und T_2 relativ wenig differieren, so kann man $T_1 = T_2 + \varepsilon$ setzen, falls man durch ε eine relativ kleine Gröfse bezeichnet.

Hier wird zunächst eine gradlinige Schwingung eingeleitet, deren Richtung den Winkel der gegebenen Schwingungs-Richtungen halbiert.

Nach Ablauf der Zeit-Dauer T_2 würde P_0, falls es nur der zweiten Schwingung folgte, durch die Ruhelage gehen, während es, falls er nur der ersten Schwingung folgte, erst nach Ablauf der Zeit-Dauer $T_2 + \varepsilon$ seine Ruhelage erreichte, so dafs jetzt für einen Moment zwei Schwingungen mit geringer Phasen-Differenz (ε) vorliegen, deren Vereinigung zu einer schmalen Ellipse führen würde.

Da die Differenz der Phase mehr und mehr wächst, so entsprechen auf einander folgende Momente Ellipsen, die nach und nach in einen Kreis übergehen, auf welchem wiederum eine Reihe von Ellipsen und eine Grade folgt.

Von dieser Graden, welche die erste Schwingungs-Richtung unter rechtem Winkel schneidet, führt wiederum eine Reihe von Ellipsen mittelst Durchganges durch einen Kreis zur ersten Graden zurück.

Dabei durchläuft P_i Kurven, welche stetig veränderlich sind, so dafs man streng genommen nur von der Kurve sprechen darf, welche entstehen würde, wenn von einem bestimmten Zeit-Moment ab (d. h. wenn eine bestimmte Phasen-Differenz erreicht ist) nun $T_1 = T_2$ zu setzen wäre.

Wenn T_1 und T_2 in einem rationalen Verhältnisse stehen, wenn man z. B. $T_1 : T_2 = 201 : 200$ hat, so ist in einem bestimmten Zeitmoment für jede der Teil-Bewegungen eine ganze Anzahl von Schwingungen verflossen: hier tritt von Zeit zu Zeit eine Wiederholung der Bewegung ein.

Wenn T_1 und T_2 nicht in einem rationalen Verhältnisse stehen, wenn man z. B. $T_1 : T_2 = 201 : 66 . \pi$ hat, so ist in keinem Zeitmoment für jede der Teil-Bewegungen eine ganze Anzahl von Schwingungen verflossen: hier tritt niemals eine Wiederholung der Bewegung ein.

Im ersten Falle, wo $T_1 : T_2 = m : n$ ist, hat man nach Ablauf der Zeit $n\, T_1 = T = m\, T_2$ analoge Verhältnisse wie bei Beginn der Bewegung: die äufserst komplizierte Kurve, welche

P_i jedesmal innerhalb der Zeit T beschreibt, läfst sich aus einer Reihe von stetig veränderlichen Kurven von relativer Einfachheit zusammengesetzt denken.

Im zweiten Falle, wo das Verhältnis $T_1 : T_2$ irrational ist, wo also $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n} + \varepsilon$ zu setzen ist, treten nach Ablauf der Zeit $n\ T_1 = T = m\ T_2$ annähernd analoge Verhältnisse ein wie bei Beginn der Bewegung, ohne dafs doch eine wirkliche Wiederholung stattfindet.

Wenn T_1 den Wert $q \cdot T_2$ hat, so ist auch $\lambda_1 = q \cdot \lambda_2$ zu setzen, d. h. man hat

$$x^{(1)}_i = r_1 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda_1}\right) \text{ und}$$

$$x^{(2)}_i = r_2 \cdot \sin 2\pi q \left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(2)}_i}{\lambda_1}\right).$$

Für Wellen gleicher Richtung ist $y^{(2)}_i = y^{(1)}_i - e$, so dafs sich ergiebt:

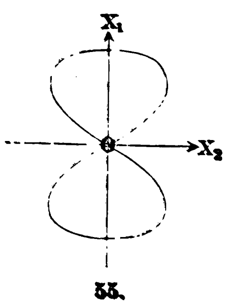
$$x^{(2)}_i = r_2 \sin 2\pi q \left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda_1}\right) \cos 2\pi \left(\frac{q\ e}{\lambda}\right)$$
$$+ r_2 \cos 2\pi q \left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{q\ e}{\lambda}\right).$$

Wenn q eine ganze Zahl ist, so läfst sich $\sin q\,\omega$ und $\cos q\,\omega$ durch $\sin\omega$ und $\cos\omega$ ausdrücken.

Setzt man $2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda_1}\right) = \omega$, so ist $\sin\omega = \frac{x^{(1)}_i}{r_1}$ und $\cos\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{x^{(1)}_i}{r_1}\right)^2}$, d. h. es läfst sich durch Entwicklung von $\sin q\,\omega$ und $\cos q\,\omega$ eine diophantische Gleichung zwischen $x^{(1)}_i$ und $x^{(2)}_i$ aufstellen, so dafs die Bahn von P_i innerhalb des Intervalls T_1 stets durch dieselben Beziehungen bestimmt wird.

Für $T_1 = 2\ T_2$, d. h. für $q = 2$ resultiert z. B.

$$x^{(2)}_i = \pm 2\ x^{(1)}_i \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^{(1)}_i}{r_1}\right)^2} \cdot \cos \frac{4\pi e}{\lambda}$$
$$+ r_2 \left[1 - 2\left(\frac{x^{(1)}_i}{r_1}\right)^2\right] \cdot \sin \frac{4\pi e}{\lambda}.$$



55.

Wenn kein Phasen-Unterschied ($e = 0$) vorhanden ist, so hat man:

$$x^{(2)}_i = \pm 2\,x^{(1)}_i \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^{(1)}_i}{r_1}\right)^2} \text{ oder}$$

$$(r_1\, x^{(2)}_i)^2 - (2\, r_2\, x^{(1)}_i)^2 \left[1 - \left(\frac{x^{(1)}_i}{r_1}\right)^2\right] = 0.$$

Bei der Komposition transversaler Schwingungen ist also die Bahn von P_i für $T_1 = T_2$ und $e = 0$ eine Kurve vierten Grades: dieselbe ist in Figur 55 für den Fall $r_1 = r_2$ dargestellt.

Für $e = \frac{\lambda}{8}$ *hat man:*

$$x^{(2)}_i = r_2 \left[1 - 2\left(\frac{x^{(1)}_i}{r_1}\right)^2\right].$$

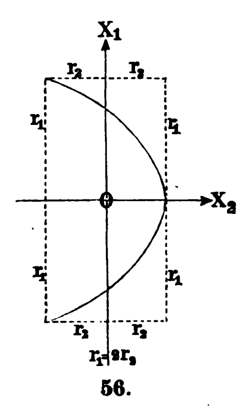
Bei der Komposition transversaler Schwingungen ist also die Bahn von P_i *für* $T_1 = 2\,T_2$ *und* $e = \frac{\lambda}{8}$ *ein Parabel-Stück.*

Man hat hier

$$x^{(1)}_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda_1}\right) \text{ und}$$

$$x^{(2)}_i = r_2 \,.\, \cos 4\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{y^{(2)}_i}{\lambda_1}\right),$$

d. h. die Werte von $x^{(1)}_i$ *und* $x^{(2)}_i$ *erreichen beziehungsweise höchstens die Gröfse* r_1 *und* r_2.



56.

Das betreffende Parabel-Stück, auf welchem P_i *hin- und herschwingt, ist in Figur 56 für den Fall* $r_1 = 2\, r_2$ *dargestellt.*

Wenn q eine Rationalzahl ist, so erscheint q als Quotient zweier ganzer Zahlen m und n; man kann hier zwei Gröfsen T und λ einführen, für welche gilt $n \,.\, T_1 = T = m \,.\, T_2$ und $n \,.\, \lambda_1 = \lambda = m \,.\, \lambda_2$.

Demnach ist

$$x^{(1)}_i = r_1 \,.\, \sin 2\pi n\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right) \text{ und}$$

$$x^{(2)}_i = r_2 \,.\, \sin 2\pi m\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(2)}_i}{\lambda}\right).$$

Für Wellen gleicher Richtung ist $y^{(2)}_i = y^{(1)}_i - e$, so dafs

$$x^{(1)}_i = r_1 \,.\, \sin n\,\omega \text{ und}$$

$$x^{(2)}_i = r_2 \,.\, \sin m\,\omega \,.\, \cos 2\pi\left(\frac{m\,e}{\lambda}\right) + r_2 \,.\, \cos m\,\omega \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{m\,e}{\lambda}\right)$$

resultiert, falls $\omega = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y^{(1)}_i}{\lambda}\right)$ gesetzt wird.

Da sich $\sin m\,\omega$, $\cos m\,\omega$ und $\sin n\,\omega$, $\cos n\,\omega$ durch $\sin\omega$, $\cos\omega$ ausdrücken lassen, so entstehen zwei Gleichungen, aus welchen mit Hülfe von $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$ die Gröfsen $\sin\omega$ und $\cos\omega$ eliminiert werden können: es resultiert eine diophantische Gleichung in $x^{(1)}_i$ und $x^{(2)}_i$, so dafs die Bahn von P_i innerhalb jedes Intervalles T durch dieselben Beziehungen dargestellt wird.

Bei der Vereinigung transversaler Schwingungen stellt die Gleichung zwischen $x^{(1)}_i$ *und* $x^{(2)}_i$ *wieder eine Kurve dar, welche mit Hülfe eines Koordinaten-Systems* $X_1\,O\,X_2$ *aufgezeichnet werden kann.*

Zur Demonstration dieser Verhältnisse (vergl. S. 301) dienen federnde Stäbe, welche sich bei einem Anstofse in bestimmter Richtung mit einer andern Schwingungsdauer bewegen, als wenn sie senkrecht zu dieser Richtung angestofsen werden.

Benutzt man einen Stab mit einem rechteckigen Querschnitt, dessen Seiten nur wenig differieren, so ist $T_1 = T_2 + \varepsilon$ zu setzen: Bei gleichzeitigem Anstofse in Richtung der beiden Mittellinien eines Querschnittes werden gradlinige Schwingungen eingeleitet, welche langsam in elliptische Schwingungen überzugehen scheinen, um dabei vorübergehend kreisförmig zu werden etc.

Bei rationalem Verhältnisse $T_1 : T_2 = m : n$ wird dabei jedesmal innerhalb der Zeit $n\,T_1 = T = m\,T_2$ eine Kurve beschrieben, welche sich scheinbar aus einzelnen Ellipsen zusammensetzt.

Zum Studium dieser Verhältnisse dient unter Anderem[1]) das Vibrations-Chronoskop von Lissajous[2]), dessen Verbesserung man Helmholtz[3]) verdankt: man betrachtet durch eine vertikal hin- und herschwingende Lupe (Objektiv des Mikroskops) einen bestimmten Punkt einer horizontal hin- und herschwingenden Stimmgabel.

Die Lupe ist an einer zweiten Stimmgabel befestigt, welche ihre Schwingungen an diese überträgt, während das Auge vor einem feststehenden Linsen-Systeme (Ocular des Mikroskops) ruht.

Als Beobachtungs-Punkt auf der ersten Stimmgabel dient die Kuppe eines Quecksilbertröpfchens oder die Spitze eines Stärkekörnchens.

Die beiden Bewegungen setzen sich zu einer Bewegung zusammen, welche für das Verhältnis $T_1 : T_2$ charakteristisch ist: in einfachen Fällen (1 : 2 oder 2 : 3 etc.) kann man aus der Gestalt der Kurve unmittelbar das Schwingungs-Verhältnis der beiden Gabeln erkennen.

Ersetzt man die horizontale Schwingungs-Bewegung (vergl. S. 236) durch eine gleichförmige Bewegung auf einem horizontalen Kreise, so kann man diesen als Normalschnitt eines (vertikal stehenden) Kreis-Cylinders auffassen, auf dessen Mantelfläche die vertikale Schwingungs-Bewegung vor sich geht. Denkt man nun den Mantel dieses Cylinders auf einer Ebene abgerollt, so läfst sich die Komposition der Bewegungen in dieser Ebene darstellen: um das wirkliche Schwingungsbild zu erhalten, hat man das ausgebreitete Mantel-Stück mit der aufgetragenen Konstruktion wiederum zu einer Cylinder-Fläche zusammengerollt zu denken.

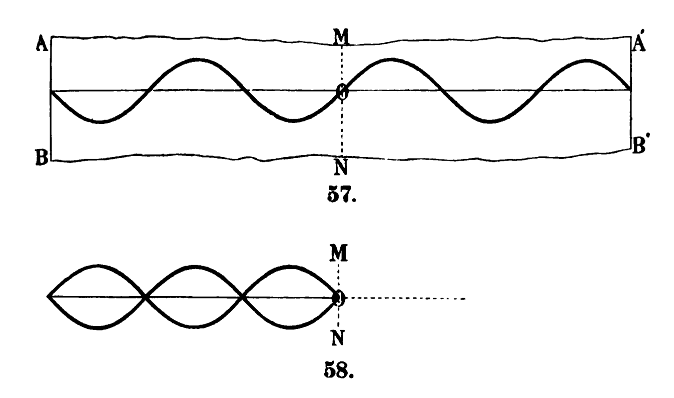
Wenn das Verhältnis $T_1 : T_2$ wiederum q ist, so kommen auf die Peripherie des Cylinder-Schnittes, welche zu einer Graden aufgerollt erscheint, eine volle Schwingung (Hin- und Hergang) der ersten Gabel und q volle Schwingungen der zweiten Gabel.

Für $q = 3$ entsprechen drei volle Schwingungen der zweiten

---

1) Z. B. das graphische Verfahren von Savart und Duhamel.
2) Lehre von den Tonempfindungen, 1863, S. 138.
3) Annales de chimie et de physique, Dritte Folge, Bd. 51.

Gabel einer vollen Schwingung der ersten Gabel, so daſs auf dem abgerollten Mantelstücke die durch Figur 57 dargestellte Kurve



57.

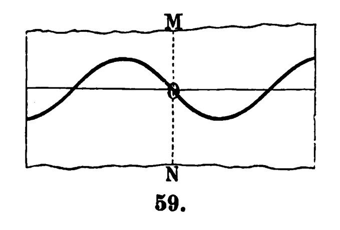
58.

erscheint, welche nach dem Zusammenrollen, wobei AB auf A' B' fällt, die durch Figur 58 bezeichnete Gestaltung gewinnt.

Die Figur 58 ist charakteristisch für das Verhältnis

$$T_1 : T_2 = 3 : 1.$$

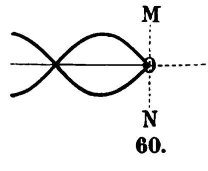
Für $q = \frac{3}{2}$ *entsprechen* $\frac{3}{2}$ *volle Schwingungen der zweiten Gabel einer vollen Schwingung der ersten Gabel, so daſs auf dem abgerollten Mantelstücke die durch Figur 59 dargestellte Kurve erscheint, welche nach dem Zusammenrollen auf dem Cylinder die durch Figur 60 bezeichnete Gestaltung gewinnt.*



59.

Die Figur 60 ist charakteristisch für das Verhältnis

$$T_1 : T_2 = 3 : 2.$$



60.

Bei der Konstruktion der Figur ist vorausgesetzt, daſs beide Bewegungen gleichzeitig in O beginnen: wenn die Vertikal-Bewegung früher oder später beginnt, so erscheint der supponierte Cylinder ein wenig gedreht, ohne daſs die Figur des Mantels ihr Charakteristikum einbüſst.

Wenn q eine Irrational-Zahl ist, welche nahe bei der Rational-Zahl $\frac{m}{n}$ *liegt, so spielt eine Reihe von Punkten* $O_1, O_2, \ldots\ldots O_n$ *nach einander die Rolle von O, d. h. die Figur der Schwingung, welche für* $\frac{m}{n}$ *charakteristisch ist, rotiert in bestimmtem Sinne.*

Hat man die Schwingungs-Dauer einer vorgelegten Gabel in ihrem Verhältnis zu der ein für alle Mal gegebenen Schwingungs-Dauer der Lupen-Gabel zu untersuchen, so schliefst man aus der charakteristischen Figur zunächst auf das Rational-Verhältnis m : n und leitet dann erst einen angenäherten Wert von q her[1]).

Die Voraussetzung dieses Paragraphen, dafs nämlich die **Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der Wellen** für den Bereich der Bewegung unter allen Umständen eine **Konstante** ist, scheint bei den physischen Körpern für **longitudinale** Wellen vorhanden zu sein, während dieselbe hier für transversale Wellen nur dann angenähert erfüllt ist, wenn die Wellenlänge den Verschiebungen der einzelnen Punkte gegenüber einen relativ grofsen Wert hat.

Da unsere Schall-Empfindungen longitudinalen Wellen entsprechen, so ist die Schall-Geschwindigkeit für homogenes Material eine Konstante, deren Wert in freier trockener Luft von 0° circa 330,30 m beträgt.

§. 4. Homogene und heterogene Punkt-Kontinua.

Wenn **alle Punkte** eines Kontinuums **gleichartig** sind, so breitet sich eine Wellen-Bewegung von ihrem Ursprunge O aus in gleicher Weise nach allen Seiten aus, d. h. alle Punkte, welche auf **Kugelflächen** aus O liegen, befinden sich in demselben Bewegungs-Zustande.

Beschreibt man um O Kugeln von den Radien λ, 2 λ, 3 λ ....., so beginnen die Punkte der Oberfläche dieser Kugeln ihre Schwingungen gleichzeitig mit O.

Wenn **nicht alle Punkte** eines Kontinuums **gleichartig** sind, so breitet sich eine Wellen-Bewegung von ihrem Ursprunge O aus nicht in gleicher Weise nach allen Seiten aus, d. h. Punkte von gleichem Bewegungs-Zustande werden hier **nicht** auf **Kugelflächen** liegen, die zu O konzentrisch sind.

Die Flächen, auf denen sich die Punkte von gleichem Bewegungs-Zustande anordnen, nennt man **Wellen-Flächen.** Eine Grade aus dem Punkte O, in welchem die Erregung begann, heifst ein **Strahl.**

Im allgemeinen werden die Wellen-Flächen durch die Strahlen nicht unter rechten Winkeln geschnitten.

Für bestimmte Substanzen (z. B. Steinsalz) liegen die Punkte vom gleichen Bewegungs-Zustande auf Kugeln, für andere (z. B. Kalkspath) gleichzeitig auf Kugeln und Ellipsoiden, für andere wiederum auf anderen Flächen: man spricht daher von der Wellenfläche einer bestimmten Substanz.

Ebene Wellenflächen treten bei Schwingungen im homogenen Kontinuum ein, wenn der Ursprung O der Bewegung unendlich

---

1) Vergl. W. 2.

fern liegt, d. h. diese Wellenflächen sind Kugeloberflächen, deren Radius über alle Grenzen gewachsen ist: dem Lichte der Sonne entsprechen Wellen-Bewegungen, welche mit grofser Annäherung als Bewegungen von ebener Wellenfläche aufgefafst werden können.

Wenn ein **heterogenes Kontinuum in mehrere homogene** Kontinua zerfällt, so gilt das oben Bemerkte für jedes einzelne Glied der ganzen Gruppe, während für die **Grenze** je zweier Kontinua besondere Betrachtungen notwendig sind.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse mag daran erinnert werden, dafs einem von Luft umgebenen Beobachter ein Fisch im Wasser an einem andern Orte zu stehen scheint, als er in Wirklichkeit steht, während Gegenstände in der Luft ihre richtige Stellung behalten: an der Grenze von Luft und Wasser erscheint die Bewegung, welche unsern Licht-Empfindungen entspricht, in bestimmter Weise modifiziert.

Erfahrungsgemäfs **teilt** sich eine **Wellen-Bewegung** an der **Grenze zweier physischen Körper**, welche annähernd als homogene Kontinua aufgefafst werden können, im allgemeinen in **zwei Bewegungen**, von denen die eine in den noch nicht bewegten Körper übertritt, während die andere in den Körper zurückkehrt, in welchem der Vorgang begann.

Wenn die Grenzfläche der beiden Körper eine Ebene ist, so kann man senkrecht zu dieser durch jeden gegebenen Strahl eine Ebene legen, welche dessen **Einfalls-Ebene** genannt wird.

Ergänzt man Strahl und Einfalls-Ebene zu einem orthogonalen Achsen-Kreuze, so entspricht die Zerlegung jeder beliebigen Schwingung in Bezug auf dieses Kreuz je einer longitudinalen und je zwei transversalen Schwingungen.

Kennt man für die Grenze das Verhalten dieser komponierenden Schwingungen, so kennt man dort auch das Verhalten jeder beliebigen Schwingung.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für Flächen, welche keine Ebenen sind, da man dieselben einerseits in der Umgebung des von einem Strahle getroffenen Punktes als eben (Tangential-Ebene) ansehen kann und da andrerseits nur diese Umgebung in Frage kommt.

Man unterscheidet die beiden transversalen Wellen, welche im Verein mit einer longitudinalen Welle zu Wellen von jeder beliebigen Schwingungs-Richtung führen, in ihrer Beziehung zur Einfalls-Ebene als **senkrecht polarisierte** und als **parallel polarisierte** Wellen, je nachdem die Schwingungs-Richtung ihrer Strahlen die Einfalls-Ebene unter einem Winkel von 90° oder unter einem Winkel von 0° schneidet: die Ebene der Schwingungen heifst **Polarisations-Ebene**[1]).

---

1) Diese Bezeichnung ist so gewählt, dafs die Polarisations-Ebene der Lichtstrahlen, welche durch Experimente bestimmbar ist, mit der Ebene identisch

Anstatt nun die Untersuchung für die Grenze zweier homogenen Punkt-Kontinua der Reihe nach für longitudinale, senkrecht- und parallel-polarisierte Wellen durchzuführen, kann man sich auch einer Überlegung bedienen, welche zuerst Huyghens[1]) angestellt hat.

Diese Überlegung findet ihren Ausdruck in dem sogenannten **Huyghensschen Principe,** welches folgendermafsen lautet:

Um die Verbreitung einer Wellen-Bewegung A in einem homogenen Systeme darzustellen, kann man jeden Punkt desselben in dem Momente seiner Erregung als Ausgangs-Punkt einer Welle betrachten, welche der Bewegung A konform ist: die Grenz-Fläche dieser Elementar-Wellen stellt die gesuchte Welle dar.

Wenn man einer Konstanten in der diophantischen Gleichung einer bestimmten Kurve der Reihe nach alle möglichen reellen Werte giebt, so gelangt man zu einer Schar von Kurven derselben Art: diese Kurven-Schar hat im allgemeinen eine ***Grenz-Kurve,*** *welche jede der gegebenen Kurven berührt.*

Für Flächen giebt es in analoger Weise Grenz-Flächen. Grenz-Kurven oder Grenz-Flächen werden auch Enveloppen, d. h. umhüllende Kurven oder umhüllende Flächen genannt, weil sie die Schar der gegebenen Kurven oder die Schar der gegebenen Flächen umhüllen.

Die ***Berechtigung des Huyghensschen Principes*** *folgt aus der Überlegung, dafs einerseits Punkte gleicher Phase in einem homogenen Kontinuum für eine Welle aus O stets auf einer Kugel liegen, während andererseits die Enveloppe kongruenter Kugeln, deren Centra auf einer Kugel liegen, wiederum eine Kugel ist.*

Es handelt sich nun darum, an der Grenze zweier Medien für jeden Strahl vermittelst des Huyghensschen Principes die Lage der **zugehörigen Strahlen** zu konstruieren, von denen der eine als zurückgeworfener (Reflexion), der andere als gebrochener (Refraktion) Strahl zu bezeichnen ist.

Dabei wird man die Wellen, welche von der Grenzschicht ausgehen, ganz besonders zu beachten haben.

Für die **zurückgeworfene Welle** gilt der Satz: **Zusammengehörige Strahlen liegen in einer bestimmten Normal-Ebene (Einfalls-Ebene) der Grenz-Fläche und bilden mit der zugehörigen Normale gleiche Winkel.**

Zum Beweise betrachtet man eine ebene Welle, welche auf eine ebene Grenzfläche fällt.

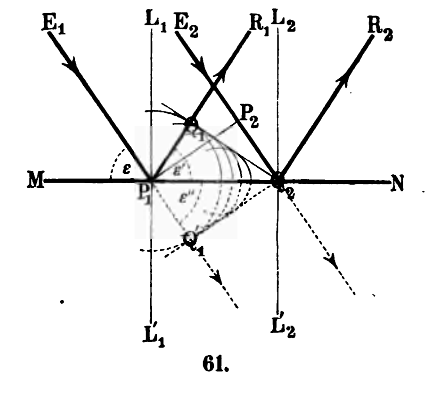
Wenn keine Grenzfläche MN vorhanden wäre, so würde das Wellen-Stück $P_1 P_2$ nach Ablauf einer gewissen Zeit-Dauer

---

ist, welche hier als Polarisations-Ebene eingeführt wird, d. h. wir entscheiden uns im Gegensatz zu den Voraussetzungen Fresnels für die Hypothese von Neumann (Königsberg).

1) Traité de la lumière. Leiden 1690.

die Lage $Q_1 Q_2$ erreicht haben. Diese Lage mufs sich nach dem Principe von Huyghens durch die elementaren Kugel-Wellen der Strecke $P_1 Q_2$ konstruieren lassen, welche oberhalb und unterhalb der Linie MN orthogonal-symmetrisch[1] *verlaufen, so dafs man für die Grenze MN die Lage einer etwa vorhandenen reflektierten Welle durch Umklappen des Dreiecks $P_1 Q'_1 Q_2$ (um $P_1 Q_2$) findet. (Figur 61).*



61.

Wenn also eine reflektierte Welle vorhanden ist, so wird dieselbe durch die Strecke $Q_1 Q_2$ dargestellt: die Strahlen-Paare $E_1 P_1$, $P_1 R_1$ und $E_2 Q_2$, $Q_2 R_2$ bilden mit MN und demnach auch mit den Normalen $P_1 L_1$, $P_2 L_2$ gleiche ($\varepsilon = \varepsilon'' = \varepsilon'$) Winkel.

Für Wellen, deren Wellen-Fläche keine Ebene ist, weist man denselben Satz nach, indem man ein Strahlen-Bündel herausgreift, dessen Querschnitt klein genug ist, um in einer gewissen Annäherung als eben betrachtet werden zu dürfen.

Durch diese Annahme macht man sich auch von der Beschränkung frei, welche in der Voraussetzung einer ebenen Grenzfläche liegt, indem man statt dieser einen kleinen Bereich der jedesmaligen Tangential-Ebene der Grenzfläche betrachtet.

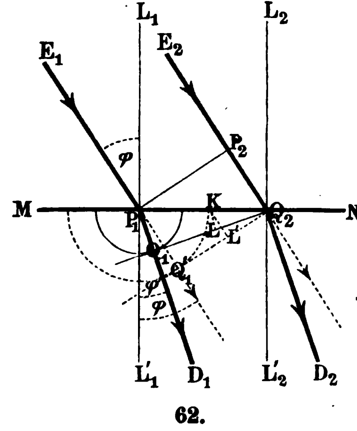
Für die **gebrochene Welle** gilt der Satz: **Zusammengehörige Strahlen liegen in einer bestimmten Normal-Ebene (Einfalls-Ebene) der Grenzfläche und bilden mit der zugehörigen Normale Winkel, deren Sinusverhältnis bezüglich gleich ist dem Verhältnisse der Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten von Wellen für die beiden Systeme.**

Wenn die Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten der Wellen in den beiden Systemen beziehungsweise durch v und v' bezeichnet werden, so haben die Radien der elementaren Kugel-Wellen, welche in den beiden Systemen Wellenbewegungen von gleicher Dauer darstellen, das Verhältnis $v : v'$.

Wenn nun bei analoger Beschränkung wie oben aus den elementaren Kugel-Wellen von $P_1 Q_2$ die Lage der gebrochenen Welle dargestellt werden soll, so hat man die Radien (r), welche $Q_2 Q'_1$ im unbegrenzten Medium liefern würden, in andere Radien (r') nach dem Verhältnisse $v : v'$ zu transformieren. Wenn die Proportion $P_1 Q_1 : P_1 Q'_1 = v' : v$ erfüllt ist, so stellt die Tan-

---

1) Vergl. die Bemerkung auf S. 126.



62.

gente $Q_2 Q_1$ aus Q_2 an den Kreis vom Radius $P_1 Q_1$ die gebrochene Welle dar, weil man für jeden Punkt K auf $P_1 Q_2$ gegeben hat $KL : KL' = P_1 Q_1 : P' Q'_1 = v' : v$. (Figur 62).

Man findet nun

$$P_1 Q_2 \,.\, \sin P_1 Q_2 Q_1 = P_1 Q_1$$

und $P_1 Q_2 \,.\, \sin P_1 Q_2 Q'_1 = P_1 Q'_1$,

d. h. $\dfrac{\sin P_1 Q_2 Q_1}{\sin P_1 Q_2 Q'_1} = \dfrac{P_1 Q_1}{P_1 Q'_1} = \dfrac{v'}{v}$.

Da $\sphericalangle\, P_1 Q_2 Q_1 = \sphericalangle\, \varphi'$ *und da* $\sphericalangle\, P_1 Q_2 Q'_1 = \sphericalangle\, \varphi$ *ist, so hat man für die Lage des gebrochenen Strahles $P_1 D_1$ gegeben*

$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{v'}{v}.$$

Man erweitert die Gültigkeit des hier gefundenen Gesetzes durch analoge Schlüsse wie oben.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs man zu **jedem** Strahle einen **reflektierten** Strahl konstruieren kann, während die **Konstruktion eines gebrochenen Strahles** des öfteren **unmöglich** wird.

Wenn $\frac{v'}{v}$ ein unechter Bruch ist, so lassen sich für φ einerseits so kleine Werte annehmen, dafs $\sin \varphi \,.\, \frac{v'}{v}$ ein echter Bruch ist, während sich für φ andererseits so grofse Werte finden lassen, dafs $\sin \varphi \,.\, \frac{v'}{v}$ ein unechter Bruch ist: die Grenze tritt für $\sin \varphi \,.\, \frac{v'}{v} = 1$ ein, d. h. hier ist $\sin \varphi = \frac{v}{v'}$.

Wenn φ die Gröfse (Grenz-Winkel) überschreitet, welche durch die Bedingung $\sin \varphi = \frac{v}{v'}$ vorgeschrieben wird, so ist $\sin \varphi' = \sin \varphi \,.\, \frac{v'}{v}$ kein echter Bruch, d. h. es giebt keinen reellen Wert von φ', welcher die Gleichung befriedigt.

In diesem Falle tritt kein gebrochener Strahl auf, so dafs sich die Welle nicht teilt und ganz reflektiert wird: man spricht hier von einer **totalen Reflexion.**

Da $v' > v$ vorausgesetzt wurde, so kann totale Reflexion nur eintreten, wenn ein Strahl aus einem Kontinuum kommt, in welchem die Geschwindigkeit der Welle kleiner ist als in dem Kontinuum, in welches der Strahl übergehen soll.

Die Erfahrung lehrt, dafs v mit der Dichtigkeit eines Kontinuums abnimmt, d. h. die totale Reflexion kann nur am dünneren Medium stattfinden.

Bei Licht-Bewegungen zeigt eine Fläche, an welcher totale Reflexion eintritt, die Eigenschaften eines Spiegels.

Die beiden Sätze, welche oben abgeleitet wurden, lassen sich aus einem allgemeinen Principe von weittragender Bedeutung ableiten, welches man das **Princip des kleinsten Zeit-Verlustes** nennen kann.

Dasselbe lautet: Wenn eine Wellen-Bewegung, die von einem Punkte O ausgeht, einen Punkt O′ überhaupt erreicht, so ist für das Durchlaufen der damit gegebenen Bahn O O′ weniger Zeit notwendig als für das Durchlaufen jeder anderen Bahn O O′.

Innerhalb eines homogenen Systems führt dieses Princip zur gradlinigen Fortpflanzung der Wellen, weil die grade Linie zwischen zwei Punkten der kürzeste Weg ist.

In Bezug auf die hier betrachtete Reflexion kann man nachweisen, dafs die gebrochene Linie $E_1 P_1 R_1$ kürzer ist als jede andere gebrochene Linie $E_1 R_1$, welche die Grenze MN trifft, so dafs also der Weg $E_1 P_1 R_1$ in kürzerer Zeit durchlaufen wird als jeder andere Weg $E_1 R_1$.

In Bezug auf die hier betrachtete Brechung kann man nachweisen, dafs die gebrochene Linie $E_1 P_1 D_1$ in kürzerer Zeit durchlaufen wird als jede andere gebrochene Linie $E_1 D_1$, welche die Grenze MN trifft.

Das Princip, welches innerhalb der Optik als Princip der schnellsten Ankunft bezeichnet worden ist, gilt für ganz beliebige Systeme mit beliebig vielen beliebig gestalteten Begrenzungs-Flächen.

Das Reflexions-Gesetz war für Licht-Bewegungen schon längst bekannt, als für diese von Descartes (Dioptrik, Leiden 1637) das bereits von Snellius gefundene Brechungs-Gesetz neu formuliert wurde.

Die Versuche haben diese Gesetze auf den verschiedensten Gebieten durchaus bestätigt.

Die bisherigen Betrachtungen bilden auch für verwickeltere Fälle die Grundlage der Untersuchungen: das Huyghenssche Princip gestattet jederzeit den Verlauf einer Wellen-Bewegung darzustellen.

Geht z. B. ein Lichtstrahl aus einem homogenen Kontinuum in einen Krystall über, welcher nicht dem regulären System angehört, so treten im allgemeinen zwei gebrochene Strahlen auf, für welche der Huyghensschen Konstruktion als elementare Wellenflächen unter andern beziehungsweise Kugeln und Rotations-Ellipsoide zu Grunde gelegt werden müssen.

Es bleibt noch übrig, darauf hinzuweisen, dafs bei der Reflexion eine Änderung der Phase eintreten kann.

Die Erfahrung lehrt, dafs an der Grenze zweier homogener Kontinua eine reflektierte Welle entsteht, welche sich entweder als eine unmittelbare Fortsetzung (kein Phasen-Verlust) oder als

eine umgekehrte $\left(\text{Phasen-Verlust} = \frac{\lambda}{2}\right)$ Fortsetzung der ankommenden Welle darstellt.

Im ersten Falle, welcher beim Übergange vom Materiale gröfserer Dichtigkeit zum Materiale kleinerer Dichtigkeit eintritt, wird für transversale Schwingungen ein Wellenberg als Wellenberg und ein Wellenthal als Wellenthal reflektiert, im andern Falle geht bei der Reflexion ein Wellenberg in ein Wellenthal und ein Wellenthal in einen Wellenberg über [1]).

Die Verhältnisse, welche hier in Frage kommen, lassen sich an einer Reihe sich berührender Kugeln aus Elfenbein demonstrieren, deren eine Hälfte (links) Kugeln von Volumen p_1 und deren andere Hälfte (rechts) Kugeln vom Volumen p_2 enthält.

Für $p_1 > p_2$ überträgt die erste Kugel links einen Stofs bis zum Grenzpunkte der beiden Kugelsorten in der Weise, dafs die letzte Kugel der rechten Reihe über diesen Grenzpunkt hinausfliegt, um darauf umzukehren.

Für $p_1 < p_2$ überträgt die erste Kugel links einen Stofs bis zum Grenzpunkte der beiden Kugelsorten in der Weise, dafs die letzte Kugel in diesem Grenzpunkte ihre umgekehrte Bewegung beginnt.

Im ersten Falle vollführt die letzte Kugel der ersten Reihe die Schwingung, welche durch den Stofs eingeleitet wurde, im zweiten Falle wird die letzte Kugel der ersten Reihe in der Mitte dieser Schwingung zur Umkehr gezwungen, d. h. im ersten Falle tritt keine Änderung der Schwingungs-Phase ein, im letzten Falle fällt eine halbe Schwingung aus.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen mag darauf aufmerksam gemacht werden, dafs die Beobachtung für physische Systeme des öfteren eine stetige Abnahme der Schwingungs-Amplitude nachweist, weil hier ein Körper innerhalb eines andern (z. B. Pendelkugel in Luft) schwingt.

Solche Schwingungen werden im einfachsten Falle durch die Formel

$$x = r \,.\, e^{-\varepsilon t} \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T}\right)$$

dargestellt, so dafs hier eine Amplitude $r \,.\, e^{-\varepsilon t}$ in Frage kommt, welche mit der Zeit abnimmt.

Die eben gegebene Formel entspricht der Annahme, dafs die Beschleunigung der Bewegung durch das umgebende Mittel proportional (ε) der Geschwindigkeit verzögert wird.

Da sich die Werte $t = o$ und $x = o$ entsprechen, so treten für $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4} \ldots (2n + 1) \,.\, \frac{T}{4}$ relativ grofse Ausschläge ein, so dafs man beziehungsweise Amplituden von folgender Gröfse erhält:

---

1) Vergl. Thomas Young, On the theory of light and colour. Phil. Transact. of the Royal Society for 1802.

$$r \cdot e^{-\frac{\varepsilon T}{4}},\ r \cdot e^{-\frac{3 \varepsilon T}{4}},\ r \cdot e^{-\frac{5 \varepsilon T}{4}} \ldots .\ r \cdot e^{-\frac{(2n+1) \varepsilon T}{4}}.$$

Weil hier eine geometrische Reihe entsteht, deren Quotient q den Wert $e^{\frac{\varepsilon T}{2}}$ hat, so ist die Differenz der Logarithmen je zweier auf einander folgenden Amplituden $\left(\log q = \frac{\varepsilon T}{2} . \log e\right)$ konstant.

Differenzen von Logarithmen irgend zweier Amplituden nennt man nach Gaufs[1] logarithmische Dekremente.

Da diese Dekremente (Mafs der Abnahme) der Gröfse ε, welche die Verzögerung darstellt, proportional sind, so kann die Beobachtung von abnehmenden Amplituden dazu dienen, bestimmte Verzögerungen festzustellen.

§. 5. Die Punkt-Systeme der Physik.

Bei den Bewegungen elastischer Systeme dehnen sich einzelne Systemteile aus, während andere vielleicht zusammenschrumpfen, d. h. es tritt hier im allgemeinen eine Volumen-Änderung ein, welche bei unveränderlichen Systemen nicht vorhanden ist.

Diese Betrachtung führt zu allgemeinen Untersuchungen über die Veränderlichkeit von Systemen, deren Ziel es ist, diejenige Art der Variabilität festzustellen, welche den physischen Körpern entspricht.

Wenn sich die **Koordinaten** jedes Punktes P_i vor und nach einer bestimmten Veränderung in **ungebrochenen** Ausdrücken **linear** durch einander darstellen lassen, so wird eine äufserst einfache Art der Veränderlichkeit bestimmt, weil hier Gleichungen zwischen den Koordinaten eines Punktes vor und nach der Veränderung denselben Grad behalten: bestimmte Linien, Flächen und Körper werden hier durch die Bewegung relativ wenig geändert, eine Grade bleibt z. B. eine Grade, eine Ebene bleibt eine Ebene, ein Tetraëder bleibt ein Tetraëder.

Bei dieser Art der Veränderlichkeit[2] erleidet jeder Teil des Systems bei der Bewegung eine **Verschiebung** in bestimmter Richtung und eine **Drehung** um einen bestimmten Punkt und aufserdem eine **Volumen-Änderung** von ganz bestimmtem Charakter.

Diese Volumen-Änderung läfst sich stets auf den Dehnungen von drei auf einander normal stehenden Strecken l_1, l_2, l_3 herleiten, so zwar, dafs eine Kugel vom Radius r bei der Veränderung in ein Ellipsoid übergeht, dessen Achsen-Kreuz mit dem Strecken-Kreuze aus l_1, l_2, l_3 übereinstimmt.

Haben die Achsen selbst beziehungsweise die Längen $2 r \mu_1$,

---

1) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 58.

2) Vergl. G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik S. 104.

$2r\mu_2$, $2r\mu_3$, so sind beziehungsweise die Verlängerungen oder Verkürzungen $2r(\mu_1 - 1)$, $2r(\mu_2 - 1)$, $2r(\mu_3 - 1)$ in Rechnung zu bringen, welche auf die Längen-Einheit reduciert durch $\lambda_1 = \mu_1 - 1$, $\lambda_2 = \mu_2 - 1$, $\lambda_3 = \mu_3 - 1$ dargestellt worden: Die Gröfsen λ_1, λ_2, λ_3 heifsen **Haupt-Dilatationen** und zeigen bei positivem Werte Verlängerungen, bei negativem Werte Verkürzungen an.

Die Werte λ_1, λ_2, λ_3 sind genauer gesagt Linien-Dilatationen.

Für ein Rechteck von den Seiten a und b hat man

$$\mu_1 a \cdot \mu_2 b - ab = ab(\mu_1\mu_2 - 1)$$

als Vergröfserung oder Verkleinerung gegeben: die Flächen-Dilatation ist $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) - 1$.

Für ein Orthogonal-Parallelepiped hat man ebenso

$$\mu_1\mu_2\mu_3 - 1 = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - 1$$

als Raum-Dilatation gegeben.

Der Wert dieser Betrachtung liegt darin, dafs bei physischen Körpern für sehr kleine Veränderungen in der That Verhältnisse obwalten, welche den eben geschilderten in einer relativ grofsen Annäherung entsprechen.

Diese Übereinstimmung gilt, solange man die physischen Körper als Punkt-Kontinua voraussetzt, da die betreffende Ableitung die Annahme einer stetigen Raum-Erfüllung voraussetzt.

Da die Ergebnisse, welche auf Grund dieser Annahme gewonnen werden, eine Darstellung der physischen Bewegung gestatten, welche als eine ausgezeichnete Beschreibung des Thatsächlichen hinzustellen ist, so erhält die bereits früher (S. 43) betonte Auffassung[1]) der physischen Körper eine wesentliche Stütze.

Wenn ein Punkt des Körpers vor und nach der Verschiebung, beziehungsweise die Koordinaten x, y, z und ξ, η, ζ hat, so besteht der Voraussetzung gemäfs einerseits ein Gleichungs-System

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \eta &= a_2 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \zeta &= a_3 + a_{23}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned}$$

und andererseits ein Analogon, das durch Berechnung von x, y, z aus diesem entsteht.

Hier wird die Verschiebung durch die Gröfse a_1, a_2, a_3 bezeichnet, während durch die Gröfse a_{ik} zugleich Drehung und Dilatation ausgedrückt wird.

Für relativ kleine Verschiebungen findet man die Gröfsen λ_1, λ_2, λ_3 als Wurzeln der Gleichung (Determinante)

---

1) Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen S. 96 flg.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 - \lambda & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \frac{a_{13} + a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21} + a_{12}}{2} & a_{22} - 1 - \lambda & \frac{a_{22} + a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31} + a_{13}}{2} & \frac{a_{32} + a_{23}}{2} & a_{33} - 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei ist die Raum-Dilatation

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 - 1 = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - 1$$

gegeben, wofür hier $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ *gesetzt werden darf.*

Nach einem bekannten Satze über die Wurzeln der Gleichungen ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3.$$

Wenn ein **unveränderliches** System in einem bestimmten Momente in ein **elastisches** System übergeht [1]), so treten infolge der gegenseitigen Lagen-Änderung der Elemente innerhalb des Systems bestimmte Beschleunigungen auf, für deren Bestimmung die Haupt-Dilatationen von grofsem Werte sind.

Wenn man durch einen Punkt P im Innern des Systems alle möglichen Ebenen gelegt und aus diesen relativ kleine Stücke, welche P umgeben, ausgeschnitten denkt, so haben jene Beschleunigungen, welche **Druck-Beschleunigungen** genannt werden, im allgemeinen für jedes dieser Ebenen-Stücke einen andern Wert und zwar fällt die Normale einer solchen Ebene im allgemeinen n i c h t mit der Richtung der betreffenden Beschleunigung zusammen.

Diesen Verhältnissen giebt man Ausdruck, indem man von jenen **Beschleunigungen** sagt, dafs sie auf die einzelnen **Flächen-Elemente** (nicht auf einzelne Punkte) **wirken.**

In jedem System-Punkte giebt es **ein und nur ein** orthogonales Koordinaten-Kreuz, dessen Achsen die Richtungen von Druck-Beschleunigungen sind, welche zu den Koordinaten-Ebenen gehören; d. h. in diesen drei Richtungen, welche **Haupt-Druck-Richtungen** heifsen, wirken die Druck-Beschleunigungen normal zu den entsprechenden Flächen-Elementen.

Aus den Druck-Beschleunigungen für die Haupt-Druck-Achsen eines Punktes lassen sich alle andern Druck-Beschleunigungen dieses Punktes herleiten.

Bei **physischen Körpern** hängen die **Druck-Beschleunigungen** innerhalb eines relativ kleinen Teiles **nur** von der Beschaffenheit und von der Zustands-Änderung dieses Teiles ab: **diese mafsgebenden Verhältnisse sind verschieden für feste, flüssige und gasförmige Körper.**

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse kann die Thatsache dienen, dafs ein Glas zerspringt, wenn in dessen Wölbung in geeigneter Weise hineingesungen wird: die Schall-Wellen, welche

---

1) Vergl. G. **Kirchhoff**, Vorlesungen S. 121 und 389.

beim Singen entstehen, bringen die Elemente des Glases in schwingende Bewegungen und können dadurch äufserst heftige Druck-Beschleunigungen erzeugen.

Der Versuch gelingt nur, wenn die Schwingungs-Dauer der Schallwellen der Schwingungs-Dauer der stehenden Wellen gleich ist, welche das Glas vermöge seiner Beschaffenheit ausführen kann.

Diese Bedingung, welche unter dem Namen **Princip des Mitschwingens** *bekannt ist, läfst sich folgendermafsen erläutern: Wenn eine longitudinale Luftwelle von der Schwingungs-Dauer T senkrecht auf eine vertikal gespannte Saite trifft, welche stehende Schwingungen von der Dauer t ausführen kann, so bewegt der erste, dritte, fünfte etc. Luftstofs von der Dauer $\frac{T}{2}$ die Saite in umgekehrtem Sinne wie der zweite, vierte, sechste etc. Luftstofs von der Dauer $\frac{T}{2}$, während bei der Saite Analoges für die Dauer $\frac{t}{2}$ eintritt, d. h. eine fortgesetzte Verstärkung der minimalen Bewegung, welche durch den ersten Luftstofs erzeugt wurde, tritt nur ein, wenn $t = T$ ist.*

Auch die Grenze zweier elastischer Systeme, für welche übrigens bestimmte Oberflächen-Bedingungen gelten, besteht aus Flächen-Elementen, für welche Druck-Beschleunigungen in Rechnung zu bringen sind.

Zur Bestimmung der Druck-Beschleunigungen innerhalb **physischer Körper** hat man im allgemeinen für jedes Material durch Versuche **21 Konstanten** festzustellen, welche **Konstanten der Elasticität** heifsen.

Dabei ist zu bemerken, dafs für Punkt-Systeme auch Verhältnisse denkbar sind, welche bei weitem mehr solche Konstanten erfordern, während für die nächste Umgebung eines bestimmten Punktes bei dem hier vorausgesetzten Gesetze der Veränderlichkeit (Linear-Ausdrücke) allerdings nur 21 Konstanten in Frage kommen.

Die physischen Körper sind im allgemeinen nicht durch homogene Punkt-Systeme darstellbar, sie haben aber die bemerkenswerte Eigenschaft, dafs die Umgebung eines Punktes innerhalb gewisser Grenzen dieselbe Beschaffenheit zeigt, wie die Umgebung jedes andern Punktes.

Die Voraussetzung dieser Beschaffenheit heterogener Punkt-Systeme, welche **Homoousie** *(von ὁμος und οὐσια) genannt werden soll, gestattet die Konstanten-Bestimmung, welche für die Umgebung eines Punktes durchgeführt ist, für die Umgebung aller andern Punkte zu benutzen.*

Wenn innerhalb eines Körpers **eine Normal-Diametral-Ebene** vorhanden ist, so haben 8 von den 21 Konstanten den Wert Null, d. h. man hat nur 13 Konstanten durch Versuche zu bestimmen.

Die Voraussetzung der Homoousie führt wiederum von der Umgebung eines Punktes zur Umgebung jedes Punktes.

Wenn innerhalb eines Körpers **zwei Normal-Diametral-Ebenen** vorhanden sind, die sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist noch eine dritte Ebene gleicher Beschaffenheit vorhanden, welche die beiden ersten unter rechten Winkeln schneidet.

Hier bedarf man nur der Bestimmung von **6** Konstanten.

Solche Verhältnisse sind bei gewissen Krystallen annähernd vorhanden.

Wenn innerhalb eines Körpers **drei Normal-Diametral-Ebenen von gleichem** Werte vorhanden sind, d. h. wenn das System ein orthogonales Achsenkreuz besitzt, in Bezug auf dessen Ebenen keinerlei Unterschiede aufzufinden sind, so bedarf man nur der Bestimmung von **3** Konstanten.

Solche Verhältnisse bietet das Steinsalz dar [1]).

Wenn innerhalb eines Körpers alle Ebenen gleichwertig sind, so ist die Umgebung eines jeden Punktes in jeder Richtung gleichwertig, d. h. das System ist homogen.

Hier bedarf man nur der Bestimmung von **2** Konstanten, welche K und ϑ genannt werden sollen.

Homogene Systeme heifsen wegen der angegebenen Eigenschaft auch isotrop, während heterogene Systeme, obwohl sie Homoousie zeigen können, stets als heterotrop zu bezeichnen sind [2]).

In **homogenen Systemen** fallen die **Haupt-Druck-Achsen** mit den **Achsen der Haupt-Dilatationen** zusammen.

Die **Druck-Beschleunigungen** d_1, d_2, d_3 lassen sich hier in ganzen Ausdrücken linear durch die **Haupt-Dilatationen** λ_1, λ_2, λ_3 darstellen.

Bezeichnet man die räumliche Dilatation $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ durch φ, so darf man annehmen, dafs die Gröfsen d_1, d_2, d_3, beziehungsweise proportional sind zu

$$-2K(\lambda_1 + \vartheta . \varphi), \; -2K(\lambda_2 + \vartheta . \varphi), \; -2K(\lambda_3 + \vartheta . \varphi).$$

Die Berechtigung dieser Annahme (Cauchy, Lamé, Kirchhoff) liegt in der Fruchtbarkeit ihrer Verwendung, d. h. man gelangt zu brauchbaren Resultaten, wenn man die Gültigkeit der obigen Beziehungen voraussetzt.

Bei **Flüssigkeiten** und bei **Gasen** haben die **Druck-Beschleunigungen** für alle Flächen-Elemente, welche durch einen Punkt gelegt werden können, denselben Wert, vorausgesetzt, dafs man von der **Reibung** absieht.

Berücksichtigt man die Reibung, so hat man für die Messung derselben eine Konstante einzuführen.

---

1) Vergl. Voigt, Untersuchungen der Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes 1874.

2) Die hier gegebene Terminologie weicht zum Teil von andern Terminologien ab.

Mit diesen Voraussetzungen über die **Natur** der physischen Körper, welche sich in der Erfahrung bewährt haben, sind nur gewisse Bewegungen im Innern in Einklang.

Es giebt Gleichungen, welche für die verschiedenen Systeme die zulässigen Bewegungs-Formen von den unzulässigen scheiden: diese Relationen werden die **elastischen Grundgleichungen** genannt.

In einem festen Körper aus homogenem Material sind nach den elastischen Grundgleichungen für homogene Systeme **longitudinale** und **transversale Wellen-Bewegungen** zulässig.

In **Flüssigkeiten** und **Gasen** können im allgemeinen **nur longitudinale Wellen** auftreten.

Transversalen Wellen entsprechen stets Druck-Beschleunigungen, welche sich mit der Richtung der gedrückten Fläche ändern: in ***Flüssigkeiten*** *und* ***Gasen*** *können deshalb nur dann transversale Wellen entstehen, wenn die Bewegung so schnell vor sich geht, dafs die bewegten Teilchen nicht rasch genug die Lagen wiederfinden, welche dem Ausgleich des Druckes entsprechen* [1]).

Longitudinalen Wellen entsprechen stets Verdünnungen und Verdichtungen.

C. Das dissolute System.

§. 1. Die Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Die **Untersuchung der Bewegung eines Punkt-Systems** darf als beendet angesehen werden, wenn dasselbe als **dissolutes System** dargestellt ist: man vermag dann die Bewegung jedes seiner Punkte ohne Rücksicht auf die andern Punkte zu verfolgen, d. h. man gelangt zur Phoronomie des Punktes zurück.

Analoges tritt ein, wenn das System von vornherein als ein dissolutes System gegeben ist.

Man sucht also den Grenzfall, der durch den Mangel jeder Verbindung charakterisiert ist, selbst dann zu erreichen, wenn ursprünglich ein wohl bestimmtes Gesetz für die Verbindung der Punkte gegeben war.

Schon in der Phoronomie des Punktes wurde ein Verfahren angewendet, welches der Dissolution eines Systems analog ist: es handelte sich darum, die Untersuchung der Bewegung auf gegebener Bahn zu erweitern für Bewegungen von gegebener Beschleunigung.

Dabei spielte die Centripetal-Beschleunigung $\left[\frac{v^2}{\rho}\right]$ *eine grofse Rolle, weil sie dem Übergange von Tangente zu Tangente entsprach.*

---

1) Dieser Fall scheint bei den Licht-Bewegungen realisiert zu sein: man sagt, dafs der Licht-Äther sich wie ein fester Körper verhält.

Für die **Dissolution eines Systems** lassen sich an dieser Stelle keine allgemeine Regeln geben, weil dazu gewisse dynamische Vorstellungen nötig sind.

Hier soll nur der Fall behandelt werden, dafs innerhalb des Systems **unveränderliche Kurven** oder **unveränderliche Flächen** vorhanden sind, auf denen einzelne Punkte zu bleiben genötigt sind.

Die Bewegung, welche in der Phoronomie des Punktes durch die Theorie des idealen Pendels beschrieben wurde, läfst sich auch als „Bewegung eines schweren Punktes auf einem gegebenen Kreisbogen“ darstellen und wäre dann in diesem Abschnitte zu behandeln.

Wenn innerhalb des Systems eine **unveränderliche Kurve** vorhanden ist, auf welcher ein Punkt P_i zu bleiben genötigt ist, so kann sich der Einflufs dieses Zwanges, abgesehen von der Änderung der Centripetal-Beschleunigung, welche sich schliefslich als $\left[\frac{v^2}{\rho}\right]$ darstellen mufs, nur darin äufsern, dafs P_i beim Gleiten auf der Bahn eine Änderung seiner Tangential-Geschwindigkeit erleidet: man kann daher den hier vorhandenen **Zwang** durch eine **Beschleunigung** [b] dargestellt denken, welche für jeden Punkt der Kurve einen bestimmten Wert hat.

Denkt man von dieser Beschleunigung [b] für jeden Bahnpunkt W in Richtung der entsprechenden Tangente eine Komponente $[b_T]$ abgesondert, so bleibt eine zweite Komponente $[b_N]$ übrig, welche senkrecht zur Tangente verläuft und demnach innerhalb der W entsprechenden Normal-Ebene der Bahn gelegen ist.

Zerlegt man die gegebene Beschleunigung [a] des Punktes P_i, welche an der Stelle W zur Geltung kommt, gleichfalls in Richtung der Tangente, so wird [a] durch $[a_T]$ und $[a_{N'}]$ ersetzt.

Die Tangential-Beschleunigung $[\bar{a}_T]$ von P_i läfst sich durch arithmetische Addition von $[a_T]$ und $[b_T]$ finden, während die Normal-Beschleunigung $[\bar{a}_N]$ von P_i, welche sich als $\left[\frac{v^2}{\rho}\right]$ darstellen mufs, durch geometrische Addition (N und N′) von $[a_{N'}]$ und $[b_N]$ erhalten wird.

Demnach ist:

$$\bar{a}_T = a_T + b_T \text{ und } [\bar{a}_N] = \left[\frac{v^2}{\rho}\right] = [a_{N'}] + [b_N].$$

*Für Anwendungen aus dem Gebiete der Physik darf man $b_T = 0$ setzen, so oft man die **Reibung** vernachlässigen darf.*

Nimmt man die Kurve nicht als absolut glatt an, so hat b_T einen bestimmten Wert, welcher sich im Hinblick auf a_T erfahrungsmäfsig stets als Verzögerung darstellt.

*In vielen Fällen darf man annehmen, dafs $b_T = f \cdot b_N$ ist, d. h. man setzt die Verzögerung der Normal-Komponente von [b] proportional: f heifst der **Reibungs-Koëfficient.***

Wenn P_i einem Körper aus bestimmtem Material (z. B. Eisen)

angehört und wenn die Bahn eine Grenzlinie eines andern Körpers aus gleichfalls bestimmtem Material (z. B. Messing) ist, so hat f einen Zahlen-Wert, der erfahrungsmäfsig festgestellt werden kann.

Wenn innerhalb des Systems eine **unveränderliche Fläche** vorhanden ist, auf der P_i zu bleiben genötigt ist, so kann dieser **Zwang** durch eine **Beschleunigung** [b] dargestellt werden, welche für jeden Punkt der Fläche einen bestimmten Wert hat.

Wenn man einen Punkt W_k einer Fläche auf dieser durch eine geschlossene Kurve umgiebt und durch W_k nach allen Begrenzungs-Punkten derselben Strahlen gezogen denkt, so bilden diese einen Kegel, der eine Ebene wird, sobald man die Kurve mehr und mehr verengert denkt: diese Ebene heifst die Tangential-Ebene der Fläche im Punkte W_k, während ihre Normale in W_k die Normale der Fläche im Punkte W_k genannt wird. Vgl. S. 311.

Führt man ein Koordinaten-Kreuz ein, dessen Z-Achse die Normale der Fläche in W_k ist, so wird [a] und [b] in Bezug auf dieser in normaler und tangentialer Richtung zerlegt.

Die Tangential-Komponente von [b] darf man bei Aufgaben aus dem Gebiete der Physik vernachlässigen, sobald keine Reibung (absolut glatte Oberfläche) vorausgesetzt wird.

Wenn ein Punkt auf einer unveränderlichen **Kurve** in **Ruhe** bleiben soll, so darf die Vereinigung von [a] und [b] keine Geschwindigkeit in Richtung der Tangente liefern.

Wenn ein Punkt auf einer unveränderlichen **Fläche** in **Ruhe** bleiben soll, so darf die Vereinigung von [a] und [b] keine Geschwindigkeit in der Tangential-Ebene liefern.

In letzterem Falle darf also keine Komponente in die Ebene XOY fallen, d. h. für zwei Orthogonal-Achsen der Ebene XOY dürfen nur Komponenten von der Gröfse „Null“ auftreten.

Bei der **Berechnung** von Bewegungen auf unveränderlichen Kurven und Flächen ist der Einflufs des Zwanges, der durch [b] dargestellt wurde, zu suchen und zwar gewöhnlich unter der Bedingung, dafs $b_T = f \,.\, b_N$ zu setzen ist.

Für Kurven ist v und b_N aus

$$\bar{a}_T = a_T + f \,.\, b_N \text{ und } \bar{a}_N = \left[\frac{v^2}{\rho}\right] = [a_{N'}] + [b_N]$$

zu bestimmen.

Bei Problemen für Flächen ist die Kurve, auf welcher sich der Punkt bewegt, durch die Rechnung herleitbar.

Die ebene Bewegung eines idealen Pendels kann, wie schon erwähnt, als Kreis-Bewegung eines schweren Punktes aufgefafst werden.

Die Erweiterung der Aufgabe führt zur Behandlung des sphärischen oder conischen Pendels: hier ist ein schwerer Punkt gezwungen auf einer Kugeloberfläche zu bleiben.

Dieses Problem läßt in einem Falle[1] *eine elementare Lösung zu, nämlich, wenn sich der Punkt mit konstanter Geschwindigkeit* (c) *auf einem horizontalen Kreise* (r) *bewegt, wobei der Faden* (l) *einen Kreis-Kegel-Mantel von der Öffnung* α *beschreibt.*

Zerlegt man g *in zwei Komponenten, von denen die eine die Richtung des Fadens hat, während die andere senkrecht zur Ruhelage des Fadens wirkt, so wird* $\frac{g}{\cos\alpha}$ *durch die Festigkeit des Fadens aufgehoben.*

Die Centripetal-Beschleunigung $\frac{c^2}{r}$ *mufs die andere Komponente* $g.\tang\alpha$ *gerade aufheben, so dafs* $c^2 = rg.\tang\alpha = lg.\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ *zu setzen ist.*

Die Schwingungs-Dauer (Umlaufs-Zeit) eines solchen Pendels ist

$$T = \frac{2\pi r}{c} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}.\cos\alpha}.$$

Wenn man $l.\cos\alpha$, *d. h. die Projektion des Fadens auf seine Ruhelage die Achsen-Strecke des konischen Pendels nennt, so gelangt man zu dem Satze: Konische Pendel von gleicher Achsen-Strecke haben dieselbe Schwingungs-Dauer.*

§. 2. Die Behandlung dissoluter Systeme.

Wenn ein System von vornherein als dissolut gegeben ist oder wenn die Bedingungen für die Bewegungen der einzelnen System-Punkte in eine Form gebracht worden sind, welche dasselbe als dissolut erscheinen lassen, so treten statt des Problems aus der Phoronomie der Punkt-Systeme eine Reihe von Problemen aus der Phoronomie des Punktes auf.

Dreht sich z. B. ein unveränderliches System um eine feste Achse, so läßt sich die Bewegung jedes Punktes durch die Bewegung eines bestimmten Punktes darstellen: zu jedem Punkte P_i *gehört ein bestimmter Achsen-Abstand* e_i, *welcher für die Konstruktion der Bahn (Kreis) desselben mafsgebend ist.*

A. Die Theorie des Springbrunnens. Wenn man von einem Punkte O aus für alle möglichen Winkel [α] die Wurf-Bahnen konstruiert denkt, welche derselben Geschwindigkeit entsprechen, so gelangt man zu einem Bewegungsbilde, welches die Verhältnisse eines Springbrunnens mit einem gewissen, wenn auch geringen, Grade der Annäherung darstellt.

Die Bahnen der einzelnen Wasserteilchen entsprechen den Bahnen der einzelnen geworfenen Punkte.

Zunächst sollen die Verhältnisse in **einer Ebene** (H O V) untersucht werden:

---

1) Für die Behandlung des allgemeinen Falles, vergl. z. B. Schell, Theorie I, S. 421.

Die **Richt-Linien** (Direktrix) der Bahnen eines geworfenenen Punktes fallen (Figur 63) für alle Wurf-Richtungen (α) aus O in eine **Grade** D D′ zusammen, so lange die Anfangs-Geschwindigkeit (c) dieselbe bleibt.

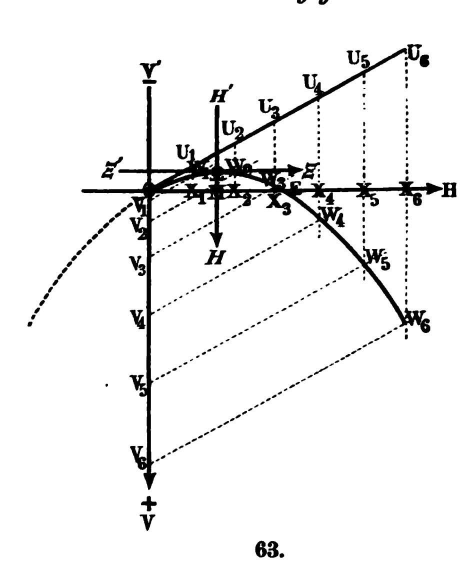
Die Richt-Linie ist eine Parallele zur Horizontalen, welche oberhalb des Scheitels liegt und von diesem den Abstand

$$\frac{p}{2} = \frac{c^2}{2g} \cdot \cos^2 \alpha$$

hat, die Erhebung der Richt-Linie über den Horizont ist demnach

$$h + \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{c^2}{2g} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{c^2}{2g},$$

d. h. sie ist unabhängig von α.



63.

Die **Brennpunkte** (Foci) der Bahnen eines geworfenen Punktes liegen für alle Wurf-Richtungen (α) aus O auf einem bestimmten **Kreise**, so lange die Anfangs-Geschwindigkeit (c) dieselbe bleibt.

Man hat $\overline{OF}^2 = \left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(h - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{c^2}{2g} \cdot \cos 2\alpha\right)^2 = \left(\frac{c^2}{2g}\right)^2,$ *d. h. OF ist constant $\left(= \frac{c^2}{2g}\right)$, so lange c denselben Wert behält.*

Die Gröfse $\frac{c^2}{2\,g}$, welche die Lage der gemeinsamen Direktrix und die Gröfse des Fokal-Kreises bestimmt, stellt zugleich die Höhe (S. 195) dar, aus welcher der Punkt frei herabfallen müfste um die Geschwindigkeit c zu erhalten.

Man hat hier die Formel $v^2_t - v^2 = 2\,as$ zu beachten.

Die **Scheitel** der Bahnen eines geworfenen Punktes bilden für alle Wurf-Richtungen (α) aus O eine bestimmte **Ellipse**, so lange die Anfangs-Geschwindigkeit (c) dieselbe bleibt.

Es soll wiederum das zuerst eingeführte Kreuz $H\,O\,V$ benutzt werden.

Die Gröfsen $\frac{w}{2}$ und h bestimmen hier als Koordinaten x'

und $-y'$ *die Lage jedes Scheitels, so dafs einerseits*

$-y' = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha$ *und anderseits* $x' = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\alpha$ *ist.*

Demnach gilt für x' *und* y' *eine bestimmte diophantische Gleichung.*

Man hat

$-y' = \frac{c^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, *d. h.* $\cos 2\alpha = 1 + y' \cdot \frac{4g}{c^2}$.

Demnach ist

$$1 = \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = \left(\frac{2g}{c^2} \cdot x'\right)^2 + \left(\frac{y' + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2g}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2g}\right)}\right)^2$$

oder auch

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left[y' + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2g}\right)\right]^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g}\right)^2} = 1.$$

Zieht man oberhalb OH *im Abstande* $\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g}$ *eine Horizontale* TT', *so liefert dieselbe im Verein mit* $V'V$ *ein neues Koordinaten-System* VT, *in welchem in Bezug auf das alte System die Horizontal-Koordinaten ungeändert bleiben, während die Vertikal-Koordinaten um* $\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g}$ *geändert erscheinen.*

Für dieses Kreuz (x, y) *hat man also* $x = x'$ *und*

$$y = y' + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2g}\right)$$

einzuführen, so dafs als diophantische Gleichung für den Ort des Scheitels

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g}\right)^2} = 1$$

resultiert.

Für $y = 0$ *erhält man die Horizontal-Koordinaten* $+ \frac{c^2}{2g}$ *und* $- \frac{c^2}{2g}$, *für* $x = 0$ *erhält man die Vertikal-Koordinaten* $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g}$ *und* $- \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g}$, *d. h. der gefundene Ort, welcher* DD' *und* OH *berührt, schneidet auf jeder Achse rechts und links vom Nullpunkte gleiche Stücke ab.*

Der Anfangs-Punkt des Achsen-Kreuzes VT *ist überhaupt Diametral-Punkt (Centrum) der gefundenen Kurve, weil je zwei radii vectores, welche die X-Achse beziehungsweise unter den Winkeln* α *und* $180 + \alpha$ *schneiden, und demnach in einer Graden liegen, dieselbe Lage haben.*

Man hat für die Winkel α *und* $180 + \alpha$ *die Gröfsen* $x^2_\alpha = \rho^2 \cos^2 \alpha$, $y^2_\alpha = \rho^2 \sin^2 \alpha$ *und* $x^2_{180+\alpha} = \rho^2 \cos^2 (180 + \alpha)$,

$y^2_{180+\alpha} = \rho^2 \sin^2 (180 + \alpha)$ in die diophantische Gleichung einzuführen und erhält demnach $\rho^2_\alpha = \rho^2_{180+\alpha}$.

Die gefundene Kurve ist (vergl. S. 210) eine Ellipse.

Der gröfste $\left(\frac{c^2}{g}\right)$ Durchmesser (hier horizontal gelegen) ist die grofse, der kleinste $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ Durchmesser (hier vertikal gelegen) ist die kleine Achse der Ellipse. Vergl. S. 210.

Die **Bahnen** eines geworfenen Punktes werden für alle Wurf-Richtungen (α) aus O von einer Parabel **umhüllt,** welche **Grenz-Parabel** heifsen soll.

Teilt man den Winkel zwischen der Vertikalen und der Horizontalen aus O in n gleiche Teile, so entsteht eine Reihe von Winkeln $\frac{R}{n}, \frac{2R}{n}, \frac{3R}{n}, \ldots\ldots \frac{nR}{n}$.

Wenn man für jeden dieser Winkel die entsprechende Parabel konstruiert, so schneiden sich je zwei benachbarte Parabeln: die Reihe der so erhaltenen Schnittpunkte bildet ein Polygon, welches für eine elementare Teilung des Winkels R in die Grenz-Parabel übergeht.

Für das Kreuz HOV war

$$x_t = ct \cos\alpha \text{ und } -y_t = ct \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

gegeben, so dafs für x_t und y_t als diophantische Gleichung besteht:

$$-y_t = x_t \,.\, \tan g\,\alpha - x^2_t \,.\, \frac{g}{2c^2 \,.\, \cos^2\alpha}.$$

Nachdem t eliminiert ist, mag y_t und x_t beziehungsweise durch x und y bezeichnet werden.

Eine leichte Transformation führt zu

$$-y \,.\, \cos^2\alpha = x \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha - x^2 \,.\, \frac{g}{2c^2} = -\frac{y}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

und zu

$$-y + x^2 \,.\, \frac{g}{c^2} = x \,.\, \sin 2\alpha + y \,.\, \cos 2\alpha.$$

Dieser diophantischen Gleichung, welche einer Parabel vom Winkel α entspricht, ist diejenige diophantische Gleichung zur Seite zu stellen, welche der nächsten Parabel unserer Schar, d. h. der Parabel vom Winkel $\alpha + \frac{R}{n}$ entspricht.

Der Schnittpunkt beider Parabeln mufs gleichzeitig den Gleichungen

$$1)\ -y + x^2 \,.\, \frac{g}{c^2} = x \,.\, \sin 2\alpha + y \,.\, \cos 2\alpha \text{ und}$$

$$2)\ -y + x^2 \,.\, \frac{g}{c^2} = x \,.\, \sin\left(2\alpha + \frac{2R}{n}\right) + y \,.\, \cos\left(2\alpha + \frac{2R}{n}\right)$$

genügen.

Um die Schnittpunkte (x_1, y_1) der beiden Örter zu bestimmen, subtrahiert man 1) und 2), so dafs resultiert:

$$0 = x\left[\sin\left(2\alpha + \frac{2R}{n}\right) - \sin 2\alpha\right]$$
$$+ y\left[\cos\left(2\alpha + \frac{2R}{n}\right) - \cos 2\alpha\right]$$
$$0 = \left[x \,.\, \cos\left(2\alpha + \frac{R}{n}\right) - y \,.\, \sin\left(2\alpha + \frac{R}{n}\right)\right] . \sin\frac{R}{n}.$$

Für den Schnittpunkt mufs also gelten $\frac{y}{x} = ctg\left(2\alpha + \frac{R}{n}\right)$, *d. h. derselbe mufs auf einer Graden aus O liegen, welche die X-Achse unter bestimmtem Winkel schneidet: um den Schnittpunkt zu konstruieren, benutzt man die gegebene Parabel*

$$-y + x^2 \,.\, \frac{g}{c^2} = x \,.\, \sin 2\alpha + y \,.\, \cos 2\alpha$$

und die gefundene Grade

$$-y \sin\left(2\alpha + \frac{R}{n}\right) + x \,.\, \cos\left(2\alpha + \frac{R}{n}\right) = 0.$$

Das Polygon der Schnittpunkte geht in eine Kurve über, wenn man n mehr und mehr wachsen läfst: man findet die entsprechenden Kurven-Punkte durch Kombination der Parabel

$$-y + x^2 \,.\, \frac{g}{c^2} = x \,.\, \sin 2\alpha + y \,.\, \cos 2\alpha$$

und der Graden $-y + x \,.\, ctg\, 2\alpha = 0.$

Für einen solchen Schnittpunkt gilt:

$$x_1 = \frac{c^2}{g} \,.\, ctg\, \alpha \text{ und } y_1 = -\frac{c^2}{2g} + \frac{c^2}{2g} \,.\, ctg^2 \alpha.$$

Man findet also für die Reihe dieser Schnittpunkte durch Elimination von α als diophantische Gleichung:

$$\frac{2c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2g} + y_1\right) = x^2_1.$$

Die Achse VOV' teilt die Kurve in zwei kongruente Teile.

Verschiebt man die Horizontal-Achse um $\frac{c^2}{2g}$ *parallel mit sich nach oben, so bestehen für das neue Kreuz (x, y) in Bezug auf das alte die Relationen* $x = x_1$ *und* $\frac{c^2}{2g} + y_1 = y$.

Demnach ist die Grenz-Kurve eine Parabel $x^2 = 2y \,.\, \frac{c^2}{g}$ *mit dem Parameter* $\frac{c^2}{g}$.

Der Scheitel der Parabel liegt in der gemeinsamen Direktrix der Parabel-Schar, während ihr Focus in den Anfangs-Punkte O der Bewegung fällt.

Keine Parabel aus der Schar überschreitet das Feld, welches durch die **Grenz-Parabel** abgeteilt wird.

Für eine bestimmte Entfernung (x') von O ist die Vertikal-Ordinate y' der Grenz-Parabel gegeben als

$$y' = \frac{g}{2c^2} \cdot x'^2 - \frac{c^2}{2g}.$$

Für dieselbe Stelle (x') ist die Vertikal-Ordinate der Parabel vom Winkel α gegeben als:

$$y'' = x'^2 \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} - x' . \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Differenz

$$y'' - y' = \frac{g}{2c^2}\left(x'^2 . \operatorname{tg}^2 \alpha - 2x' . \frac{c^2 \operatorname{tg} \alpha}{g} + \frac{c^4}{g^2}\right)$$

$$= \frac{g}{2c^2}\left(x' . \operatorname{tg} \alpha - \frac{c^2}{g}\right)^2$$

ist stets positiv, d. h. y' ist seinem absoluten Betrage nach (y'' und y' sind negative Gröfsen) stets gröfser als y'', welchen Wert auch Winkel α haben mag.

Sollen nun alle möglichen Bahnen aus O betrachtet werden, bei denen die Anfangs-Geschwindigkeit c dieselbe bleibt, so hat man von **einer** Ebene zu mehreren Ebenen überzugehen.

Man betrachtet nach einander die einzelnen Vertikal-Ebenen, welche durch VOV' gehen, d. h. man denkt die Ebene HOV um VOV' gedreht.

Die Schar der Graden, welche als gemeinsame Direktrix für je eine Ebene gelten, bildet eine Horizontal-Ebene, welche von O um $\frac{c^2}{2g}$ entfernt ist.

Drehung von DD' um VOV'.

Die Schar der Fokal-Kreise, deren jeder für eine Ebene gilt, bildet eine Kugel, deren Centrum in O liegt.

Dieselbe berührt die Ebene der Direktrices.

Drehung des Kreises vom Radius $\frac{c^2}{2g}$ um VOV'.

Die Schar der Ellipsen, deren jede für eine Ebene gilt, bildet ein verkürztes Rotations-Ellipsoid, dessen Centrum in der Höhe $\frac{c^2}{4g}$ senkrecht über O liegt.

Die kleine Achse $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ des Ellipsoides steht vertikal, die Schar der gröfseren Achsen $\left(\frac{c^2}{g}\right)$ füllt eine Horizontal-Ebene aus.

Das Ellipsoid geht durch den Punkt O und berührt die Ebene der Direktrices.

Drehung der Ellipse um VOV'.

Ein Ellipsoid hat im allgemeinen drei rektanguläre Achsen von ungleicher Länge.

Werden zwei Achsen einander gleich, so entsteht ein Rotations-Ellipsoid, welches durch Drehung einer Ellipse um eine ihrer Achsen hergestellt werden kann: man unterscheidet verkürzte und

verlängerte Rotations-Ellipsoide, je nachdem die Drehung um die kleinen oder um die grofsen Achsen erfolgt.

Werden alle drei Achsen einander gleich, so entsteht eine Kugel.

Die Schar der Grenz-Parabeln, deren jede für eine Ebene gilt, bilden ein Rotations-Paraboloid, welches die Ebene der Direktrices berührt.

Drehung der Parabel um VOV'.

Eine Fläche, welche in bestimmter Lage durch alle Vertikal-Schnitte in Parabeln und durch alle Horizontal-Schnitte in Ellipsen geschnitten wird, heifst elliptisches Paraboloid.

Wenn die Achsen der Ellipsen einander gleich werden, so entsteht ein Kreis-Paraboloid, welches den Namen Rotations-Paraboloid führt.

Alle diese Verhältnisse lassen sich in einem gewissen Grade der Annäherung durch einen Springbrunnen [1]) zur Anschauung bringen.

Die höchsten Punkte der einzelnen Tropfen-Bahnen bilden ein Rotations-Ellipsoid, dessen höchster Punkt die Horizontal-Ebene der Direktrices berührt.

Die ganze in Bewegung befindliche Wassermasse wird von einem Rotations-Paraboloid umschlossen.

Es ist selbstverständlich, dafs die genauere Theorie des Springbrunnens ein dynamisches Problem ist, bei welchem es sich um die gegenseitigen Beeinflussungen der einzelnen Teile des bewegten Körpers von veränderlicher Gestalt (Wasser-Säule) handelt.

B. **Die Theorie des Schiefsens.** Die Grenz-Parabel, welche bei der Behandlung des idealen Springbrunnens von einer gewissen Bedeutung war, leistet auch für die Untersuchung von Geschofs-Bahnen, welche verschiedenen Elevations-Winkeln entsprechen, gute Dienste.

Obwohl die Punkte von Körpern, welche in der Nähe der Erdoberfläche geworfen werden, niemals Parabeln beschreiben, so besteht doch die grundlegende Aufgabe der Ballistik in der Konstruktion einer Parabel aus O, welche durch einen gegebenen Punkt P geht.

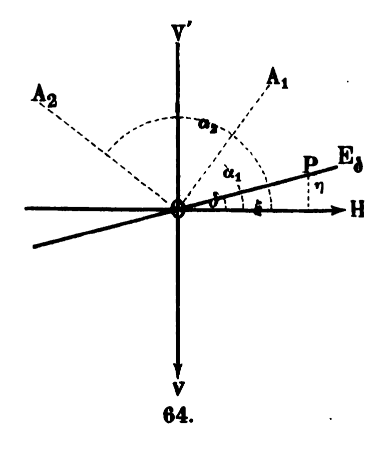
Bei einer strengen Behandlung des Problems hätte man statt der Parabel die sogenannte Ballistische Kurve einzuführen, auf welcher der Scheitelpunkt nicht mehr gleiche Äste trennt.

Die Länge des aufsteigenden Astes verhält sich hier zur Länge des absteigenden Astes etwa wie 3 : 2, d. h. der absteigende Ast ist steiler als der aufsteigende.

Die Bewegung eines Punktes in Widerstand leistender Umgebung (z. B. Luft) geschieht auf Ballistischen Kurven.

---

1) Vergl. Schell, Theorie I, S. 365. Ideale Fontänen.



64.

Innerhalb der Ebene VOP mag P in seiner Lage gegen das Kreuz XOV durch seine Koordinaten ξ und η gegeben sein.

Soll P auf einer Parabel aus O liegen, welche zu einem Winkel α gehört, so müssen die Maſszahlen von ξ und η der diophantischen Gleichung der Bahn genügen (Figur 64).

Man hat also:

$$-\eta = \xi \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha - \xi^2 \,.\, \frac{g}{2\,c^2 \,.\, \cos^2\alpha}$$

$$= \xi \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha - \xi^2 \,.\, \frac{g}{2\,c^2}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha).$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{tg}^2\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \frac{c^2}{g \,.\, \xi} = \frac{2\,c^2}{g} \,.\, \frac{\eta}{\xi^2} - 1$$

und

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\xi}\left(\frac{c^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2\,c^2}{g}\left[\frac{c^2}{2\,g} + \eta\right] - \xi^2}\right).$$

Allen Punkten (ξ, η), für welche $\frac{2\,c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2\,g} + \eta\right) - \xi^2 > o$ ist, können **zwei** reelle Winkel α' und α'' zugeordnet werden.

Allen Punkten (ξ, η), für welche $\frac{2\,c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2\,g} + \eta\right) - \xi^2 < o$ ist, können **keine** reelle Winkel α' und α'' zugeordnet werden.

Allen Punkten (ξ, η), für welche $\frac{2\,c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2\,g} + \eta\right) - \xi^2 = 0$ ist, d. h. für welche eine bestimmte diophantische Gleichung (Grenz-Parabel) gilt, läſst sich **ein** Winkel α zuordnen.

Die **Grenz-Parabel** umschlieſst alle überhaupt erreichbaren (c) Punkte.

Für Punkte $P = (\xi, \eta)$, welche auf der **Grenz-Parabel** liegen, giebt es **einen**, durch $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{c^2}{g \,.\, \xi}$ bestimmten Winkel, unter welchem eine Parabel in O konstruiert werden muſs, wenn sie durch P gehn soll.

Legt man durch O und P eine Ebene E_δ, welche mit der Horizontalen den Winkel δ bildet, so existiert bei jeder Bahn für diese Ebene in gleicher Weise wie für die Horizontal-Ebene eine bestimmte Wurfweite w_δ.

Die Maxima von w_δ werden offenbar durch den Schnitt der Ebene (δ) und des Grenz-Paraboloids gegeben, d. h. durch die radii vectores einer bestimmten Ellipse geliefert.

In der Vertikal-Ebene V'OH besteht für einen Punkt der Grenz-Parabel die diophantische Gleichung

$$\frac{2c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2g}+\eta\right)-\xi^2=0,$$

während aufserdem $-\eta = \xi \,.\, \mathrm{tg}\, \delta$ ist.

Demnach hat man für ξ die Gleichung

$$\xi^2 + 2\,\xi \,.\, \frac{c^2\ \mathrm{tg}\,\delta}{g} = \frac{c^4}{g^2},$$

deren Lösungen

$$\xi_1 = +\frac{c^2}{g}\,\mathrm{tg}\left(45-\frac{\delta}{2}\right) \text{ und } \xi_2 = -\frac{c^2}{g}\,.\,\mathrm{ctg}\left(45-\frac{\delta}{2}\right)$$

sind.

Auf der geneigten Ebene (δ) giebt es innerhalb der Vertikal-Ebene HOV zwei Punkte ($\xi_1\ \eta_1$) und (ξ_2, η_2), welche das Maximum der Wurfweite (w_δ) für die ganze Ebene darstellen.

Der eine Punkt (ξ_1, η_1) entspricht dem ansteigenden Teile, der andre Punkt (ξ_2, η_2) entspricht dem absteigenden Teile der Ebene.

Dem ersten Punkt entspricht

$$tg\,\alpha_1 = \frac{c^2}{g\,.\,\xi_1} = ctg\left(45-\frac{\delta}{2}\right) = tg\left(45+\frac{\delta}{2}\right),$$

dem andern Punkte entspricht

$$tg\,\alpha_2 = \frac{c^2}{g\,.\,\xi_2} = -\,tg\left(45-\frac{\delta}{2}\right) = tg\left(135+\frac{\delta}{2}\right)$$
$$= tg\left[90+\left(45+\frac{\delta}{2}\right)\right].$$

Die Lösung $\alpha_1 = 45+\frac{\delta}{2}$ *führt zu* $90-\alpha_1 = \frac{1}{2}(90-\delta)$ *d. h. die Richtung* A_1 *von* α_1 *halbiert den Neigungs-Winkel der Vertikalen gegen die Ebene* E_δ.

Die Lösung $\alpha_2 = 90+\left(45+\frac{\delta}{2}\right)$ *zeigt, dafs die Richtungen von* α_1 *und* α_2 *auf einander normal stehen, d. h. die Richtung* A_2 *von* α_2 *halbiert das Supplement des Neigungs-Winkels der Vertikalen gegen die Ebene* E_δ.

Für einen Punkt Q von E_δ, welcher nicht innerhalb der Vertikal-Ebene HOV liegt, bildet OQ mit der Horizontal-Ebene nicht den Winkel δ.

Die Maxima der Wurfweiten für solche Punkte Q lassen sich leicht berechnen, wenn man den Winkel $V'OQ = \eta$ kennt.

Man hat innerhalb der Ebene V′OQ eine horizontale Achse OH′ anzunehmen und die für V′OH durchgeführten Betrachtungen für V′OH′ zu wiederholen.

Die Schnittpunkte aller Bahnen aus O, welche für E_δ Maxima der Wurfweite liefern, bilden eine **Ellipse**, welche bereits als Schnitt der Ebene und des Grenz-Paraboloids hingestellt wurde.

Diese Ellipse geht für die Horizontal-Ebene (E_0) *in einen Kreis über.*

Hier ist für jede Vertikal-Ebene $\alpha_1 = 45$ *und* $\alpha_2 = 135$.

Handelt es sich nicht darum, die Maximal-Wurfweite für E_δ zu gewinnen, sondern einen bestimmten Punkt (ξ, η) auf E_δ zu erreichen, so liefert

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\xi}\left[\frac{c^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2\,c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2\,g} + \eta\right) - \xi^2}\right]$$

für α zwei Werte.

Bestimmt man allgemein die Wurfweite w_δ, welche in Bezug auf E_δ bei einem Winkel α_1 erreicht wird, so gelangt man zur Formel:

$$w_\delta = \frac{2\,c^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha \,.\, \sin (\alpha - \delta)}{\cos^2 \delta}.$$

Hier ist $w_\delta = \frac{\xi}{\cos \delta}$, *während gleichzeitig*

$$-\eta = \xi \,.\, tg\, \alpha - \xi^2 \,.\, \frac{g}{2\,c^2 \cos^2 \alpha}$$

und $-\eta = \xi \,.\, tg\, \delta$ *in Geltung ist.*

Handelt es sich umgekehrt darum, die zu Punkt (ξ, η) gehörigen Wurfweite w_δ zu erreichen, so hat man Winkel α aus der Formel für w_δ zu bestimmen.

Bei der Auflösung von $\cos \alpha \,.\, \sin (\alpha - \delta)$ *gelangt man offenbar zu einer quadratischen Gleichung für* $\sin 2\,\alpha$ *oder für* $\cos 2\,\alpha$, *während andrerseits* $w_\delta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ *und* $\cos \delta = \frac{\xi}{w_\delta}$ *ist.*

Diese Gleichung ersetzt man für die Berechnung besser durch

$$tg\, \alpha = \frac{1}{\xi}\left[\frac{c^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2\,c^2}{g}\left(\frac{c^2}{2\,g} + \eta\right) - \xi^2}\right].$$

Die Formel für w_δ zeigt, dafs die Lösungen α' und α'' zu zwei Richtungen führen, deren Winkel durch die früher bestimmte Richtung (A_1 oder A_2) des einen Maximums (α_1 oder α_2) halbiert wird.

Man hatte z. B. $\alpha_1 = 45 + \frac{\delta}{2}$.

Soll die Richtung des nicht horizontalen Schenkels von α_1 *die Richtungen der nicht horizontalen Schenkel von* α' *und* α'' *halbieren, so hat man* $\alpha' = 45 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon$ *und* $\alpha'' = 45 + \frac{\delta}{2} - \varepsilon$ *zu setzen.*

Es ist leicht zu zeigen, dafs für diese Werte (α' *und* α'') *die Gröfse* $\cos \alpha \,.\, \sin (\alpha - \delta)$ *denselben Wert erhält.*

Wenn man die Wurf-Bahn als Ort des Mittelpunktes einer physischen Kugel ansieht, so gelangt man durch die vorangegangenen Betrachtungen näherungsweise zu einer Theorie des Schiefsens.

Um einen bestimmten Punkt zu treffen, kann man bei derselben Anfangs-Geschwindigkeit zwei verschiedene Winkel α' und

α'' benutzen, welche man hier Elevations-Winkel nennt: die dazugehörigen Richtungen bilden mit der Richtung, welche der Maximal-Schufsweite entspricht, gleiche Winkel.

Man unterscheidet infolgedessen (in älterer Bezeichnung) in Bezug auf ein bestimmtes Ziel Bogen-Schufs (Bomben) und Flach-Schufs (scharfes Geschofs)[1].

Soll z. B. ein Gebäude (P) von einem Punkte (O), der 100 m tiefer gelegen ist und in Bezug auf die Horizontale eine Entfernung (ξ) *von 1525 m hat, mit einer Anfangs-Geschwindigkeit von 150* $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ *beschossen werden, so findet man für Bomben* $\alpha' = 68^0, 28' \, 50''$ *und für scharfe Geschofse* $\alpha'' = 25^0 \, 16'$.

Um die Geschwindigkeit für jeden Punkt der Bahn herzuleiten, hat man die Einzel-Geschwindigkeiten $c \, . \cos\alpha$ und $g\,t - c \sin\alpha$ geometrisch zu addieren, d. h. man hat

$$v = \sqrt{(c \, . \cos\alpha)^2 + (gt - c \sin\alpha)^2} = \sqrt{c^2 + 2\,g\left(\frac{g}{2}\,t^2 - ct \sin\alpha\right)}$$

zu bilden.

Bezeichnet man die Flughöhe nach Ablauf der Zeitdauer t wiederum durch y_t, *so ist* $\frac{g}{2}\,t^2 - ct \, . \sin\alpha = y_t$ *und* $v = \sqrt{c^2 + 2g \, . y_t}$.

Die Flugzeit t_δ, d. h. die Zeit-Dauer vom Aufsteigen bis zum Niederfallen, ist für eine Ebene E_δ leicht herzuleiten, wenn man bedenkt, dafs die Projektion des bewegten Punktes auf E_δ während der Flug-Zeit t_δ die Wurfweite w_δ in gleichförmiger Bewegung durcheilt.

Man findet $t_\delta = \frac{2\,c}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\cos\delta}$, d. h. also im besonderen $t_0 = \frac{2\,c}{g} \, . \sin\alpha$.

Für die Horizontal-Ebene (O H) ist die Geschwindigkeit des Projektions-Punktes $c \, . \cos\alpha$, *für die geneigte Ebene* (E_δ) *ist die Geschwindigkeit des Projektions-Punktes* $\frac{c \, . \cos\alpha}{\cos\delta}$.

Die Ballistik darf von dem Einflusse des widerstehenden Mittels nicht absehen[2]).

In den Actis eruditorum (Lips. 1719) behandelte Johannes Bernoulli gleichzeitig mit seinem Neffen Nikolaus Bernoulli das dynamische Problem der Wurf-Bewegung im widerstehenden Mittel.

Legendre (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1782) und

---

1) Man spricht jetzt von direktem und indirektem Feuer und bezeichnet letzteres als Vertikal-Feuer.

2) Vergl. Nell in Grunerts Archiv, Teil 46 und 47.

Jacobi (Crelle, Journal, Bd. XXIV) vervollständigten die Lösungen.

Die Probleme der Ballistik sind äuſserst verwickelt, weil die modernen Geschosse einerseits keine Kugeln sind und weil dieselben auſserdem bei der Bewegung Drehungen vollführen.

So wird z. B. das Geschoſs unseres Infanterie-Gewehres (M. 71) aus starkem Bleidraht gepreſst, so daſs es eine cylindrisch ogivale (ogive = gotischer Spitzbogen) Form annimmt.

Die Züge des Gewehres geben dem Geschosse eine Dreh-Bewegung um eine Achse, welche der Achse des Rohres (Seelen-Achse) parallel ist.

Durch die ogivale Endgestaltung wird der Widerstand der Luft möglichst unschädlich gemacht, so daſs die Flugbahn relativ wenig verkürzt erscheint.

Durch die Dreh-Bewegung wird dem Geschosse seitlichen Einflüssen gegenüber (Wind etc.) eine gewisse Stabilität gegeben, es wird in seiner Bahn erhalten.

III. Die Dynamik der Physik.

1. Die Begründung der physikalischen Dynamik.

Die **allgemeinste Annahme**, welche man in Bezug auf die Bewegungen verschiedener Systeme (beziehungsweise der Teile eines Systems) machen kann, ist die, daſs für die einzelnen Bewegungen **gegenseitige Hemmungen und Förderungen** in Rechnung zu bringen sind.

Jede Festsetzung über diese Beeinflussungen führt zu einer bestimmten Form der Dynamik, unter deren Schar als einfachste diejenige bezeichnet werden müſste, bei welcher die Maſs-Zahlen der gegenseitigen Hemmungen und Förderungen unter allen Umständen „Null“ sind, bei welchen man also die Grenzlinien der Phoronomie nicht überschreitet.

Erfahrungsmäſsig steht fest, daſs diese einfachste Form bei den Bewegungen der Naturkörper, d. h. bei den physischen Bewegungen nicht in Geltung ist, daſs hier vielmehr neben den beiden Gröſsen-Arten der Phoronomie (Länge und Zeit) noch eine Gröſsen-Art (Masse) eingeführt werden muſs, wenn man zu einer Darstellung der Bewegungs-Verhältnisse gelangen will.

Die Dynamik der Physik genieſst andern Formen der Dynamik gegenüber den Vorzug mit einer **einzigen dynamischen Gröſsen-Art** auszukommen, so daſs hier einschlieſslich der **beiden phoronomischen Gröſsen-Arten** im Maſs-Systeme **drei verschiedene Gröſsen-Arten** auftreten.

Die **dynamischen Grundbegriffe**, mit deren Definition die Untersuchung beginnen wird, müssen sich durch jene **drei** Gröſsen-Arten darstellen lassen.

Für die Verwendung der Grundbegriffe bedient man sich gewisser **Prinzipien:** wenn man eine Beziehung, deren Gültigkeit hier und da bewiesen werden konnte, auch in Fällen voraussetzt, wo ein solcher Beweis noch nicht erbracht worden ist, so macht man die Voraussetzung dieser allgemeinen Gültigkeit zum Prinzip der Forschung.

Da alle physikalischen Messungen auf gewisse Fundamental-Gröſsen der Dynamik zurückweisen, so wird die **Bestimmung der dynamischen Einheiten** im besondern zu behandeln sein.

A. Die Grundbegriffe.

§. 1. Bewegungs-Energie und Bewegungs-Gröſse.

Der **Satz von der Konstanz der Masse** sagt aus, daſs es für jeden physischen Körper einen bestimmten **Zahlen-Koëfficient** seiner Wirksamkeit giebt, welcher keinen Änderungen unterworfen ist.

Die Teilbarkeit der physischen Körper, welche erfahrungsmäſsig unbegrenzt ist, führt dazu, einen solchen **Koëfficienten** stets als **Summe anderer Koëfficienten** derselben Art aufzufassen.

Des näheren bestimmt werden diese Verhältnisse durch den **Satz von der Konstanz der Massen-Summen,** insofern als einer beliebigen Zerlegung eines Körpers stets eine bestimmte Gruppe von Teil-Körpern entspricht, deren Massen zusammengenommen wiederum die Masse des ganzen Körpers liefern.

Da diese Beziehung für **jede** Zerlegung gelten muſs, so wird man darauf geführt, **jedem** Punkte P_i eines physischen Körpers einen bestimmten Koëfficienten seiner Wirksamkeit m_i zuzuordnen und dabei für einen Körper von der Masse m die Gleichung $m = \Sigma m_i$ vorauszusetzen.

Dabei ist jeder Koëfficient m_i unter allen Umständen unendlich klein vorauszusetzen, da die Anzahl der im Körper zusammentretenden Punkte jedenfalls unendlich groſs ist, während $m = \Sigma m_i$ stets einen endlichen Wert erhält.

Der letzte Schluſs würde hinfällig werden, wenn in jedem physischen Körper nur eine endliche Anzahl von Punkten vorhanden wäre, deren Koëfficienten von Null verschieden sind: diese Annahme widerspricht der Erfahrung über die Konstanz der Massen-Summe bei beliebiger Zerlegung.

Wenn man jedem Punkt P_i eines physischen Körpers einen

bestimmten Koëfficienten seiner Wirksamkeit zuordnet, so sagt man damit aus, dafs Punkte, deren Koëfficienten im Verhältnisse p : q stehen, sich in ihren Wirkungen verhalten wie p zu q.

Wenn das Verhältnis p : q für je zwei Punkte den Wert 1 hat, so gelangt man zu der Vorstellung von homogenen Systemen.

Da bei Körpern, welche in jeder Hinsicht als gleichartig (z. B. bei Teilen eines und desselben Bleistückes) erscheinen, die Masse dem Volumen im allgemeinen proportional gefunden wird, so ist man auch im Einklange mit dem früher (S. 122) verwandten Satze, dafs für gleiche Raumteile homogener Kontinua die bezüglichen Gröfsen Σm_t als gleichwertig anzunehmen sind.

Die **Mafs-Zahl der Masse** bestimmt im Verein mit **Mafs-Zahlen der phoronomischen Gröfsen** die **Energie der Bewegung**, deren Dimension als $l^2 m t^{-2}$ angegeben wurde.

Es mag daran (S. 33) erinnert werden, dafs man den Ausdruck „Energie der Bewegung“, dessen Beziehung zur „Stärke der Empfindung“ scharf betont worden ist, zwar auf verschiedene, aber nicht auf beliebige Weise in eine mathematische Form übertragen darf.

Der **Unterschied in der Wirksamkeit** einer **geworfenen** und einer **abgeschossenen** Büchsenkugel weist darauf hin, dafs die Energie der Bewegung mit der **Geschwindigkeit** der Bewegung wächst, während der **Unterschied in der Wirksamkeit** einer **Büchsenkugel** und einer **Kanonenkugel**, welche **gleiche Geschwindigkeit** haben, anzeigt, dafs die Energie der Bewegung auch mit der **Masse** wächst.

Man könnte demnach unter andern eine Summe von Ausdrücken $\mathbf{m}^\lambda . \mathbf{v}^\nu$, in welcher λ und ν positive Zahlen sind, benutzen, um eine mathematische Darstellung des Wortes „Energie“ zu liefern.

Dafs man nun grade eine Gröfse von der Dimension $l^2 m t^{-2}$ auswählt, hat seine hohe Bedeutung.

In der Theorie der gleichmäfsig geänderten Bewegungen des Punktes (S. 187) existiert eine Formel, welche einer grofsen Verallgemeinerung fähig ist: es handelt sich um die Beziehung zwischen Anfangs-Geschwindigkeit und End-Geschwindigkeit.

Dort war gefunden worden:

$$v^2_t - v^2_o = 2\,as.$$

Wenn man diese Formel mit der Mafs-Zahl der Masse multipliciert, welche dem bewegten Punkte zukommt, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2_t - \frac{1}{2}\, m\, v^2_o = mas.$$

Auf der **linken Seite** steht eine Gröfse von der Dimension $l^2 m t^{-2}$, welche eine zulässige Form für die Übertragung des Wortes „**Energie**“ darstellt, während auf der **rechten Seite** eine Gröfse von der Dimension $l^2 m t^{-2}$ steht, welche man **Arbeit**

zu nennen pflegt, weil sie ein Mafs für Leistungen, d. h. für ausgeübte Wirkungen liefert.

Der B e g r i f f d e r A r b e i t *wird zunächst am besten durch die Verhältnisse illustriert, welche an der Erdoberfläche beim freien Falle obwalten.*

Die einfachsten Beziehungen sind hier gegeben, wenn sich alle Punkte eines Körpers auf einem Parallel-Systeme von Vertikalen (Translation) bewegen, d. h. wenn keine Drehungen auftreten.

Hier gelangt man durch Summation ($\Sigma m_i = m$) *von der Formel für* P_i

$$\frac{1}{2} m_i v^2_t - \frac{1}{2} m_i v^2_o = m_i g s$$

zu der allgemeineren Formel

$$\frac{1}{2} m v^2_t - \frac{1}{2} m v^2_o = m . g . s.$$

Bei f r e i e m *Falle hat* v_o *den Wert 0, so dafs*

$$\frac{1}{2} m v^2_t = m . g . s$$

resultiert, wobei die A r b e i t *des sinkenden Körpers hier der Fallhöhe (s), der Masse (m) und der Beschleunigung (g) proportional ist.*

*Die Wahl des Wortes „*A r b e i t*" zur Bezeichnung von* $m . g . s$ *rechtfertigt sich dadurch, dafs ein fallender Körper benutzt werden kann, um* A r b e i t z u l e i s t e n *in dem Sinne, wie etwa ein Mensch vermittelst seiner Arme und Hände* A r b e i t *leistet.*

Man denke hier z. B. an den Rammbock, welcher durch die vereinten Kräfte von mehreren Arbeitern emporgezogen wird, um dann in freiem Falle den Kopf des einzurammenden Pfahles zu treffen: neben der Masse des Rammbockes und neben der Länge der Erhebungsstrecke hängt die Gröfse der geleisteten Arbeit offenbar auch von g ab, wie man leicht übersieht, wenn man sich das erfahrungsmäfsig gegebene g mehr und mehr abnehmend denkt.

Das Beispiel von dem Rammbocke zeigt noch mehr. So oft der Klotz durch die Kräfte der Arbeiter in die bestimmte Höhe gebracht worden ist, von welcher er herabfallen soll, ist er imstande, Arbeit von gleicher Gröfse $m . s . g$ *zu leisten, so dafs die Leistung der Arbeiter gewissermafsen jedesmal darin besteht,* A r b e i t v o n b e s t i m m t e r G r ö f s e *in der Maschine aufzuspeichern, d. h. das Emporheben des Rammbockes entspricht offenbar auch einer Arbeit von bestimmter Gröfse.*

Während jeder Punkt des Klotzes beim Herabfallen innerhalb jedes Zeitteilmomentes τ *die Geschwindigkeit* $g . \tau$ *erhält, handelt es sich beim Emporheben darum, diesen Zusatz* $g . \tau$ *in jedem Augenblicke zu vernichten, d. h.* $g . \tau$ *in entgegengesetzter Richtung hinzuzufügen.*

Dieses Vernichten ist erfahrungsgemäfs um so schwerer, je gröfser die fallende Masse ist.

Diese Betrachtungen zeigen, dafs man die Arbeit doppelt definieren kann: für jeden Punkt des gehobenen Körpers sind dieselben regelmäfsig auftretenden Zusätze ($g . \tau$) der Geschwindigkeit in Rechnung zu bringen, welche beim fallenden Körper in Frage kommen, so dafs hier nur ein Unterschied in der Richtung übrig bleibt, den man durch Vorzeichen (+ und —) darstellen könnte.

Die Gröfse m . s . g stellt den Wert der Arbeit dar, zu welchem man gelangt, wenn man den Körper seiner Bewegung entgegen unter sonst gleichen Verhältnissen auf seiner Bahn von Punkt zu Punkt zurückbewegt denkt.

Die Gröfse m . s . g stellt aber noch einen Arbeits-Wert dar und zwar den, welcher der wirklichen Bewegung des Körpers entspricht.

Unter allen Darstellungen des Wortes „Energie“ bietet die hier gewählte infolge der Gleichung

$$\frac{1}{2} m v^2_t - \frac{1}{2} m v^2_0$$

den Vorteil, **Arbeit** und **Energie** in einem sehr einfachen Zusammenhange erscheinen zu lassen.

Diese Darstellung hat sich nun in der That sehr zweckmäfsig erwiesen, da die oben benutzte Gleichung eine sehr weitgehende Bedeutung hat.

Obwohl „Arbeit“ und „Energie“ begrifflich ganz verschieden sind, so müssen sie doch vermöge der obigen Gleichung als Gröfsen von gleicher Dimension gelten.

Zunächst kann man sich unter Beibehaltung **eines** Körpers von der **Beschränkung** der gleichmäfsig geänderten Bewegung losmachen. Die Bahn mag in mehrere an einander schliefsende Stücke $[s_1]$, $[s_2]$ . . . . . $[s_n]$ zerfallen, welche beziehungsweise in gleichmäfsig geänderter Bewegung mit den Beschleunigungen a_1, a_2 . . . . . . a_n durchlaufen werden. Bezeichnet man die Anfangs- und die End-Geschwindigkeiten auf den einzelnen Stücken beziehungsweise mit

$$(p_1, q_1), (p_2, q_2) \ldots\ldots (p_n, q_n),$$

so hat man folgendes Schema:

$$\text{Stück } 1 \ldots\ldots \tfrac{1}{2} m q^2_1 - \tfrac{1}{2} m p^2_1 = m . a_1 . s_1$$
$$\text{Stück } 2 \ldots\ldots \tfrac{1}{2} m q^2_2 - \tfrac{1}{2} m p^2_2 = m . a_2 . s_2$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\text{Stück } n \ldots\ldots \tfrac{1}{2} m q^2_n - \tfrac{1}{2} m p^2_n = m . a_n . s_n.$$

Durch Addition folgt, da man

$$q_1 = p_2, q_2 = p_3, \ldots\ldots q_{n-1} = p_n$$

zu setzen hat,

$$\tfrac{1}{2} m q^2_n - \tfrac{1}{2} m p^2_1 = m . a_1 . s_1 + m . a_2 . s_2 + \ldots m . a_n . s_n.$$

Bezeichnet man wiederum die Anfangs- und die End-Geschwindigkeit der ganzen Bewegung mit v_t und v_o, so hat man:

$$1/2\, m v^2_t - 1/2\, m v^2_o = \Sigma\, m \, . \, a_i \, . \, s_i.$$

Auf der rechten Seite steht die Summe der Arbeiten für die einzelnen Bahn-Stücke, welche kleiner und kleiner werden können, ohne dafs die linke Seite ihre Form ändert.

Für Elementar-Inkremente der Bahn gelangt man zu jeder beliebigen Bewegung, da hier die unendliche Reihe a_1, a_2, a_3 .... jedes Gesetz der Beschleunigung darzustellen gestattet.

Von **einer** beliebigen Bewegung kann man zu einer **Gruppe** (m′, m″ .....) von einander unabhängiger Bewegungen [1]) übergehen, indem man für jede die eben entwickelte Formel anwendet und dann addiert. Bezeichnet man die Summe $\Sigma \frac{1}{2} m v^2_t$ durch E_t, so gelangt man zu einer Formel:

$$E_t - E_o = \Sigma\, m' . a'_i . s'_i + \Sigma\, m'' . a''_i . s''_i + \ldots .$$

Diese Formel drückt den Satz der **Äquivalenz von Energie und Arbeit** aus.

Die Differenz der Energieen eines dissoluten Systems, berechnet für zwei verschiedene Zeit-Momente, ist gleich der Arbeit, welche nötig wäre, um das System aus der zweiten Lage in die erste Lage zurückzuführen, wenn man die einzelnen Punkte in umgekehrtem Sinne auf ihren Bahnen unter sonst gleichen Verhältnissen zurückbewegte.

Dieselbe Energie ist aber auch gleich der Arbeit, welche bei jenem Übergange in der That geleistet wird.

Dabei ist die Beschleunigung, welche in den Ausdruck für die Arbeit eingeht, stets auf der Bahn (Tangential-Beschleunigung) zu messen.

Der Satz von der Äquivalenz ist eine ***Identität****, welche sich aus der mathematischen Darstellung der Ausdrücke „Energie“ und „Arbeit“ mit Notwendigkeit ergiebt, also keiner Bestätigung durch die Erfahrung bedarf.* ***Andere*** *Definitionen würden zu* ***anderen*** *Sätzen führen.*

Man pflegt das Produkt **m . a** abkürzend **Kraft** oder auch **bewegende Kraft** [2]) zu nennen, so dafs man jede **Arbeit** als **Produkt** einer **Kraft** und einer **Länge** auffassen darf.

Die **Dimension der Kraft ist l . m . t^{-2}.**

Bezeichnet man die Kraft mit k und die Arbeit mit A, so lautet die Formel, von welcher ausgegangen wurde,

$$1/2\, m v^2_t - 1/2\, m v^2_o = k \, . \, s = A.$$

Aus dieser folgt dann:

$$1/2\, m v^2_t - 1/2\, m v^2_o = \Sigma\, k_i \, . \, s_i = \Sigma\, A_i = A$$

$$\textit{und}\ E_t - E = \Sigma\, k'_i . s'_i + \Sigma\, k''_i . s''_i + \ldots = A' + A'' + \ldots = A.$$

---

1) Entsprechend der Vorstellung eines dissoluten Systems.

2) Im Gegensatz zur Beschleunigung, die auch „beschleunigende Kraft“ genannt wird.

Die Einführung der Kraft gestattet auch für die sogenannte **Bewegungs-Gröfse** eine Beziehung herzuleiten, welche sich leicht in Worte kleiden läfst, falls man noch das Produkt aus der Kraft und der Zeit-Dauer, während welcher die Kraft (beziehungsweise die Beschleunigung) in Geltung ist, den **Antrieb der Kraft** nennt.

Das Produkt **m . v**, welches als die einfachste Übersetzung des Ausdrucks Energie verwandt werden könnte, wenn diese nicht bereits als $\frac{1}{2}$ m . v² eingeführt wäre, führt den Namen **„Bewegungs-Gröfse“**.

Die **Dimension der Bewegungs-Gröfse ist $l . m . t^{-1}$.**

In der Theorie der gleichmäfsig geänderten Bewegung des Punktes gilt die Formel:

$$v_t - v_o = a . t$$

Durch Multiplikation mit m geht dieselbe über in

$$m . v_t - m . v_o = m . a . t = k . t.$$

Die Erweiterung für **jede** beliebige Bewegung **eines** Punktes liefert auf dem oben gegebenen Wege

$$m . v_t - m . v_o = \Sigma m_i . a_i . t_i = \Sigma k_i . t_i.$$

Bezeichnet man die Bewegungs-Gröfse eines dissoluten Systems durch B, so gelangt man wiederum durch Addition zu:

$$B_t - B_o = \Sigma k'_i . t'_i + \Sigma k''_i . t''_i + \ldots\ldots$$

Diese Formel drückt den Satz von der **Äquivalenz** von **Bewegungs-Gröfse** und **Kraft-Antrieb** aus:

Die Differenz der Bewegungs-Gröfse eines dissoluten Systems, berechnet für zwei verschiedene Zeit-Momente, ist gleich dem Kraftantrieb, welcher für die Zeit zwischen den beiden Lagen des Systems in Rechnung zu bringen ist.

*Auch dieser Satz ist eine **Identität** der oben bezeichneten Art.*

Würde man m . v als Energie einführen, so würde der Satz

$$\frac{1}{2} m v^2_t - \frac{1}{2} m v^2_o = mas$$

einen andern Ausdruck (Produkt aus Bewegungs-Gröfse und Geschwindigkeit) fordern.

Die beiden Sätze, welche hier für dissolute Punkt-Systeme abgeleitet wurden, haben eine weitergehende Geltung, da man dieselben auf beliebige Punkt-Systeme anwenden kann, nachdem dieselben als dissolute Systeme dargestellt worden sind.

Diese Darstellung wird später durch das d'Alembertsche Princip gewonnen werden.

Die Geschichte der Physik kennt einen langen Streit über die Verwendung der beiden Mafse, welche hier als Energie und als Bewegungs-Gröfse eingeführt wurden.

Descartes hatte (1644) zum ersten Male[1] *mv als Mafs für die bewegende Kraft eines Körpers verwendet, während Leibniz*

1) Principia philosophiae.

bald darauf (1686) diese Gröfse durch mv^2 *ersetzt wissen wollte*[1]).

Erst durch d'Alemberts Traité de dynamique (1743) wurde die Sachlage vollständig geklärt[2]): es handelt sich eben um zwei verschiedene Mafse für die Wirksamkeit der Bewegungen, welchen noch eine Reihe anderer Mafse an die Seite gestellt werden könnten.

Es genügt in der That, irgend einen Ausdruck zu konstruieren, welcher einmal der Masse proportional ist und aufserdem eine Abschätzung der Bewegung gestattet, wobei natürlich eine Festsetzung über die mathematische Darstellung des Wortes „bewegende Kraft eines Körpers“ nötig wird.

§. 2. Die Kräfte der Bewegung.

Wenn man für einen Punkt P_i, welcher einem in Bewegung befindlichen Systeme angehört, die Reihe der Beschleunigungen

$$a^0_i,\ a^I_i,\ a^{II}_i,\ a^{III}_i \ldots\ldots\ldots$$

festgestellt hat, so kann man zu einer Reihe von Gröfsen

$$m_i\,a^0_i,\ m_i\,a^I_i,\ m_i\,a^{II}_i,\ m_i\,a^{III}_i, \ldots\ldots\ldots$$

gelangen, deren einzelne Glieder beziehungsweise **Kräfte von der Ordnung Null, Eins, Zwei, Drei** . . . . heifsen.

Neben der **Bewegungs-Gröfse** ($m_i\,a^0_i$) nimmt hier die **Kraft erster Ordnung** ($m_i\,a^I_i$), welche im allgemeinen schlechthin als **Kraft** oder auch **bewegende Kraft** genannt wird, eine hervorragende Stellung ein.

Da die Bewegungen der Naturkörper fast durchweg auf Bewegungen zurückweisen, für welche die Beschleunigungen zweiter und höherer Ordnung durch relativ verwickelte Ausdrücke darstellbar sind, so bieten die Kräfte, welche Beschleunigungen höherer Ordnung entsprechen, ein relativ geringes Interesse dar.

Da die Beschleunigungen jeder Ordnung durch Strecken darstellbar sind, so können auch die **Kräfte jeder Ordnung** durch **Strecken** abgebildet werden.

Einem **Strecken-Paare** entspricht ein **Kräfte-Paar**.

Da ein Koëfficient m_i *(was er auch sonst bedeuten mag) in der Formel nur als eine bestimmte Zahl erscheint, so ist jede Kraft einem bestimmten Vielfachen einer bestimmten Strecke (d. h. einer bestimmten Strecke) proportional.*

---

1) Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum. Acta Eruditorum. März 1686.

2) Auch Kant hat sich (1747) bemüht für einen Ausgleich zu wirken und zwar in seiner Schrift: Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte.

Für die **Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften** gelten demnach im allgemeinen die **Gesetze für die Zusammensetzung und Zerlegung von Strecken.**

Im besondern ist durch eine Untersuchung des Punkt-Systems, dem die Kräfte angehören, festzustellen, welche Annahmen über die Gleichheit von Strecken beziehungsweise welche Form der Strecken-Addition in diesem oder jenem Falle zur Geltung kommen mufs.

Da für die Behandlung der Beschleunigungen ***eines*** *Punktes die Sätze über die* ***geometrische*** *Addition von Strecken mafsgebend waren, so darf Analoges auch hier vermutet werden.*

Die ***mechanische*** *Addition von Strecken wird vor allem beim unveränderlichen System zur Geltung kommen.*

Den Drehungs-Momenten von Strecken (S. 123) entsprechen nun **Drehungs-Momente von Kräften**, d. h. Kräfte-Paare, welche unter einem bestimmten Zwange der Lage stehen.

Auch das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Ebene gelangt hier zu bestimmter Bedeutung.

Die **Kräfte** bewegter Naturkörper machen sich als **Druck** oder **Zug** bemerkbar.

Es mag nochmals daran erinnert werden, dafs sich die Empfindungen aller Kreise schliefslich als Geleit-Erscheinungen von Bewegungen darstellen, obwohl sie in der That das Ursprüngliche sind und dafs der dynamische Wert einer Bewegung in der Empfindungs-Intensität abgeschätzt wird[1]*, während die Form der Bewegung der Qualität der Empfindung entspricht.*

Daran liegt es, dafs wir in allen Empfindungs-Kreisen Kräfte wahrnehmen, welche sich in letzter Instanz als gleichartig (spezifische Energie) betrachten lassen.

Da übrigens Arbeits-Gröfsen, welche für gleiche Weg-Stücke in Rechnung zu bringen sind, den entsprechenden Kräften proportional sind, so erklärt es sich leicht, dafs die Wirksamkeit der Bewegungen durch Kräfte dargestellt werden kann, während sie ursprünglich als Arbeitsleistung (entsprechend der Intensität der Empfindungen) gegeben wird.

Bewegungs-Gröfse ($m a^0 = m v$), *Bewegungs-Kraft* ($m a^I$) *und Bewegungs-Energie* $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$ *sind schliefslich nur verschiedenartig konstruierte Mafse für dasselbe, deren jedes in dieser oder jener Beziehung gewisse Vorteile darbietet.*

Die Kräfte werden hier durchweg aus der **vorhandenen Bewegung** abgeleitet, indem man das Produkt aus **Beschleunigung** und **Masse** darstellt[2].

---

1) Vergl. Lasswitz, Atomistik und Kriticismus, S. 10 flg.

2) Sie sind, um F. A. Langes scharfen Ausdruck zu gebrauchen,

Früher wurde die Annahme gemacht, dafs jede Bewegung auf eine „bewegende Kraft“ zurückzuführen sei.

Diese **Ursachen** *der Bewegung, welche unter dem Banne des scholastischen Realismus fast wie beseelte Wesen behandelt wurden, sollten an ihren Wirkungen, d. h. an den Bewegungen selbst gemessen werden.*

Um die Bestimmung dieser Dichtungs-Gebilde durchzuführen, stellt man das Axiom auf: Zwischen Ursache und Wirkung herrscht Proportionalität.

Man behandelte nur die beiden Kräfte, welche beziehungsweise als Ursachen der Bewegungs-Gröfse ($m a^0$) und der bewegenden Kraft ($m a^1$) einzuführen sind und unterschied dieselben beziehungsweise als **momentane Kräfte** *(Stofs) und als* **kontinuierliche Kräfte** *(Schwere).*

Jenes Axiom führt nun zu folgender Überlegung:

1. Wenn der Masse Eins beziehungsweise die Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen φ und φ' erteilt werden, so müssen die Ursachen der Bewegungen k und k' im Verhältnisse $\varphi : \varphi'$ stehen.

2. Wenn den Massen m und m' die Geschwindigkeit oder Beschleunigung Eins erteilt wird, so müssen die Ursachen der Bewegungen k und k' im Verhältnisse $m : m'$ stehen.

Daraus folgte das Mafs für die Ursache, d. h. für die momentane oder für die kontinuierliche Kraft aus der Proportion

$$\frac{k}{k'} = \frac{m\,\varphi}{m'\,\varphi'}.$$

Wenn man eine bestimmte Kraft k' zur Einheit wählte, so liefs sich jede andere als

$$k = \frac{k'}{m'\,\varphi'} \cdot m\,\varphi = \varepsilon \cdot m\,\varphi$$

darstellen, wobei die Bestimmung so eingerichtet werden konnte, dafs ε den Wert Eins erhielt.

Diese Anschauungsweise führte ferner zu einem Postulat, das unter dem Namen „Princip der Trägheit“ bekannt ist und folgendermafsen lautet: Jeder Körper verharrt in seinem Bewegungs-Zustande (eventuell der Ruhe), solange er nicht durch aufserhalb gelegene Kräfte zur Änderung dieses Zustandes gezwungen wird[1]*.*

Newton stellte an der Spitze seiner Principia[2] *drei Grundsätze auf, unter denen sich das erwähnte Axiom und das dadurch erforderliche Postulat befinden.*

Der dritte Satz, welcher sich dort findet, ist als Princip der Aktion und Reaktion bekannt und besagt, dafs jedem Zuge oder jedem Drucke ein entgegengesetzt gerichteter Zug oder Druck von

---

Funktionen der Bewegung, während man dieselben früher als Ursachen der Bewegung einführte. Vergl. F. A. Lange, Geschichte des Materialismus II, S. 206.

1) Vergl. S. 42.

2) Principia philosophiae naturalis mathematica. London 1687.

gleicher Gröſse entspricht, daſs mit andern Worten alle Kräfte in der Natur paarweise vorhanden sind.

Der letzte Satz ist auch heute noch von groſser Wichtigkeit, wenn man ihn als ein Princip der physikalischen Dynamik (Annullierung der Arbeit der Spannkräfte) auffaſst, anstatt ihn zu einem Lehrsatze der Mechanik zu machen[1]*.*

Daſs Newton selbst in diesem Punkte grade so klar gedacht hat, wie in Bezug auf die oft gepriesene und oft verschrieene actio in distans[2]*) beweist eine Stelle, welche auch Schell*[3]*) erwähnt: Voces attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunque in centrum indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet, me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quae sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere aut vires centrorum esse dixero.*

Die Sprache ist in einer Zeit entstanden, wo jener Hang zur Personifikation, der im scholastischen Realismus zum letzten Male zu unumschränkter Herrschaft gelangte, noch durchaus in Geltung war: darum wird der Ausdruck des öfteren an jene alten Anschauungen erinnern müssen[4]*), welche überall Kräfte als Ursachen erdichteten.*

Für Newtons Anschauung (hypotheses non fingo) ist der Schluſs seines Werkes sehr bezeichnend: Quidquid ex phaenomenis non deducitur, hypothesis vocanda est; et hypotheses seu metaphysicae, seu physicae, seu qualitatum occultarum, seu mechanicae in philosophia experimentali locum non habent . . . . Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtillissimo corpora crassa pervadente et in iisdem latente, cujus vi et actionibus particulae corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt et contiguae factae cohaerent.

Der herrschende Atomismus, welcher die Welt des scholastischen Realismus, nachdem er sie entgöttert hatte, festzuhalten suchte, verhinderte lange Zeit hindurch jede Klärung in der Frage nach der Existenz der Kräfte.

Theoria mechanices analytica causam agnoscere nullam potest . . . . . diese These (1825) Jacobis wird stets für die weitere Entwicklung der Mechanik maſsgebend sein müssen, wie sie für die epochemachenden Werke von G. Kirchhoff und W. Schell maſsgebend gewesen ist.

---

1) Vergl. Schell, Theorie II, S. 8. Vergl. ferner in diesem Buche „Die dynamischen Principien“.

2) Vergl. über die Frage das Material in Lange, Geschichte des Materialismus I, S. 280 und 281. Die Lehre von der actio in distans entstand im Kreise der Jünger Newtons und wurde von Cotes im Vorworte zur zweiten Auflage (1713) der Newtonschen Principia behandelt.

3) Vergl. Princ. I, ad def. VIII.

4) Man sagt auch: der Baum erschlägt den Holzhauer.

Schliefslich mufs noch darauf aufmerksam gemacht werden, dafs man oft nicht imstande ist, die Kräfte anzugeben, welche für jeden einzelnen Punkt eines Systemes in Rechnung zu bringen sind, und dafs man demnach die Gesamtheit der Kräfte, welche für ein zweifach ausgedehntes Kontinuum von Punkten, d. h. für eine Fläche zur Geltung kommen, unter dem Kollektiv-Namen „Flächen-Druck“ oder „Flächen-Zug“ einführt.

Wenn z. B. ein vertikaler Stab von Querschnitt q durch einen Zug oder einen Druck mg belastet wird, so spricht man von der Belastung der Querschnitts-Einheit (Quadratmillimeter) und setzt dieselbe proportional zu $\frac{mg}{q}$.

Aehnliche Verhältnisse treten bei der Bestimmung des Luftdruckes (Barometer) zu Tage, dessen Gröfse man für die Flächen-Einheit bestimmt, indem man den Schwerdruck der belastenden Luftsäule (mg) für irgend eine Fläche q berechnet und die Gröfse $\frac{mg}{q}$ *als Mafs für den Druck auf die Flächen-Einheit anwendet.*

§. 3. Die Arbeit.

In der Phoronomie des Punktes wurde nachgewiesen, dafs bei jeder **ungleichförmigen** Bewegung auf **krummliniger** Bahn Normal- **und** Tangential-Beschleunigungen vorauszusetzen sind, welche sich zu Gesamt-Beschleunigungen vereinigen.

Nur bei der gleichförmigen Bewegung auf der geraden Linie mangelt jede Beschleunigung.

Während die Normal-Komponente der Gesamt-Beschleunigung den Punkt auf der Bahn von Tangente zu Tangante überführt, ändert die Tangential-Beschleunigung den Bewegungs-Zustand desselben in Bezug auf die Bahn.

Betrachtet man blofs die tangentialen Komponenten, so gelangt man wiederum zurück zur Bewegung auf gegebener Bahn.

Ueberall wo eine Beschleunigung a_i auftritt, läfst sich ein Produkt

$$A_i = m_i a_i . s_i = k_i . s_i$$

bilden, welches aus der Mafszahl der Masse, der Beschleunigung und dem Wege der Beschleunigung zusammengesetzt ist.

Es ist üblich A_i die **Arbeit der Kraft k_i für den Weg s_i** zu nennen.

*Für **tangentiale** Beschleunigungen wurde ein solches Produkt A_i bereits als **Arbeit** eingeführt.*

Ebenso könnte man in Bezug auf normale Beschleuniguugen von Arbeits-Leistungen sprechen, indem man auf die Krümmung der Bahn, d. h. auf deren Abweichung von der geraden Linie Rücksicht nimmt.

Wenn man die Kräfte, welche Tangential-Beschleunigung und Normal-Beschleunigung entsprechen, beziehungsweise als **Tangential-Kraft** und als **Normal-Kraft** einführt, so könnte man zunächst sowohl von der **Arbeit der Normal-Kraft** als auch von der **Arbeit der Tangential-Kraft** sprechen. Da die Leistung der Normal-Kraft stets durch Angabe der Bahn-Gestaltung fixiert werden kann, so ist man übereingekommen, das Wort **„Arbeit“ nur** in Bezug auf **Tangential-Kräfte** zu verwenden.

Unter der **Arbeit einer Kraft** hat man stets die **Arbeit ihrer tangentialen Komponente** zu verstehen.

Man schätzt die Arbeit nur in Bezug auf die Änderung des Bewegungs-Zustandes längs der Bahn.

Die Definition der Arbeit einer Kraft läfst sich auf mannigfache Weise umformen.

Da die Tangential-Komponente $[a_T]$ der Gesamt-Beschleunigung $[\bar{a}]$, deren Projection auf die entsprechende Tangante ist, so gelangt man im Hinblick auf die Beziehung

$$a_T = \bar{a} \,.\, \cos\alpha$$

zu der Gleichung $\quad s \,.\, m a_T = s \,.\, m \bar{a} \,.\, \cos\alpha.$

Dabei stellt $[s]$ das Bahn-Element dar, auf welchem die Verschiebung unter Einflufs der Beschleunigung $[\bar{a}]$ beziehungsweise unter Einflufs der Tangential-Beschleunigung $[a_T]$ zustande kommt, während α den Winkel zwischen diesem Elemente und zwischen der Gesamt-Beschleunigung bezeichnet.

Man mufs die Arbeit für irgend ein Bahn-Stück zusammengesetzt denken aus den Arbeits-Werten für die konstituierenden Bahn-Elemente.

Wenn man die Arbeit für ein Bahn-Element als **Elementar-Arbeit** einführt, so gestattet die oben gegebene Gleichung folgenden Ausdruck:

Die **Elementar-Arbeit** einer Kraft ist gleich dem Produkt aus der gegebenen Kraft und aus der Projektion des zugehörigen Bahn-Elementes auf die Richtung der Kraft.

Dabei ist zu beachten, dafs $s \,.\, \cos\alpha$ die Projektion von $[s]$ auf die Gesamt-Beschleunigung darstellt, während jene Gleichung ursprünglich zu dem folgenden Ausdruck führte:

Die Elementar-Arbeit einer Kraft ist gleich dem Produkte aus dem zugehörigen Bahn-Elemente und aus der Projektion der gegebenen Kraft auf die Richtung des Elementes.

Nennt man den Anfangspunkt des Bahn-Elementes, in welchem die Kraft zur Geltung kommt, den **Angriffspunkt** der Kraft, so kann man statt des Wortes **„Bahn-Element“** den Ausdruck **„Verschiebung des Angriffspunktes“** einführen.

Die beiden Ausdrucks-Formen der Gleichung

$$s \,.\, m a_T = s \,.\, m \bar{a} \cos\alpha$$

lassen sich leicht für diese Bezeichnungsweise entsprechend umgestalten.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs auch die Arbeit eines Kräftepaares vom Moment Pp durch die obigen Definitionen bereits definiert worden ist: dieselbe hat für eine Drehung von der Amplitude φ den Wert $\pm \varphi . Pp$.

Dreht man das Kräftepaar um die Mitte des Armes um den Winkel φ, so ist die Verrückung jeder Kraft als $\varphi \cdot \frac{p}{2}$ anzusetzen, während die Vorzeichen der beiden Arbeitsgröfsen, welche hier der Verrückung entsprechen, jederzeit übereinstimmen.

Da sich die **Tangential-Beschleunigung** einer Bewegung im allgemeinen von Punkt zu Punkt **ändert**, so mufs man die Arbeit für ein endliches Bahnstück im allgemeinen aus den Elementar-Arbeiten für die Bahn-Elemente zusammensetzen.

Eine Vereinfachung tritt ein, wenn $a_T = \bar{a} . \cos \alpha$ für alle Elemente denselben Wert hat, weil dann

$$\Sigma s_i . m \bar{a}_i . \cos \alpha_i = m \bar{a}_i . \cos \alpha_i \Sigma s_i$$

zu setzen ist.

In diesem Falle, wo eine gleichmäfsig geänderte Bewegung auf beliebiger Bahn vorliegt, hat man einfach Tangential-Kraft und Weg-Länge zu multiplicieren, ohne auf elementare Teilungen Rücksicht zu nehmen. Vergl. §. 1 in diesem Abschnitte.

Wenn die Gesamt-Beschleunigung [a] für alle Elemente dieselbe ist (d. h. denselben Wert und dieselbe Richtung hat), so ist

$$\Sigma s_i . m \bar{a}_i . \cos \alpha_i = m \bar{a}_i . \Sigma s_i . \cos \alpha_i$$

zu setzen.

In diesem Falle sind alle Bahn-Elemente auf dieselbe Grade (Richtung der Beschleunigung) zu projicieren, so dafs $\Sigma s_i . \cos \alpha_i$ die Projektion des ganzen Bahn-Stückes bedeutet.

Dieser höchst wichtige Fall tritt bei der Bewegung von Körpern an der Erdoberfläche ein. Wenn sich z. B. eine homogene Kugel unter dem Einflusse der Schwere bewegt, so beschreibt ihr Mittelpunkt eine Kurve, für welche $\Sigma s_i . m \bar{a}_i . \cos \alpha_i$ zu berechnen ist. Hier ist $m \bar{a}_i = mg$ zu setzen, während $s_i . \cos \alpha_i$ die Projektion des Kurvenstücks auf eine Vertikale, d. h. die vertikale Erhebung oder die vertikale Senkung bedeutet, d. h. die Arbeit ist hier gleich dem Produkte aus dem Schwer-Drucke (mg) der Kugel und der (positiven oder negativen) Senkung ihres Mittelpunktes.

In jedem Falle ist der **Wert** einer Arbeit **positiv** in Rechnung zu bringen, wenn die Verschiebung des Angriffspunktes **im Sinne der Kraft** vor sich gegangen ist, während dem Gegenteile das negative Vorzeichen entspricht.

Wer einen schweren Klotz vergeblich mit der Hand zu stützen

sucht, leidet unter der *positiven* *Arbeit der Schwerkraft, während dabei die Arbeit der Muskeln seines sinkenden Armes mit negativen Vorzeichen anzusetzen ist.*

Für die Berechnung der Arbeit wendet man mit Vorteil den Satz an, dafs die Arbeit einer Kraft gleich der *algebraischen* *Summe ihrer Komponenten ist.*

Bezeichnete $[r_i]$ *eine Kraft und* $[\sigma_i]$ *die zugehörige Verschiebung, so ist die entsprechende Arbeit*

$$A_i = r_i \,.\, \sigma_i \cos(r_i,\ \sigma_i).$$

Zerlegt man r_i *und* σ_i *beziehungsweise in je drei Komponenten* $r^{(x)}{}_i$, $r^{(y)}{}_i$, $r^{(z)}{}_i$ *und* $\sigma^{(x)}{}_i$, $\sigma^{(y)}{}_i$, $\sigma^{(z)}{}_i$, *so hat man (S. 108) die Gleichung*

$$\frac{r^{(x)}{}_i \,.\, \sigma^{(x)}{}_i + r^{(y)}{}_i \,.\, \sigma^{(y)}{}_i + r^{(z)}{}_i \,.\, \sigma^{(z)}{}_i}{r_i \,.\, \sigma_i} = \cos(r_i,\ \sigma_i)$$

und demnach auch

$$A_i = r^{(x)}{}_i \,.\, \sigma^{(x)}{}_i + r^{(y)}{}_i \,.\, \sigma^{(y)}{}_i + r^{(z)}{}_i \,.\, \sigma^{(z)}{}_i \,.$$

Die Möglichkeit einer *algebraischen Addition* *von* *Arbeitsgröfsen* *läfst den Begriff der Arbeit, welcher die Auswahl für die Darstellung der Energie* $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$ *bestimmte, im Gegensatz zum Begriffe der Kraft (geometrische Addition) äufserst fruchtbar erscheinen.*

B. Die Principien.

§. 1. Das Princip der mechanichen Addition der Kräfte.

1.

Wenn ein Punkt P_i gleichzeitig mehreren Beschleunigungen unterworfen ist, so giebt es immer eine Beschleunigung, welche die Gruppe der gegebenen Beschleunigungen ersetzt.

Die Resultante kann aus den Komponenten hergeleitet werden, indem man die Strecken, welche die Komponenten darstellen, durch geometrische Addition zu einer resultierenden Strecke vereinigt.

Derselbe Satz läfst sich unmittelbar auf Kräfte übertragen, wenn man bedenkt, dafs jede Beschleunigung hier mit demselben Faktor m_i multipliciert wird:

Die **Kräfte**, welche an **einem** Punkte angreifen, lassen sich durch **geometrische Addition** vereinigen.

Das Polygon der Kräfte ist dem Polygon der Beschleunigungen ähnlich.

Die Lage beider Polygone ist dadurch bestimmt, dafs entsprechende Seiten einander parallel sind und dafs ein Paar entsprechende Punkte (P_i) *zusammenfällt.*

Analoges gilt für die **Zerlegung** von Kräften, welche an **einem** Punkte angreifen.

Hier bestätigt sich, dafs in unserem Sinne eine Dynamik des Punktes nicht existiert.

Sätze, welche scheinbar einer solchen Dynamik angehören, sind nur Übertragungen phoronomischer Sätze.

Dieselben Überlegungen gelten auch für je einen Punkt, welcher einem Systeme angehört, wobei noch zu unterscheiden ist, ob man die Punkte innerhalb des Systems unter den gegebenen Beschleunigungen betrachtet oder ob man das System als dissolut auffafst und also zu den gegebenen Beschleunigungen noch gewisse, gegebene Bedingungen zur Anschauung bringende, Beschleunigungen hinzugefügt denkt.

Diese Bemerkung über die **geometrische Addition von Kräften** reicht im Verein mit einem **Erfahrungs-Satze** aus um eine physikalische Dynamik zu begründen.

Dieser Erfahrungs-Satz lautet:

Die Kräfte eines unveränderlichen Systems lassen sich nach den Regeln der mechanischen Addition vereinigen oder zerlegen.

An dieser Stelle rechtfertigt sich die früher gewählte Bezeichnung (mechanisch) für die in Rede stehende Form der Gleichheit von Strecken. Wie die Bedürfnisse der Arithmetik die arithmetische und wie die Bedürfnisse der Geometrie die geometrische, so schaffen die Bedürfnisse der Mechanik die mechanische Addition von Strecken.

Bei der Bedeutung, welche das unveränderliche System von allen Systemen auszeichnet, braucht die **Bedeutung** des **Satzes über die mechanische Addition** nicht ausdrücklich betont zu werden.

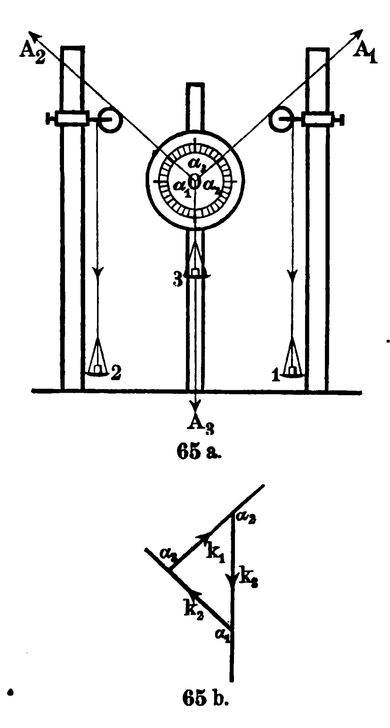
In einzelnen Fällen kann man die Richtigkeit jenes Erfahrungs-Satzes unmittelbar durch den Versuch nachweisen: indem man das Gesetz, welches durch solche Beobachtungen hie und da nachgewiesen ist, überall voraussetzt, gelangt man zu dem **Principe der geometrischen Addition.**

Alle Principien, nach denen wir unsere Auffassung der Natur-Erscheinungen ordnen, sind gewissermafsen Specialisierungen des allgemeinen Principes der Gesetzmäfsigkeit, welches dadurch gewonnen wird, dafs man eine hier und da beobachtete Gesetzmäfsigkeit überall voraussetzt.

Die **Rechtfertigung dieses Principes** liegt in der **Fruchtbarkeit seiner Verwendung** [1], d. h. man gelangt zu einer brauchbaren Darstellung der physischen Erscheinungen, wenn man die Regeln der mechanischen Addition auf die Kräfte eines unveränderlichen Systems anwendet.

---

1) Vergl. meine Arbeit in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie 1882, S. 390.



65 a.

65 b.

Zur Veranschaulichung dieses Satzes dient der Varignonsche Tisch, welcher im wesentlichen aus einer horizontal-gestellten Kreis-Scheibe, mit einer Grad-Teilung, und aus drei Rollen besteht, welche durch Klemmschrauben am Rande der Scheibe befestigt werden können. Führt man über die drei Rollen je einen, durch eine bestimmte Masse (m_i) *belasteten Faden, so kommen die Kräfte* $k_1 = m_1 g$, $k_2 = m_2 g$, $k_3 = m_3 g$ *zur Geltung: Verknüpft man die drei Fäden in einem Punkte über der Kreisscheibe, so bleibt das System in Ruhe, wenn für die Kräfte, Gröfse und Richtung nach den Regeln der geometrischen Addition bestimmt wird.*

Statt des Varignonschen Tisches kann man auch den in Figur 65 a skizzierten Apparat benutzen, bei welchem die (verschiebbare) Kreisscheibe vertikal steht: die Kräfte wirken hier in den Richtungen OA_1, OA_2, OA_3, *welche man durch die Teilung der Kreis-Scheibe bestimmen kann.*

Das System bleibt in Ruhe — und zwar für jeden Angriffspunkt auf den Strecken OA_1, OA_2, OA_3 — *wenn sich* k_1, k_2, k_3 *zu einem Polygon von einheitlichem Sinne (Figur 65 b) gestalten lassen.*

Da sich die Kräfte eines unveränderlichen Systems nach den Regeln der mechanischen Addition vereinigen lassen, so bleiben die Sätze aus der Geometrie der Strecken-Systeme, welche früher entwickelt wurden, hier in voller Geltung, d. h.

Es giebt für ein unveränderliches System in jedem Momente eine Central-Achse, auf welcher die resultierende Kraft und die Achse des resultierenden Kräfte-Paares gelegen ist.

Die einzelnen Fälle, welche bei der Diskussion (S. 111) der Werte L und π unterschieden wurden, treten auch hier auf.

2.

Die Schwere. Da innerhalb einer physikalischen Dynamik Ideal-Gestaltungen untersucht werden, welche physische Körper in möglichst grofser Annäherung darstellen, so wird man hier stets mit der **Beschleunigung der Schwere** zu rechnen haben.

Andere Formen der Dynamik könnten auch Körper untersuchen, auf welche der Begriff der Schwere keine Anwendung findet.

An der Erdoberfläche sind die Beschleunigungen der Schwere, welche in den einzelnen Punkten eines Körpers angreifen, nahezu parallel, weil die Dimensionen der irdischen Körper der Entfernung des Erdcentrums gegenüber relativ klein sind.

Man wird daher auf dem Gebiete der physikalischen Dynamik fast immer mit einem Systeme konstanter (g) Kräfte (Schwer-Druck) zu rechnen haben, dessen einzelne Glieder innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung als parallel betrachtet werden dürfen.

Bei Bewegungen, welche in weiten Himmelsfernen beginnen, um auf der Erde zu enden, ist die Voraussetzung der Konstanz von g jedenfalls aufzugeben.

Wenn die Kräfte eines unveränderlichen Systems einer bestimmten Graden parallel sind, so enthält die Central-Achse einen merkwürdigen Punkt, der früher (S. 113) als Centrum eines Parallel-Strecken-Systems eingeführt wurde.

Wenn im besonderen Kräfte auftreten, welche den Koëfficienten (m_i) ihrer Angriffs-Punkte proportional sind, so ist das **Centrum der Kräfte zugleich der Polarpunkt des unveränderlichen Systmes.**

Der Polarpunkt zweier Punkte P_1 und P_2 von den Koëfficienten m_1 und m_2 teilt deren Verbindungs-Linie $P_1 P_2$ im Verhältnis $m_2 : m_1$, während die Resultante zweier Parallel-Strecken L_1 und L_2 deren Parallel-Streifen derselben im Verhältnis $L_2 : L_1$ teilt. Wenn nun für zwei Parallel-Strecken, deren Situations-Punkte beziehungsweise P_1 und P_2 sind, die Proportion $L_1 : L_2 = m_1 : m_2$ gilt, so geht die Resultante von L_1 und L_2 durch den Polarpunkt von m_1 und m_2.

Der Schlufs von zwei auf je zwei führt zu obigem Satze.

Wenn man die Reihe der **Veränderungen irgend eines Systems** auf eine Reihe von unveränderlichen Systemen zurückführt, welche einander nach und nach ersetzen, so kann man den Polarpunkt des veränderlichen Systems von Moment zu Moment bestimmt denken.

Steht das System unter dem Einflusse eines Systems von Parallel-Kräften, welche beziehungsweise den Gröfsen m_i proportional sind, so stimmt das Momenten-Centrum der Kräfte mit dem momentanen Polarpunkt überein.

Man kann hier von einer Bahn des Polarpunktes sprechen, indem man die Lagen, welche der momentane Polarpunkt nach einander einnimmt, als eine bestimmte Kurve betrachtet.

Die hier bezeichneten Verhältnisse sind bei **physischen Körpern** an der Erdoberfläche angenähert gegeben: der **Polarpunkt ersten Grades** ist hier zugleich der **Angriffspunkt der Resultante der Schwerkräfte** ($m_i g$), d. h. man mufs einen schweren

Körper in der Vertikalen des Polarpunktes unterstützen, wenn er nicht fallen soll.

Dadurch rechtfertigt sich der Name „Schwerpunkt", welcher dem Polarpunkte jedes Mal (S. 125) gegeben werden kann, wenn die Koëfficienten eines Punkt-Systemes durchweg gleichen Zeichens sind.

Man kann sich die Masse des Körpers hier im Schwerpunkte konzentriert denken, so dafs gewisse Probleme von Punkt-Systemen durch die Behandlung eines Punktes gelöst werden können.

Der Schwerpunkt eines physischen Körpers läfst sich nur in relativ wenigen Fällen durch Rechnung bestimmen, weil einerseits die Begrenzung desselben nur selten in hinreichender Annäherung durch einfache Flächen (Ebene, Kugel etc.) dargestellt werden kann und weil andererseits die Kenntnis der einzelnen Gröfsen m_i gleichfalls nur selten zu erreichen ist.

Die früher gegebenen Rechnungen gelten durchweg für homogene Gebilde, während physische Körper nie in aller Strenge als Material von gleicher Dichtigkeit angesehen werden können.

Die oben gemachten Bemerkungen führen zu einer **praktischen Bestimmung des Schwerpunktes:**

Wenn man an zwei verschiedenen Stellen der Oberfläche eines Körpers je einen Faden befestigt und den Körper das eine Mal an dem einen, das andere Mal an dem anderen Faden aufhängt, so giebt jede der beiden Faden-Richtungen eine Central-Achse für Parallel-Kräfte, welche an den einzelnen Punkten des Körpers angreifen: diese Central-Achsen sind zugleich Schwerlinien und schneiden sich deshalb im Schwerpunkte des Systemes.

Wenn ein physischer Körper, welcher nur unter dem Einflusse der Erdschwere steht, eine Ruhelage eingenommen hat, so liefert die Art der Aufstellung oder die Art der Aufhängung jedesmal eine Reaktionskraft, welche die Resultante der Schwerkräfte aufhebt.

Ruht der Körper auf einer horizontalen Ebene, so kann man die Unterstützungspunkte desselben zu einem Vieleck von möglichst grofser Fläche gestalten: dieses Vieleck (Unterstützungsfläche) mufs von der Vertikalen durch den Schwerpunkt des Körpers geschnitten werden, wenn dieser in Ruhe verharren soll.

Wenn der Körper um eine Seite (beziehungsweise um ein Element der Begrenzung) der Unterstützungsfläche ein wenig gedreht wird, so tritt im allgemeinen ein Kräftepaar auf, dessen eine Kraft, der Schwer-Druck m g, im Schwerpunkt angreift, während dessen andere Kraft durch die Reaction der Unterlage geliefert wird: wird der Schwerpunkt dabei gehoben, so dreht das Paar den Körper in die alte Lage zurück, wird der Schwerpunkt gesenkt, so entfernt das Paar den Körper aus der alten Lage, bleibt der Schwerpunkt in derselben Horizontal-Ebene, so tritt überhaupt kein Paar auf.

Man spricht hier beziehungsweise von einer stabilen, labilen und indifferenten Ruhelage: im ersten Falle pendelt der Körper bei einem geringen Stofse um die Drehungs-Achse (Kipp-Achse), im zweiten Falle schlägt er um, im dritten Falle bleibt er auch in der neuen Lage in Ruhe.

Analoge Betrachtungen gelten auch für aufgehängte Körper, wobei nur Reactionen gegen Zug in Rechnung zu bringen sind.

In jedem Falle wird die stabile Stellung durch eine möglichst tiefe (h_1) und die labile Stellung durch eine möglichst hohe (h_2) Stellung des Schwerpunkts bedingt. Berechnet man die Arbeit, welche durch das Sinken des Schwerpunktes geleistet werden könnte, so ist dieselbe im ersten Falle ($m g h_1$) Nachbarlagen gegenüber ein Minimum, während dieselbe im zweiten Falle ($m g h_2$) Nachbarlagen gegenüber ein Maximum ist.

§. 2. D'Alemberts Princip.

Unter den **Effektiv-Kräften** eines Punkt-Systems versteht man die Kräfte, welche innerhalb des Systems zur Geltung kommen, wenn man dasselbe als **dissolut** betrachtet.

Schwingt z. B. irgend ein Punkt P_i eines Systems auf einer Graden mit einer Beschleunigung, welche stets dem Abstande (x) von einem festen Punkte proportional (k) ist, so hat man die Effektiv-Kraft $m_i . k . x$ in Rechnung zu bringen, ohne zu fragen, was alles zusammen gewirkt hat, um jenes Ergebnis zu bedingen.

In analoger Weise hätte man auch von Effektiv-Geschwindigkeiten und Effektiv-Beschleunigungen sprechen können.

Unter **Spann-Kräften** hat man alle Kräfte zu verstehen, welche für eine Dissolution des Systems aufser den gegebenen Kräften in Rechnung zu bringen sind: dieselben entsprechen den Beschleunigungen, welche teils durch das Verbindungs-Gesetz der System-Punkte, teils durch äufsere Hindernisse der Bewegung bedingt werden.

So entsprechen z. B. feste Fäden innerhalb eines Systems Spann-Kräften der ersten, vorgeschriebene Bahnen für einzelne System-Punkte Spann-Kräften der zweiten Art.

Dafs die zweifache Teilung der bedingenden Kräfte keine durchgreifende ist, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

Werden zu den gegebenen Kräften eines Systems, welche als **wirkende Kräfte** bezeichnet werden mögen, die Spann-Kräfte desselben hinzugefügt, so verwandelt sich das System in ein dissolutes.

Es handelt sich darum, alle Bedingungen, denen die einzelnen Punkte unterworfen sind, als Beschleunigungen, beziehungsweise als Kräfte darzustellen.

So wird z. B. die Bedingung, dafs ein Punkt auf einer festen

Kurve bleiben soll, durch eine, normal zur Kurve gerichtete, Beschleunigung (S. 214) ersetzt: Centripetal-Beschleunigung.

Die **Effektiv-Kräfte** eines Systems sind stets als **Resultanten gegebener Kräfte** und bestimmter **Spann-Kräfte** aufzufassen.

Diese Auffassung der Effektiv-Kräfte heifst das **Princip d'Alemberts** [1].

Wenn man die Richtungen sämtlicher Effektiv-Kräfte geradezu umgekehrt denkt, so gelangt man zu einem System von Kräften, das man Gegen-Kräfte nennen kann. Das Princip lautet dann: In jedem Augenblick heben die Systeme der gegebenen Kräfte, der Spann-Kräfte und der Gegen-Kräfte einander auf.

Bezeichnet man die Komponenten der gegebenen Kräfte, welche den Spann-Kräften entgegengesetzt gleich sind, mit d'Alembert als verlorene Kräfte, so gelangt man zu einem andern Ausdrucke des obigen Principes: Die verlorenen Kräfte und die Spann-Kräfte heben sich in jedem Augenblicke auf.

Das d'Alembertsche Princip ist ein analytisches [2] *Urteil (selbstverständlicher Satz), wenn man alle Bedingungen, welche aufser den gegebenen Kräften wirken, als Spann-Kräfte eingeführt denkt. Sollten sich Bedingungen finden, welche nicht als Kräfte darstellbar sind, so würde auch das Princip d'Alemberts nicht mehr ohne weiteres gelten.*

Wenn zwei Gruppen der Kräfte, welche im Principe d'Alemberts erwähnt werden, gegeben sind, so kann man auch die dritte Gruppe als gegeben ansehen.

Demnach resultieren drei verschiedene Arten von Aufgaben, je nachdem die **wirkenden Kräfte** oder die **Spann-Kräfte** oder die **Effektiv-Kräfte** gesucht sind.

Zur Erläuterung des d'Alembertschen Principes mag eine solche Aufgabe hier gelöst werden: die Bewegungs-Verhältnisse der Atwoodschen Fall-Maschine sollen entwickelt werden.

Die Mittelpunkte der beiden homogenen Kugeln würden frei fallen, wenn sie nicht durch den über die Rolle gelegten Faden daran verhindert würden.

Wenn die beiden Kugeln beziehungsweise die Massen m_1 und m_2 haben, so sind die wirkenden Kräfte beziehungsweise $m_1 g$ und $m_2 g$, während die Spann-Kräfte aus der gegebenen Bedingung (fester Faden) entwickelt werden können. Die Effektiv-Kräfte, welche die resultierende Bewegung der beiden Massen regeln, sind gesucht.

Die Bedingung, welche durch den festen Faden eingeführt wird, läfst sich durch zwei gleiche Kräfte — λ ersetzen, welche auf

---

1) Vergl. d'Alembert, Traité de mécanique, II, p. I. 1743. Der Grundgedanke wurde schon 1742 von d'Alembert in einer Denkschrift vor der Pariser Akademie entwickelt.

2) Vergl. Kant, Kritik der reinen Vernunft, Einl. IV in der zweiten (1787) Ausgabe. 1781.

die Mittelpunkte der Kugeln wirken und vertikal nach oben gerichtet sind.

Bezeichnet man die gesuchten Effektiv-Kräfte durch $m_1 \varphi_1$ und $m_2 \varphi_2$, so ist also nach dem Principe d'Alemberts:

$$m_1 \varphi_1 = m_1 g + \lambda \text{ und } m_2 \varphi_2 = m_2 g + \lambda.$$

Um λ zu bestimmen, beachtet man, dafs wegen der festen Verbindung die Bahn-Inkrementen-Reihen für m_1 und m_2 beziehungsweise übereinstimmen und dafs demnach auch die daraus resultierenden Beschleunigungen φ_1 und φ_2 dem Werte nach gleich sind, während ihre Richtungen entgegengesetzt sind.

Verbindet man die nun gewonnene Gleichung $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ mit dem oben aufgestellten Systeme, so resultiert

$$-\lambda = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ und } \varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Die gesuchten Effektiv-Kräfte sind also:

$$m_1 g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \text{ und } m_2 g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.$$

Damit sind die Beschleunigungen des fallenden und des steigenden Körpers für bestimmte Belastungen (m_1 und m_2) gegeben, so dafs also der Wert der Konstante (S. 156) jederzeit angegeben werden kann, welche die Bewegungen an der Atwoodschen Fall-Maschine zu dem freien Falle in Beziehung setzt.

Von besonderer Bedeutung ist stets die Bestimmung der Effektiv-Kräfte, welche sich als

$$m_1 f_1,\ m_2 f_2 \ldots\ldots$$

darstellen lassen, wenn man die für einen Punkt P_i resultierende Beschleunigung als f_i bezeichnet.

Zerlegt man für jeden Punkt P_i die Resultante k_i der gegebenen Kräfte und die Resultante r_i der Spann-Kräfte in Bezug auf ein dreiachsiges Koordinaten-System in die Komponenten $k^{(x)}_i$, $k^{(y)}_i$, $k^{(z)}_i$ und $r^{(x)}_i$, $r^{(y)}_i$, $r^{(z)}_i$, so hat man für die Komponenten $m_i f^{(x)}_i$, $m_i f^{(y)}_i$, $m_i f^{(z)}_i$ der Effektiv-Kraft die Gleichungen

$$m_i f^{(x)}_i = k^{(x)}_i + r^{(x)}_i,\ m_i f^{(y)}_i = k^{(y)}_i + r^{(y)}_i,$$
$$m_i f^{(z)}_i = k^{(z)}_i + r^{(z)}_i.$$

Diese Gleichungen heifsen die Lagrangeschen Grundgleichungen.

Ihre Bedeutung liegt ebenso wie die Bedeutung des d'Alembertschen Principes in der Auffassung, welche dieselben den Bedingungen der Bewegung geben, indem sie dieselbe durch Kräfte darstellen.

§. 3. Das Princip für die Arbeit der Spannkräfte.

Wenn ein Punkt P_i mehreren Beschleunigungen unterworfen ist, so kann der Fall eintreten, dafs **eine** dieser Beschleunigungen die **Resultante der übrigen** aufhebt.

Analoges gilt für die Kräfte, welche den gegebenen Beschleu-

nigungen entsprechen, da die korrespondierenden Summations-Polygone einander ähnlich sind.

Um den hier bezeichneten Fall kurz zu charakterisieren, führt man folgende Definition ein:

Wenn auf einen Punkt mehrere Kräfte wirken, von denen eine die Resultante der Übrigen aufhebt, so **stehen diese Kräfte im Gleichgewicht.**

Der Fall des Gleichgewichts ist zu unterscheiden von dem Falle, in welchem überhaupt keine Kräfte zur Geltung kommen.

Wenn man einen Punkt P_i, an welchem alle für ihn in Frage kommenden Kräfte im Gleichgewicht stehen, in ganz beliebiger Weise verschoben denkt, so hat die Arbeit jener Kraft den Wert „Null".

Wenn die Kräfte k_1, k_2 ..... k_n mit der Richtung der Verschiebung σ beziehungsweise die Winkel α_1, α_2 ..... α_n bilden, so hat die fragliche Arbeit den Wert

$$\sigma \Sigma k_i \,.\, \cos\alpha_i.$$

Da sich das Polygon der Kräfte k_i schliefst, so ist dessen Projektion ($\Sigma k_i \cos\alpha_i$) auf die Richtung der Verschiebung gleich „Null" zu setzen.

Die Arbeit der Kräfte hat nicht blofs für die eine Verschiebung der thatsächlich stattfindenden Bewegung, sondern für jede überhaupt denkbare Verschiebung des Punktes P_i den Wert „Null".

Man pflegt einer älteren Terminologie zufolge die denkbaren Verschiebungen als virtuelle (virtus = Möglichkeit) Verrückungen der thatsächlich vorhandenen Verschiebung, welche auch actuelle Verrückung genannt wird, entgegenzusetzen.

Ebenso pflegt man unter der virtuellen Geschwindigkeit $\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)$ von P_i eine Geschwindigkeit zu verstehen, welche nicht der thatsächlich gegebenen Verschiebung s, sondern irgend einer gedachten Verschiebung (σ) entspricht.

Analoges gilt von der virtuellen Arbeit.

Wenn umgekehrt die **Arbeit der Kräfte**, welche an einem Punkte angreifen, für **alle virtuellen Verrückungen** den Wert **Null** hat, so stehen die Kräfte im **Gleichgewicht.**

Wenn sich die Arbeit der Resultanten für jede überhaupt denkbare Verschiebung annullieren soll, so mufs die Resultante selbst den Wert „Null" haben.

Da nach dem Principe d'Alemberts für jeden Punkt P_i innerhalb eines Systems die Effektiv-Kräfte als Resultanten der gegebenen Kräfte und bestimmter Spannkräfte aufzufassen sind, so hat bei beliebigen virtuellen Verrückungen die Gesamt-Arbeit

der gegebenen Kräfte, der Spannkräfte und der Gegenkräfte zu jeder Zeit den Wert „Null“.

Da die drei Gruppen von Kräften für jeden Punkt im Gleichgewicht sind, so wird hier für das **ganze System der Kräfte** ein Zustand bestimmt, welcher wiederum als **Gleichgewicht** bezeichnet werden soll.

Um diese Anschauung zu klären, mag folgende Definition eingeführt werden:

Wenn ein beliebiges System, dessen Punkte während eines Zeitelementes in Ruhe sind, dem Einflusse von Kräften ausgesetzt wird, welche den Zustand der Ruhe ungeändert lassen, so stehen die Kräfte im Gleichgewicht [1]).

Man bemerkt leicht, daſs diese Definition die oben gegebenen Verhältnisse als Specialfall umschlieſst.

Bezeichnet man die Resultanten der drei Gruppen von Kräften wie oben für den Punkt P_i beziehungsweise mit k_i, r_i und $m_i f_i$, so gelangt man bei einer Zerlegung der Verschiebung σ_i nach drei rektangulären Achsen zu dem Gleichungs-Systeme

$$m_i f^{(x)}_i . \sigma^{(x)}_i = k^{(x)}_i . \sigma^{(x)}_i + r^{(x)}_i . \sigma^{(x)}_i$$
$$m_i f^{(y)}_i . \sigma^{(y)}_i = k^{(y)}_i . \sigma^{(y)}_i + r^{(y)}_i . \sigma^{(y)}_i$$
$$m_i f^{(z)}_i . \sigma^{(z)}_i = k^{(z)}_i . \sigma^{(z)}_i + r^{(z)}_i . \sigma^{(z)}_i .$$

Aus diesem Systeme folgt

$$\Sigma\, [(m_i f^{(x)}_i - k^{(x)}_i)\, \sigma^{(x)}_i + (m_i f^{(y)}_i - k^{(y)}_i)\, \sigma^{(y)}_i + (m_i f^{(z)}_i - k^{(z)}_i)\, \sigma^{(z)}_i]$$
$$= \Sigma\, [r^{(x)}_i . \sigma^{(x)}_i + r^{(y)}_i . \sigma^{(y)}_i + r^{(z)}_i . \sigma^{(z)}_i].$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt die Gesamt-Arbeit aller Spannkräfte dar, welche sich auch (S. 348) durch

$$\Sigma\, r_i . \sigma_i \cos (r_i, \sigma_i) = A_s$$

bezeichnen läſst.

Wenn im besonderen alle Punkte des Systems für einen Moment in Ruhe sind, so wird dieser Zustand bestehen bleiben, wenn z. B. von diesem Momente an für jeden Punkt P_i die Gleichung $f_i = o$ besteht.

In diesem Falle hat man

$$- \Sigma\, [k^{(x)}_i \sigma^{(x)}_i + k^{(y)}_i \sigma^{(y)}_i + k^{(z)}_i \sigma^{(z)}_i] = A_s.$$

Im Hinblick auf diese Erörterungen lautet das Princip für die Arbeit der Spannkräfte:

Es giebt im allgemeinen für jedes System eine Gruppe von virtuellen Verschiebungen, für welche die **Arbeit der Spannkräfte** positiv ist, falls sie nicht den Wert „Null“ hat.

Diese virtuellen Verschiebungen sollen **„erlaubte“** oder **„verträgliche Verschiebungen“** genannt werden, weil sie den beschränkenden Bedingungen, welche die Spannkräfte liefern, gemäſs sind [2]).

---

1) Zu dieser Definition veranlaſsten mich die Einwendungen, welche Kirsch in seiner trefflichen Programm-Abhandlung 1880 (Technische Lehranstalten zu Chemnitz) macht.

2) Unsere Definition ist im Einklang mit der bei Schell (Theorie II, 172) gegebenen, während G. Kirchhoff (Vorlesungen S. 24) die nicht erlaubten

Wenn sich eine Kugel auf einer festen Ebene bewegt, welche gegen den Horizont geneigt ist, so sind virtuelle Verschiebungen unter Anderem parallel und normal zur Ebene möglich, während unter den Normal-Verschiebungen diejenigen nicht erlaubt sind, welche die Kugel in die Ebene hineinpressen würden.

Wenn in einem Systeme starre Linien vorhanden sind, so hat man diejenigen Verschiebungen aus der Gruppe der erlaubten Verschiebungen auszuscheiden, welche nicht ohne eine Deformation jener Linien denkbar sind.

Ob die Arbeit der Spannkräfte für erlaubte Verschiebungen positiv ist oder ob sie den Wert Null hat, das hängt davon ab, ob im Systeme **einseitige Widerstände** vorhanden sind oder nicht. Unter **einseitigen Widerständen** sind Bedingungen zu verstehen, welche eine Verschiebung in bestimmter Richtung gestatten, während sie dieselbe in grade entgegengesetzter Richtung verhindern.

Rollt ein schwerer Körper auf einer festen Ebene, welche gegen den Horizont geneigt ist, so ist ein einseitiger Widerstand in Rechnung zu bringen, weil ein auf der Ebene ruhender Körper senkrecht zu dieser wohl fort- aber nicht hinbewegt werden darf, falls man hier die Bedingungen (Unveränderlichkeiten der ebenen Oberfläche) einhalten will.

Dagegen ist kein einseitiger Widerstand in Rechnung zu bringen, falls sich eine Kugel zwischen zwei parallelen Ebenen bewegt, welche überall um den Diameter der Kugel von einander abstehen.

Im ersteren Falle findet sich unter den virtuellen Verschiebungen eine erlaubte Verschiebung, welche einen positiven Arbeitswert liefert, weil sie im Sinne der Spannkraft erfolgt: dieselbe ist senkrecht zur Ebene gerichtet und vermeidet es, das Material derselben in Anspruch zu nehmen.

Im zweiten Falle würden alle Verschiebungen, welche senkrecht zu den Parallel-Ebenen geschehen, das Material derselben in gewisser Hinsicht zerstören, d. h. sie würden unerlaubte Verschiebungen sein.

Analoges tritt nun überhaupt für einseitige und für doppelseitige Widerstände ein.

So ist z. B. ein fester Punkt, eine feste Grade etc. innerhalb eines Systems stets als doppelseitiger Widerstand aufzufassen, während jeder konvex gekrümmte Körper, der nicht zum Systeme gehört, für dieses einen einseitigen Widerstand darstellt.

Wenn ein einseitiger Widerstand durch die Kraft k dargestellt werden kann, so spielen die beiden Verschiebungen, welche den Angriffspunkt von k in der Richtung von k oder in

---

Verschiebungen überhaupt nicht berücksichtigt und demnach die erlaubten schlechthin als virtuelle einführen darf.

entgegengesetzter Richtung verschieben, eine hervorragende Rolle: die erste dieser beiden Verschiebungen liefert eine positive Arbeit, weil Kraft-Richtung und Verschiebungs-Richtung übereinstimmen, die zweite dieser beiden Verschiebungen würde einer Deformation entsprechen und ist demnach aus der Reihe der erlaubten Verschiebungen auszuschliefsen [1]).

Da sich alle Verschiebungen des Angriffspunktes einer Kraft aus Verschiebungen auf einem dreiachsigen Orthogonal-Kreuze zusammensetzen lassen, während bei Verschiebungen, welche senkrecht zur Richtung einer Kraft auftreten, überhaupt keine Arbeit geleistet wird, so führen alle erlaubten Verscbiebungen von k zu positiven Arbeitsgröfsen beziehungsweise zu der Arbeit „Null".

Um hier eine Anschauung zu gewinnen, kann man stets an den Widerstand einer unveränderlichen Fläche denken.

Für **erlaubte Verschiebungen** der Punkte eines Systems, innerhalb dessen keine einseitigen Widerstände zur Geltung kommen, gilt stets die Gleichung:

$$\Sigma\,[(m_i\,f^{(x)}{}_i - k^{(x)}{}_i)\,\sigma^{(x)}{}_i + (m_i\,f^{(y)}{}_i - k^{(y)}{}_i)\,\sigma^{(y)}{}_i + (m_i\,f^{(z)}{}_i - k^{(z)}{}_i)\,\sigma^{(z)}{}_i] = 0.$$

Kommen einseitige Widerstände vor, so ist die Gestaltung dieser Gleichung in entsprechender Weise zu modificieren.

Wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, so ist gemäfs der eingeführten Definition $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0 \ldots\ldots$, d h. man hat im allgemeinen

$$-\,\Sigma\,(k^{(x)}{}_i\,\sigma^{(x)} + k^{(y)}{}_i\,\sigma^{(y)}{}_i + k^{(z)}{}_i\,\sigma^{(z)}{}_i) = A_s.$$

Für Systeme mit einseitigen Widerständen ($A_s > 0$) folgt demnach: Im Falle des Gleichgewichts ist die Arbeit der gegebenen Kräfte für erlaubte Verschiebungen stets negativ.

Für Systeme, in welchen keine einseitigen Widerstände wirken ($A_s = 0$) folgt demnach: Im Falle des Gleichgewichtes hat die Arbeit der gegebenen Kräfte für erlaubte Verschiebungen stets den Wert „Null".

Der letzte Satz wird im Verein mit seiner Umkehrung, welche im nächsten Paragraphen behandelt werden soll, das Princip der virtuellen Verrückungen genannt, wobei zu bemerken ist, dafs in den Lehrbüchern zum Teil nur der Satz, zum Teil nur dessen Umkehrung unter diesen Namen eingeführt wird.

Guido Ubaldo untersuchte mit Hülfe der virtuellen Verrückungen das Gleichgewicht des Hebels, während Galilei dasselbe für andere einfache Maschinen leistete. Nachdem die allgemeine Verwendbarkeit des Principes von Joh. Bernoulli erkannt worden war, machte Lagrange dasselbe zum Fundamente seiner klassischen Mécanique analytique.

---

1) Vergl. Gaufs, Crelles Journal Bd. IV.

§. 4. Das Princip des Gleichgewichtes.

1.

Wenn die **gegebenen Kräfte**, welche an einem **unveränderlichen Systeme** [1]) zur Wirkung kommen, für jede virtuelle Verrückung die **Arbeit „Null“** leisten, so ist das System jener Kräfte im **Gleichgewicht**.

Die oben entwickelte Gleichung

$$\Sigma [(m_i f^{(x)}_i - k^{(x)}_i)\sigma^{(x)}_i + (m_i f^{(y)}_i - k^{(y)}_i)\sigma^{(y)}_i + (m_i f^{(z)}_i - k^{(z)}_i)\sigma^{(z)}_i] = 0$$

führt unter der gemachten Voraussetzung zu der Gleichung.

$$\Sigma (m_i f^{(x)}_i . \sigma^{(x)}_i + m_i f^{(y)}_i . \sigma^{(y)}_i + m_i f^{(z)}_i . \sigma^{(z)}_i) = 0.$$

Wenn diese Gleichung für jede Verrückung also auch z. B. für $\sigma^{(x)}_i = 0$, $\sigma^{(y)}_i = 0$, $\sigma^{(z)}_i = 0$ etc. besteht, so ist in der That $f^{(x)}_i = 0$, $f^{(y)}_i = 0$, $f^{(z)}_i = 0$.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Annullierung der Arbeit des Kräftesystems kann man folgendermaſsen darstellen:

$$\Sigma k^{(x)}_i = 0, \; \Sigma k^{(y)}_i = 0, \; \Sigma k^{(z)}_i = 0.$$

$$\Sigma (y_i k^{(x)}_i - x_i k^{(y)}_i) = 0, \; \Sigma (x_i k^{(z)}_i - z_i k^{(x)}_i) = 0,$$

$$\Sigma (z_i k^{(y)}_i - y_i k^{(z)}_i) = 0.$$

Den Beweis dieser Behauptung liefert die Bemerkung, daſs jede beliebige Verrückung eines Systems auf drei Verschiebungen längs der Achsen und durch drei Drehungen um die Achsen eines orthogonalen Koordinaten-Kreuzes wiedergegeben werden kann.

Analoge Betrachtungen gelten offenbar für **beliebige Systeme** falls man auch die Arbeit der Spannkraft berücksichtigt.

Die notwendigen und hinreichenden Betrachtungen für diesen allgemeinen Fall sind

$$\Sigma [k^{(x)}_i \sigma^{(x)}_i + k^{(y)}_i \sigma^{(y)}_i + k^{(z)}_i \sigma^{(z)}_i] + A_s = 0.$$

Da A_s im allgemeinen bei erlaubten Verschiebungen entweder positiv oder „Null“ ist, so muſs hier die **Arbeit der gegebenen Kräfte entweder negativ sein oder sie muſs den Wert „Null“ haben.**

Ein vollständiger „Beweis“ des hier betrachteten Principes ist unmöglich, weil es unmöglich ist, die Relation $A_s \geqq 0$ für alle denkbaren Fälle zu beweisen.

Allen Versuchen, welche aus dem Principe einen Lehrsatz machen wollen, mag Poinsots Bemerkung entgegengehalten werden [2]): Une demonstration universelle du principe des vitesses virtuelles devait au fond revenir à établir la mécanique entière sur

---

1) D. h. an einem freien Systeme ohne Veränderlichkeit. Wenn für das System Bedingungen bestehen, so ist dasselbe im Hinblick auf unsere Terminologie, nach welcher die bedingenden Hindernisse mit zum System gerechnet werden, nicht als unveränderlich zu bezeichnen.

2) Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes.

une autre base . . . les nuages n'avaient paru levé sur le cours de la mécanique que parce qu'ils étaient, par aussi dire, rassemblés à l'origine même de cette science[1]).

In Bezug auf diese Frage mag auf Machs äufserst beachtenswerten Vortrag „Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“ verwiesen werden.

2.

Die drei Elemente der Maschinen. Das oben betrachtete Princip (virtuelle Verrückungen) ist für alle Gleichgewichtsbestimmungen von hervorragender Bedeutung und kann im speciellen in der Theorie der Maschinen eine reiche Verwendung finden.

Wenn man einen gegebenen Vorrat von Arbeit in bestimmter Weise nutzbar machen will, so mufs man sich im allgemeinen geeigneter Vorrichtungen zur **Aufnahme**, zur **Übertragung** und zur **Abgabe** der Arbeit bedienen: demgemäfs zerfällt jede Vorrichtung, welche dem genannten Zwecke dient, d. h. jede Maschine beziehungsweise Maschinen-Anlage in Receptor (Betriebs Maschine), Transmission (Zwischen-Maschine) und Operator (Werkzeugs-Maschine).

Ein gegebener Arbeits-Vorrat wird durch die Muskelkraft von Menschen und Tieren, durch sinkende Massen (Gewichte, Wasser etc.), durch elastische Spannungen (Feder, komprimierte Luft, Dampf etc.), durch elektrische und magnetische Kräfte etc. dargestellt.

Aufserdem können auch in Bewegung befindliche Körper (z. B. Luft, Wasser etc.) als Träger eines Arbeits-Vorrates, d. h. als Motoren betrachtet werden.

Betriebs-Maschinen sind z. B. Wasserräder, Turbinen, Windmühlen-Flügel, Dampfmaschinen etc.

Arbeits-Maschinen sind z. B. Mühlsteine, Spinnmaschinen etc.

Zwischen-Maschinen sind z. B. die telodynamischen Kabel (Drahtseil-Transmission) oder die Vereinigung von Wasserrad-Welle, Zahnrad, Drilling und Mahleisen etc.

Nach dem Satze von der Erhaltung der Energieen-Summen ist es unmöglich, Arbeits-Vorräte zu schaffen: man kann nur gegebene Arbeits-Vorräte umformen.

Die populäre Fassung dieses Satzes, der uns bald unter den Principien der Mechanik begegnen wird, lautet: Man kann kein Perpetuum mobile konstruieren[2]).

Es ist unmöglich, eine Vorrichtung zu ersinnen, welche einen gegebenen Arbeits-Vorrat in irgend einer Weise vergröfsert, d. h.

---

1) Man beruhigt sich eben, sobald eine Unverständlichkeit „gewöhnlich“ geworden ist. Vergl. W. 5. Vorwort.

2) Vergl. Mach, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit.

man ist nicht im Stande, z. B. ein Wasserrad zu konstruieren, welches Arbeit leistet und außerdem eine Pumpe treibt, die das herabgeflossene Wasser wieder auf sein ursprüngliches Niveau hebt, so daß dieses für das Wasserrad von neuem als Motor verwandt werden kann.

Es schiene nun zunächst sehr wohl möglich, eine Maschine zu konstruieren, deren ganze Arbeitsleistung darin besteht, sich selbst im Gange zu erhalten.

Ein solches Perpetuum mobile würde der Praxis keinen Nutzen gewähren, obwohl seine Konstruktion von einem gewissen theoretischen Interesse wäre.

Hat der gegebene Arbeits-Vorrat des Receptors den Wert A_1, während der Arbeits-Vorrat des Operators den Wert A_2 hat, so hat man im Hinblick auf etwa verloren gehende Größen, deren Summe V sein mag, die Gleichung

$$A_1 = A_2 + V.$$

Die Frage nach der Möglichkeit einer Maschine, welche sich selbst im Gange erhält, ist beantwortet, sobald man weiß, wann unter den erfahrungsmäßig gegebenen Verhältnissen eine Größe V auftritt: die **Beobachtung** lehrt, daß eine solche Größe V **stets** vorhanden ist.

Damit ist die Möglichkeit eines Perpetuum mobile der zweiten Art (Planeten-System) im verneinenden Sinne entschieden.

Man bezeichnet A_1 als die Roh-Arbeit und A_2 als die Nutz-Arbeit der Maschine und führt

$$\nu = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_1 - V}{A_1} = 1 - \frac{V}{A_1}$$

als den **Nutz-Effekt** der Maschine ein.

Bei der Konstruktion der Maschinen handelt es sich darum, für den echten Bruch ν einen möglichst großen Wert zu erreichen, da der ideale Wert $\nu = 1$ nicht erreicht werden kann.

Der **Arbeits-Verlust** (V) läßt sich auf **zwei** verschiedene Momente zurückführen: einmal tritt bei der Berührung bewegter Körper stets ein Arbeits-Verlust ein, welcher eine vorübergehende oder eine bleibende Deformation der tangierenden Körper bewirkt, während andrerseits auch zur Anregung von Bewegungen jeder Art, d. h. zum „Inbewegungsetzen“ stets eine gewisse Arbeits-Größe (kinetischer Verlust) verbraucht wird.

In Bezug auf den Verlust durch Deformation der berührenden Maschinenteile sind hauptsächlich die tangentialen Erscheinungen ins Auge zu fassen, welche man unter dem gemeinsamen Namen **Reibung** zusammenfaßt.

Außerdem sind Verluste durch **Stöße** und durch **Pressungen** zwischen den einzelnen Teilen in Rechnung zu bringen, bei welchen die Kräfte, normal zur Berührungs-Fläche, Arbeit leisten.

Hauptsächlich ist die **Reibung** zwischen festen Körpern und festen Körpern und zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten (beziehungsweise Gasen) in Untersuchung zu ziehen.

Für die Reibung zwischen festen Körpern und festen Körpern gelten folgende Sätze der Erfahrung:

1. Der Reibungs-Widerstand, d. h. die Kraft, welche der vorhandenen Bewegung entgegenwirkt, ist dem Normal-Drucke proportional, mit welchem die tangierenden Körper auf einander gepreſst werden: der Wert dieses Verhältnisses heiſst Reibungs-Koëfficient.

2. Der Reibungs-Widerstand ist im allgemeinen bei relativ groſsem Drucke und bei konstanter Temperatur von der Gröſse der reibenden Fläche unabhängig.

3. Der Reibungs-Widerstand ist abhängig von den Materialien, welche zur Verwendung kommen, und wächst mit der Rauhigkeit der berührenden Flächen.

4. Der Reibungs-Widerstand ist während der Bewegung geringer als für den Übergang von der Ruhe in die Bewegung.

Die beiden ersten Sätze wurden von Amontons (1699) gefunden, dessen Versuche für alle Materialien denselben Reibungs-Koëfficienten $\left(\frac{1}{3}\right)$ *zu ergeben schienen. Leibniz stellte (1710) den dritten, Segner (1758) den vierten Satz auf, während spätere Arbeiten (Coulomb) die neuerdings als Irrtum erkannte Annahme zu bestätigen schienen, daſs die Reibung unabhängig sei von der Geschwindigkeit der Bewegungen.*

Die besten Versuche über die Reibung sind fast gleichzeitig von Rennie (Philosophical Transactions 1829) und Morin (1831 bis 1833) angestellt worden; dieselben zeigten, daſs der Reibungs-Koëfficient bei Anwendung von reichlichem Schmier-Material (Schweinefett, Olivenöl etc.) für alle Körper fast derselbe ist[1]. Bei geringem Drucke dürfen die Adhäsions-Erscheinungen nicht vernachlässigt werden, welche Satz 2 wesentlich modificieren.

Für die Reibung von festen Körpern in Flüssigkeiten beziehungsweise in Gasen gilt der Satz, daſs die Verzögerung der Bewegung von ihrer Geschwindigkeit (S. 314) abhängt und auſserdem der Gröſse der berührenden Fläche proportional ist: die Proportionalität wird für die verschiedenen Materialien durch den Koëfficienten der äuſseren Reibung (ε) bestimmt.

Benetzt eine Flüssigkeit, so ist $\varepsilon = \infty$ *zu setzen, weil hier die letzte Schicht der Flüssigkeit in Bezug auf die Wand gar nicht fortbewegt wird. In solchen Fällen tritt die Reibung einer Schicht der Flüssigkeit an einer anderen in Frage, für welche der Koëfficient der inneren Reibung* (η) *in Rechnung zu ziehen ist[2].*

---

1) Meiner Ansicht nach wird hier in allen Fällen die Reibung zweier gleichartiger Ölflächen (Kapillar-Erscheinungen) hergestellt.

2) O. E. Meyer. Poggendorffs Annalen 113.

Im Hinblick auf Translation und Rotation unterscheidet man gleitende und rollende Reibung.

Eine Gruppe von Erscheinungen der gleitenden Reibung pflegt man als Zapfen-Reibung zu bezeichnen, wobei man in der Praxis die Werte für neue und für eingelaufene Zapfen zu unterscheiden hat.

Für die komplicierte Erscheinung der rollenden oder wälzenden Reibung, deren Widerstände kleiner sind als die Widerstände bei Gleitungen, gilt in einer gewissen Annäherung Coulombs Regel[1]*: Der Reibungs-Widerstand für cylinderförmige Walzen auf horizontalen Unterlagen ist dem Drucke direkt und dem Radius des Cylinders umgekehrt proportional.*

Neben diesen beiden Arten von **Reibung** ist noch die **Steifigkeit** von Seilen etc. besonders in Betracht zu ziehen.

Da Seile nicht vollkommen biegsam sind, so tritt die Steifigkeit derselben bei Biegungen als ein Widerstand auf, welcher (Schaken einer Kette) auf Reibungs-Widerstände zurückgeführt werden kann.

Der Arbeits-Verlust durch Kräfte, welche normal zur Berührungs-Fläche wirken, d. h. der Verlust durch **Stöfse**, **Pressungen** etc. kann im allgemeinen durch zweckmäfsige Konstruktionen auf ein Minimum gebracht werden.

Stöfse innerhalb einer Maschine sind z. B. bei den Gaskraft-Maschinen in Rechnung zu bringen. Als Beispiel für wechselnde Pressungen mag der Druck und Zug an der Kolbenstange einer Dampfmaschine dienen.

Was nun den kinetischen Arbeits-Verlust anlangt, so ist derselbe beim Anlauf einer Maschine, d. h. wenn dieselbe in Gang gesetzt wird, relativ grofs. Wenn der Gang einer Maschine seinen Beharrungszustand erreicht hat, in welchem dieselbe ihre regelmäfsige Arbeit zu verrichten hat, so wird im allgemeinen kein kinetischer Verlust in Rechnung zu bringen sein.

Die Perioden in der Bewegung einer Maschine sind Anlauf, Beharrungszustand und Auslauf.

Dabei ist zu bemerken, dafs es für gewisse Maschinen (z. B. für Eisen-Walzwerke) keinen eigentlichen Beharrungszustand giebt, weil hier die im Anlaufe von der leer gehenden Maschine gewonnene lebendige Kraft direkt zur Arbeits-Leistung verwendet wird.

Der **Beharrungszustand** einer Maschine ist entweder gleichförmig oder periodisch.

Im ersteren Falle bewegen sich alle Maschinenteile mit konstanter Geschwindigkeit, im letzteren Falle folgen innerhalb je einer ganzen Periode Teil-Perioden eines gesteigerten und Teil-Perioden eines verringerten Arbeits-Verbrauches.

So arbeitet z. B. die Säge einer Sägemühle nur beim Nieder-

---

1) Théorie des machines simples pag. 126.

gange des Säge-Gatters, während dieselbe beim Hochgange desselben leer geht.

Während einer Periode können auch Maschinenteile gehoben und gesenkt werden, so daſs erst ein Verbrauch an Arbeit und dann ein Gewinn an Arbeit in Rechnung zu bringen ist.

Während des Beharrungszustandes (beziehungsweise während ganzer Perioden) einer Maschine wird bei konstanter Roh-Arbeit eine konstante Nutz-Arbeit abgegeben, so daſs also stets derselbe Arbeits-Verlust anzusetzen ist: die Komponenten der gegebenen Kräfte, welche dem Arbeits-Verluste entsprechen, bilden mit den durch sie geweckten Kräften, welche im allgemeinen als Widerstände zu bezeichnen sind, ein Kräfte-System, welches sich im Zustande des Gleichgewichts befindet.

Demnach ist bei der Konstruktion von Maschinen in erster Linie die Kenntnis der **Bedingungen für das Gleichgewicht der einzelnen Maschinenteile** erforderlich.

Da sich alle Bewegungen auf Translationen oder Rotationen zurückführen lassen, so müssen auch die Teile der Maschine auf elementare Teile zurückgeführt werden können, welche entweder der Translation oder der Rotation dienen oder eine Vereinigung beider Bewegungs-Arten bezwecken.

Es giebt **drei verschiedene Maschinen-Elemente: „Schiefe Ebene, Hebel, Schraube“.**

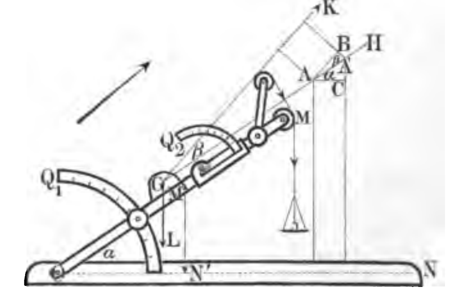
Für die Untersuchung des Gleichgewichtes der Maschinen-Elemente, auf welche man die Untersuchung des Gleichgewichts von Maschinen stets zurückführen kann, reicht das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten vollkommen aus.

Rühlmann[1]) *führt die Seil-Maschinen als einfache Maschinen ein, während er die Schraube als eine gewundene schiefe Ebene betrachtet.*

Letzteres ist entschieden zulässig, obwohl man die Schraube ebensowohl als ein Hebel mit gradlinig fortschreitendem Drehpunkte ansehen könnte, während die Seil-Verbindungen unserer Ansicht nach nicht als Maschinen-Elemente gelten können.

A. **Die schiefe Ebene.** Wenn der schwere Körper G durch eine Kraft auf der Ebene O H (Figur 66) fortbewegt wird, so tritt eine erlaubte Verschiebung ein, bei welcher die Hülfslinie G H um das Stück $AA' = \sigma$ fortschreiten mag.

Die Kräfte, welche hier



66.

1) Grundzüge der Mechanik.

zur Geltung kommen, sind die bewegende Kraft K, der Schwerdruck L des Körpers und die Reibung an der Berührungs-Fläche.

Die Reibung R, welche die entstehende Bewegung stets zu hindern sucht, wirkt parallel zur schiefen Ebene und ist dem Drucke gegen die reibende Fläche (S. 363) proportional (μ).

Bei der Verschiebung (σ) von GH wird K um $AB = \sigma . \cos\beta$, L um $A'C = \sigma . \sin\alpha$, R um σ in Richtung der Kraft verrückt, wobei die Arbeit A im ersten Falle positiv, im zweiten und dritten Falle negativ anzusetzen ist.

Bei einer Verschiebung BA würde die Arbeit von R dasselbe Vorzeichen haben wie die Arbeit der Kraft k.

Das Princip der virtuellen Verrückung liefert hier für das Gleichgewicht die Bedingung

$$K . \sigma . \cos\beta - L . \sigma . \sin\alpha - R . \sigma = 0.$$

Da der Druck des Körpers gegen die Ebene durch

$$L \cos\alpha - K \sin\beta$$

dargestellt wird, so ist $R = \mu\,(L \cos\alpha - K \cos\beta)$ d. h. man hat

$$K = L\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}.$$

Für $\beta = 0$, d. h. für eine Kraft-Richtung, welche der schiefen Ebene parallel läuft, ist $K = L\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$; wird außerdem $R = 0$, so hat man $\frac{K}{L} = \sin\alpha$, d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Für $\beta = -\alpha$, d. h. für eine Kraft-Richtung, welche der Horizontal-Ebene parallel läuft, ist $K = L . \frac{tg\,\alpha + \mu}{1 - \mu\, tg\,\alpha}$; wird außerdem $R = 0$, so hat man $\frac{K}{L} = tg\,\alpha$, d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Wenn Reibung auftritt, so ist (für $K = 0$) längs der schiefen Ebene (S. 214) statt der Beschleunigung $g . \sin\alpha$ eine Beschleunigung $g . \sin\alpha \pm \mu . g . \cos\alpha$ einzuführen, da die Reibung beim Abwärtsgleiten der Schwerkraft entgegenwirkt, während sie dieselbe beim Aufwärtsgleiten unterstützt.

Für eine Verschiebung BA gewinnt man die Formel:

$$K' = L\,\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta}.$$

Man hat also hier zu unterscheiden zwischen dem Werte von K, welcher bei der geringsten Vermehrung den Körper nach oben zieht und zwischen dem Werte von K, welcher das Hinabgleiten gerade verhindert.

Bestimmt man durch Versuche den Winkel ε, für welchen ein

sich selbst überlassener Körper grade zu gleiten anfängt, so hat man für den Beginn der Bewegung

$$g \cdot \sin \varepsilon - \mu \cdot g \cdot \cos \varepsilon = 0, \text{ d. h. } \operatorname{tg} \varepsilon = \mu.$$

Durch diese Methode (Coulomb) ist μ für die beiden in Anwendung gekommenen Materialien bestimmt und zwar für den Übergang aus der Ruhe in die Bewegung.

Während der Bewegung tritt ein anderer Koëfficient ν auf und zwar ist $\mu > \nu$, wie man aus folgender Tabelle ersieht.

	μ	ν
Bronce auf Bronce	*0,22*	*0,20*
Bronce auf Eichenholz	*0,62*	*0,25*
Bronce auf Schmiedeeisen	*0,20*	*0,18*
Bronce auf Gufseisen	*0,24*	*0,22*
Eichenholz auf Bronce	*0,62*	*0,35*
Schmiedeeisen auf Bronce	*0,20*	*0,18*
Gufseisen auf Bronce	*0,17*	*0,15*
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	*0,17*	*0,16*
Gufseisen auf Gufseisen	*0,16*	*0,15*
Leder auf Gufseisen mit Talg geschmiert	*0,15*	*0,12*

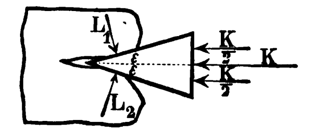
Bei sorgfältigst geglätteter Oberfläche und hinreichend geschmierten Reibeflächen darf man angenähert $\mu = 2\nu$ setzen und im Durchschnitt mit den Zahlen $\mu = 0{,}15$ und $\nu = 0{,}08$ rechnen.

Von den vielen Formen, in denen die schiefe Ebene auftreten kann, soll hier noch der **Keil** erwähnt werden:

Derselbe ist ein dreieckiges Orthogonal-Prisma aus festem Material, welches einen sehr spitzen Kanten-Winkel (ε) enthält und demnach zum Spalten eines Körpers oder zum Auseinandertreiben benutzt werden kann.

Ein Keil, dessen Querschnitt entweder ein rechtwinkliges oder ein gleichseitiges Dreieck ist, mufs beziehungsweise als eine schiefe Ebene oder als die Verbindung zweier schiefen Ebenen bezeichnet werden, deren Belastung durch den Druck des umgebenden Materials dargestellt wird.

Für einen Keil, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck vom Basis-Winkel R — ε ist, gelten (Figur 67) den beiden Formeln der schiefen Ebene entsprechend die folgenden Gleichungen



67.

$$K = 2L(\sin \varepsilon + \mu \cos \varepsilon),$$
$$K' = 2L(\sin \varepsilon - \mu \cos \varepsilon),$$

falls man die wirkende Kraft durch K und K′, die gleichen Belastungen L_1 und L_2 durch L und den Reibungs-Koëfficienten zwischen Keil und Material durch μ bezeichnet.

Statt das Princip der virtuellen Verrückungen direkt anzuwenden

kann man auf den Fall der schiefen Ebenen zurückgehen, wo die Kraft parallel zur Basis wirkt.

Die erste Formel gilt für den Wert von R, für welchen bei der geringsten Vermehrung ein weiteres Eindringen in das Material stattfindet, während im zweiten Falle das Hinausspringen des Keiles gerade verhindert wird: die Differenz

$$K - K' = 4\mu . L\cos\varepsilon$$

entspricht auch hier dem Unterschiede zwischen der Reibung der Ruhe und zwischen der Reibung der Bewegung.

Wenn $tg\,\varepsilon = \mu$, ist $K' = 0$, d. h. der Keil wird hier allein durch die Reibung gehalten.

B. **Der Hebel.** Ein stabförmiger[1]) Körper, welcher um eine feste Achse drehbar ist, kann benutzt werden, um Lasten zu heben (Hebebaum) und heifst deshalb ein Hebel. Komplíciertere Formen dieser Maschinen lassen sich stets auf die einfache Form des stabförmigen Körpers zurückführen.

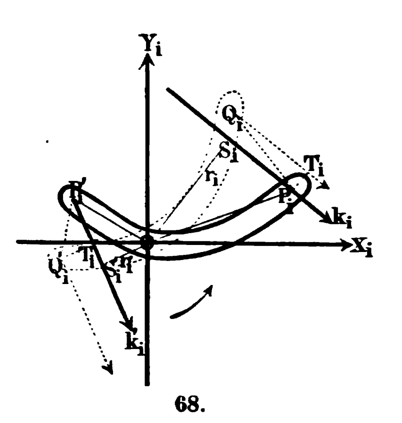
Wenn innerhalb eines unveränderlichen Systems eine feste Achse vorhanden ist, so zerlegt man die vorhandenen Kräfte zweckmäfsiger Weise parallel und normal zu derselben:

Die Parallel-Komponenten kommen nicht zur Geltung, so dafs hier nur Komponenten, welche in Normal-Ebenen der festen Achse gelegen sind, in Rechnung zu bringen sind.

Bezeichnet man eine solche Normal-Ebene, in welcher die beiden Kräfte k_i und k'_i gelegen sein mögen, mit $Y_i O X_i$, so wird die Arbeit dieser beiden Kräfte für eine Drehung um den Winkel α, bei welcher der Angriffspunkt P_i von k_i nach Q_i und der Angriffspunkt P'_i von k'_i nach Q'_i gelangt, bei Vernachlässigung der Zapfenreibung in O durch

$$-k_i r_i \alpha + k'_i r_i \alpha$$

gegeben, falls man die Abstände (Arme) der Kräfte k_i und k'_i vom Drehpunkte O beziehungsweise mit r_i und r'_i bezeichnet.



68.

Die Gesamt-Arbeit für eine Drehung um α wird demnach durch

$$\alpha \Sigma k_i r_i$$

dargestellt (Figur 68).

Da die Drehungen um die feste Achse erlaubte Verschiebungen sind, so mufs nach dem Principe der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht des Systems die Gleichung

---

1) Körper, bei denen eine oder zwei Dimensionen überwiegen, pflegt man als stabförmige beziehungsweise plattenförmige Körper von den blockförmigen Körpern zu unterscheiden.

$$\alpha \Sigma k_i r_i = 0 \text{ oder } \Sigma k_i r_i = 0$$

erfüllt sein.

Die Verschiebung in Richtung der Kraft ist für k_i durch $Q_i T_i$ gegeben.

Für kleine Winkel α ist Bogen $Q_i P_i$ als Element eines Kreises aufzufassen, so dafs von der Ähnlichkeit ($\sphericalangle Q_i P_i O = R$) der Dreiecke $Q_i T_i P_i$ und $O S_i P_i$ gesprochen werden darf: die Proportion $Q_i T_i : Q_i P_i = O S_i : O P_i$ bestimmt ($Q_i P_i = \alpha . O P_i$) die Gröfse von $Q_i T_i$ als αr_i.

In analoger Weise findet man $\alpha r'_i$ als Gröfse der Verschiebung für P'_i.

Im ersten Falle ist die Arbeit $-\alpha k_i r_i$, im zweiten Falle ist die Arbeit $+\alpha k'_i r'_i$, weil die Verschiebung dort nicht im Sinne der Kraft, hier aber im Sinne der Kraft erfolgt ist.

Die Gleichung $\Sigma k_i r_i$ sagt aus, dafs die **Summe der Drehungs-Momente der Kräfte** für die Z-Achse (S. 342) verschwinden mufs.

Sind überhaupt nur zwei in einer Ebene gelegene Kräfte k und k' gegeben, so gilt $k r = k' r'$, d. h. das Drehungs-Moment der einen Kraft mufs gleich dem Drehungs-Momente der andern Kraft sein.

Die Gröfsen r und r' werden hier Hebel-Arme genannt.

Wenn die Dreh-Achse sehr nahe an einem Ende des stabförmigen Körpers angebracht ist, so nennt man den Hebel einarmig und unterscheidet demnach einarmige und zweiarmige Hebel.

Wenn ein Hebel der einen oder der andern Art prismatisch gestaltet ist, so nennt man ihn einen graden Hebel und unterscheidet im Gegensatz dazu Winkel-Hebel.

Winkel-Hebel wendet man z. B. bei Klingelzügen an, deren Leitung unter einem rechten Winkel (Wand und Decke) fortgesetzt werden soll; handelt es sich darum, eine Glocke für zwei Züge verwendbar zu machen, so wendet man wohl auch unter anderm Kombinationen von einarmigen Hebeln und Winkel-Hebeln an.

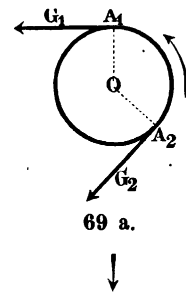
Grade Hebel mit zwei Armen kommen zur Geltung bei Brechstangen, Zangen, Scheren, Hebel-Wagen etc. Grade Hebel mit einem Arme kommen zur Geltung bei Hebebäumen, Siedeschneiden, Gelenk-Verbindungen im tierischen Skelett etc.

Wenn die Drehungs-Achse durch den Schwerpunkt des Hebels geht, so hat dessen Massen-Verteilung auf die Drehung keinen Einflufs, während sonst in jedem Punkte P_i des Hebels die Kraft $m_i g$ mit in Rechnung zu ziehen ist.

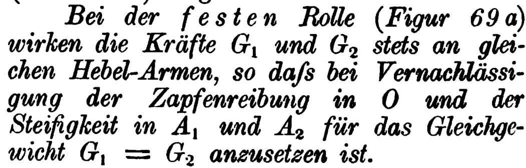
Die Kräfte $m_i g$, welche in ihrer Gesamtheit den Druck des Körpers auf seine Unterlage darstellen, haben (S. 351) eine Resultante, welche im Schwerpunkte angreift, so dafs statt ihrer Drehungs-Momente das Moment der Kraft $\Sigma m_i g = g . \Sigma m_i$ in Rechnung zu bringen ist.

Reduciert man die Untersuchung über den Hebel auf die Untersuchung einer Linie, welche man ohne Schwere denkt, so liefert man die Theorie eines idealen oder eines mathematischen Hebels, im Gegensatz zu welchem man dann von physischen Hebeln zu sprechen gewohnt ist.

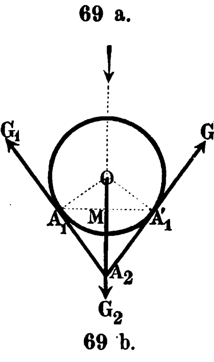
Von den vielen Formen, in denen der Hebel auftreten kann, sollen hier zunächst die feste und die bewegliche **Rolle** und dann bestimmte **Rollen-Verbindungen** (Wellrad, Flaschenzug etc.) betrachtet werden: Die Rollen sind kreisförmige Scheiben mit festem oder mit beweglichem Drehpunkte, welche einen peripherischen Einschnitt für die Aufnahme eines Seiles (Schnurlauf) tragen.



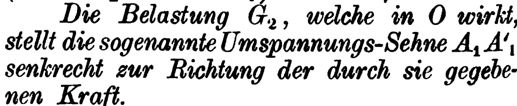
69 a.


Bei der festen Rolle (Figur 69 a) wirken die Kräfte G_1 und G_2 stets an gleichen Hebel-Armen, so dafs bei Vernachlässigung der Zapfenreibung in O und der Steifigkeit in A_1 und A_2 für das Gleichgewicht $G_1 = G_2$ anzusetzen ist.

Bei der losen Rolle (Figur 69 b) ist ein Seil (z. B. entsprechend G_1) direkt oder indirekt befestigt, während an dem andern (also entsprechend G'_1) eine Kraft wirkt.



69 b.

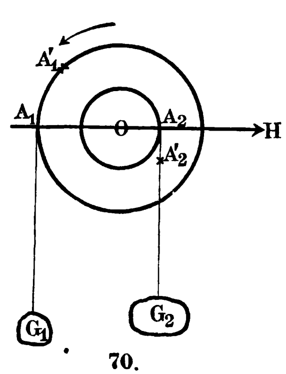

Die Belastung G_2, welche in O wirkt, stellt die sogenannte Umspannungs-Sehne $A_1 A'_1$ senkrecht zur Richtung der durch sie gegebenen Kraft.

Soll die Resultante der Kräfte G_1 und G'_1 die Kraft G_2 aufheben, so mufs dieselbe G_2 entgegengesetzt gleich ($G_1 = G'_1$) sein, d. h. man hat für das Gleichgewicht

$$G_1 : G_2 = r : A_1 A'_1.$$

Wenn die Richtungen von G_1 und G_2 einander parallel sind, so ist $A_1 A'_1 = 2r$, d. h. man hat $G_1 : G_2 = 1 : 2$.

Werden zwei feste Rollen von verschiedenem Radius (r_1 und r_2) konzentrisch verbunden, so entsteht (Figur 70) das Wellrad.



70.

Bei einer Drehung um einen kleinen Winkel φ gelangt beziehungsweise A'_1 nach A_1 und A'_2 nach A_2, d. h. man hat für das Gleichgewicht

$$\varphi \, . \, r_1 \, . \, G_1 - \varphi \, . \, r_2 \, . \, G_2 = 0$$
$$\text{oder } G_1 : G_2 = r_2 : r_1.$$

Das Wellrad kommt als Göpel (Spillenrad etc.) und als Winde (Haspel etc.) vor.

Lose und feste Rollen kann man zu Rollenzügen, Flaschenzügen oder Klobenzügen verbinden.

Bei dem Rollenzuge (Figur 71) mit parallelen Seilen hat man bei Vernachlässigung von Reibung und Steifigkeit

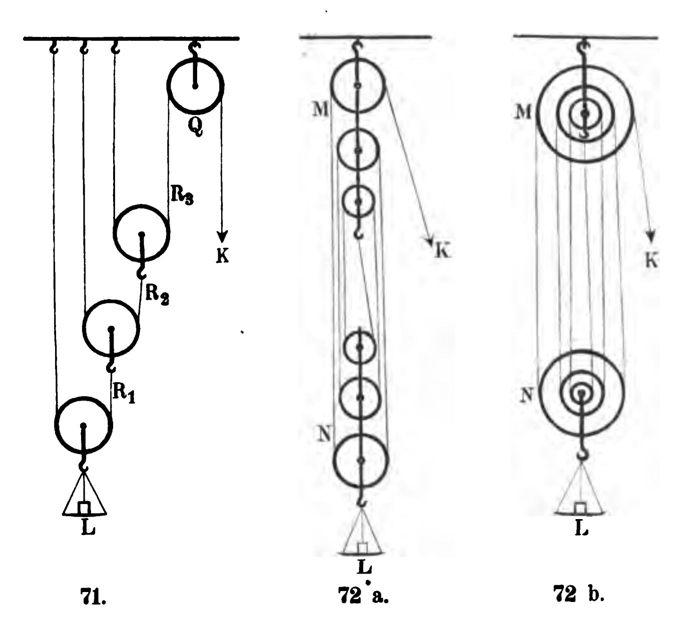
$$K = L \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

falls man mit n die Anzahl der losen Rollen bezeichnet.

Diese Beziehung folgt z. B. aus der Überlegung, daſs jedes befestigte Seil die Hälfte der Belastung trägt, welche an der beweglichen Rolle angebracht ist, so daſs für die erste Rolle $\frac{1}{2} \cdot L$, *für die zweite Rolle* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot L\right)$ *für die dritte Rolle* $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot L\right)\right]$ *u. s. f. anzusetzen ist.*

Werden die Centra mehrerer Rollen mit parallelen Achsen in feste Verbindung gebracht, so entsteht eine Flasche.

Werden die Centra mehrerer Rollen auf derselben Achse in feste Verbindung gebracht, so entsteht ein Kloben.



71. 72 a. 72 b.

Die Vereinigung einer festen (M) und einer losen (N) Flasche heiſst ein Flaschenzug, die Vereinigung eines festen (M) und eines losen (N) Klobens heiſst ein Klobenzug; bestimmte Formen dieser Maschinen sind in den Figuren 72 a und 72 b dargestellt.

Bei Vernachlässigung von Reibung und Steifigkeit hat man

für beide Apparate, falls man mit n die Anzahl aller Rollen bezeichnet, die Formel

$$K = L \cdot \frac{1}{n}.$$

Diese Beziehung folgt z. B. aus der Vergleichung der Arbeitswerte, welche der Verschiebung x der Kraft entsprechen: dieselben sind $K \cdot x$ und $L \cdot \frac{x}{n}$.

Aufserdem mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dafs alle die **Wagen**, welche der Massen-Bestimmung dienen, auf Hebel-Konstruktionen zurückweisen.

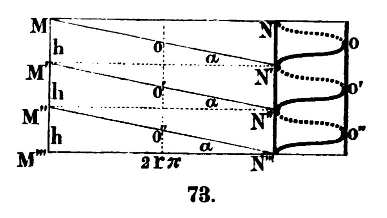
Die Theorie der gleicharmigen Hebel-Wage soll bei der Bestimmung der dynamischen Fundamental-Gröfsen entwickelt werden.

Als bestimmte Formen von Wagen mögen die Schnell-Wage und die Zeiger-Wage, und im besondern die Brücken-Wage angeführt werden.

C. **Die Schraube.** Wenn man den Mittelpunkt einer centrischen Figur der Ebene auf einer Schraubenlinie, welche die Ebene jener Figur unter rechtem Winkel schneidet, verschiebt, so entsteht ein Körper, welcher **Schrauben-Gewinde** genannt wird. Ein Vollcylinder, um welchen ein Schrauben-Gewinde gelegt ist, heifst eine **Schrauben-Spindel**, ein Hohlcylinder, aus dem ein Schrauben-Gewinde herausgenommen ist, heifst eine **Schrauben-Mutter**.

Die Konstruktion einer Schrauben-Linie (Schneide eines Korkziehers) eines Kreiscylinders läfst sich mit Leichtigkeit geben, wenn man den Mantel des Cylinders abgewickelt denkt.

Zieht man auf einem solchen in einer Ebene ausgebreiteten Mantel (Figur 73) das Linien-System (M, N), so entsteht bei Aufwickeln des Mantels eine Schrauben-Linie, wobei Punkt M auf N, Punkt M′ auf N′ etc fällt.



73.

Bei der Bewegung einer Schrauben-Spindel in der zugehörigen Schrauben-Mutter bleibt jeder Berührungspunkt P_i zwischen Spindel und Mutter auf einem bestimmten Kreis-Cylinder C_i vom Radius r, dessen Mantel in einer Ebene ausgebreitet werden kann: auf dieser abgewickelten Fläche (C_i) beschreibt jener Punkt P_i grade Linien und zwar unter Verhältnissen, die denen analog sind, welche beim Gleiten auf einer schiefen Ebene zur Geltung kommen, wenn die Kraft parallel zur Basis wirkt.

Der Steigungs-Winkel (α) der Schraube ist zugleich der Neigungs-Winkel der entsprechenden schiefen Ebene, während die Höhe und die Basis derselben beziehungsweise durch die Gang-

höhe (h) und die Kreis-Peripherie (r_i) der betreffenden Schraube dargestellt wird.

Da $\tang \alpha = \frac{h}{2 r_i \pi}$ ist, so gelten hier die Formeln

$$K = L \frac{h \mp \mu . 2 r \pi}{2 r \pi \pm \mu . h}.$$

Das obere Vorzeichen führt zu einer Kraft, welche das Sinken der Last gerade hindert, während das untere Vorzeichen zu einer Kraft führt, welche bei der geringsten Vermehrung zum Heben der Last verwendet werden kann.

* * *

Es ist wohl zu beachten, dafs die Arbeit von Kraft und Last für die Maschinen im Zustande des Gleichgewichts stets dieselbe ist, dafs aber Kraft und Last selbst höchst verschieden sein können.

Daraus geht wiederum die überwiegende Bedeutung des neueren Begriffes „Arbeit“ im Gegensatz zu der Bedeutung des älteren Begriffes „Kraft“ hervor[1]).

Je kleiner nun die Kraft ist, welche zur Disposition steht, um so gröfser ist der Weg, auf welchem dieselbe zur Wirkung gelangen mufs, um eine bestimmte Arbeit zu verrichten. Da die Zeit, welche für eine bestimmte Arbeit notwendig ist, im allgemeinen diesem Wege proportional sein wird, so kann man sagen: die Maschinen verlangsamen die Arbeit im allgemeinen proportional zu der Erleichterung, welche sie gewähren.

§. 5. Das Princip für die Bewegung des Schwerpunktes und das Princip für die Veränderung der Flächen.

Im Gegensatz zu jenen allgemeinen Principien, welche bisher zur Behandlung kamen, sollen nun zwei Principien eingeführt werden, deren Gültigkeit gewissen Beschränkungen unterliegt: es handelt sich um Verschiebungen und Drehungen, bei welchen die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte des Systems nicht geändert wird, bei denen also das **beliebig veränderliche System** den **Charakter eines unveränderlichen Systems** behält.

In Bezug auf diese Verrückungen scheint es zweckmäfsig eine **Einteilung der gegebenen Kräfte** zu erwähnen, deren wir bisher nicht bedurften.

Erfahrungsmäfsig lassen sich die Beschleunigungen, welche bei den Bewegungen physischer Körper auftreten, stets auf Beschleunigungen zurückführen, welche zwischen je zwei Punkten P und Q zur Geltung kommen: wenn die beiden Punkte P und Q dem Systeme angehören, so sollen die entsprechenden Kräfte **innere Kräfte** genannt werden, während für den Fall, dafs P oder Q dem Systeme nicht angehört, von **äufseren Kräften** gesprochen werden soll.

---

1) Vergl. die Programm-Abhandlung von Kirsch, Technische Lehranstalten zu Chemnitz 1880.

Der Unterschied zwischen den beiden Arten von Kräften ist völlig relativ, da eine äufsere Kraft in die Gruppe der inneren Kräfte tritt, sobald man den entsprechenden, aufserhalb des Systems gelegenen, Punkt mit in das System hineinzieht.

Zur Charakterisierung der physischen Kräfte mag bemerkt werden, dafs dieselben in Richtung der Verbindungs-Strecke von P und Q zur Geltung kommen und dafs sie im allgemeinen von der Länge dieser Strecke und von den Wirkungs-Koëfficienten (m) der betreffenden Punkte abhängig sind.

Von der **Existenz der inneren Kräfte** darf bei den beiden Principien, welche jetzt vorgeführt werden sollen, völlig **abgesehen** werden, da nur Verschiebungen in Frage kommen, bei denen das System den Charakter eines unveränderlichen Systems behält.

Analoges wird für das Princip von der Erhaltung der Energie, dem wir uns zuletzt zuwenden, nicht zu behaupten sein.

1.

Wenn im Hinblick auf das Verbindungs-Gesetz eines Systems in drei auf einander senkrechten Richtungen erlaubte Verschiebungen möglich sind, bei welchen die relative Lage der einzelnen Systempunkte nicht geändert wird, so kann man **jedem Punkte in jeder dieser drei Richtungen dieselbe Verschiebung** erteilen und für den so gewonnenen Zustand $A_s = 0$ setzen.

Man gewinnt dann für jede der drei Richtungen (x, y, z) eine Gleichung von sehr einfacher Bedeutung:

$$\sigma^{(x)}_i . \Sigma m_i f^{(x)}_i = \sigma^{(x)}_i . \Sigma k^{(x)}_i$$
$$\sigma^{(y)}_i . \Sigma m_i f^{(y)}_i = \sigma^{(y)}_i . \Sigma k^{(y)}_i$$
$$\sigma^{(z)}_i . \Sigma m_i f^{(z)}_i = \sigma^{(z)}_i . \Sigma k^{(z)}_i .$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Schwerpunktes (S) des Systems für einen bestimmten Augenblick (S. 351) mit ξ, η, ζ, für welche man auch die Koordinaten x_i, y_i, z_i der einzelnen Punkte P_i berechnet denkt, so hat man für $m = \Sigma m_i$ anzusetzen

$$m . \xi = \Sigma m_i x_i , \quad m . \eta = \Sigma m_i y_i , \quad m . \zeta = \Sigma m_i z_i .$$

Betrachtet man nun ferner auf der x-Achse je zwei Elementar-Inkremente der Projektions-Bewegung der Punkte P_1, P_2, P_3 ... und ebenso je zwei Elementar-Inkremente der Projektions-Bewegungen des Punktes S, so gelangt man zu den Gleichungen

$$m \varphi^{(x)}_i = \Sigma m_i f^{(x)}_i , \quad m \varphi^{(y)}_i = \Sigma m_i f^{(y)}_i , \quad m \varphi^{(z)}_i = \Sigma m_i f^{(z)}_i ,$$

falls man die Beschleunigungen der Punkte ξ, η, ζ beziehungsweise mit $\varphi^{(x)}_i$, $\varphi^{(y)}_i$, $\varphi^{(z)}_i$ bezeichnet.

Demnach hat man die Beziehungen

$$m \varphi^{(x)}_i = \Sigma k^{(x)}_i , \quad m \varphi^{(y)}_i = \Sigma k^{(y)}_i , \quad m \varphi^{(z)}_i = \Sigma k^{(z)}_i ,$$

d. h. **die Bewegung des Schwerpunktes erfolgt unter den angegebenen Bedingungen so, als ob in ihm alle Masse vereinigt wäre und als ob alle bewegenden Kräfte in ihm angriffen.**

Für ein dissolutes System stellt der obige Satz eine Identität dar: insofern aber für ein veränderliches System der oben genannten

Beschaffenheit die Arbeit der Spannkräfte A_s gleich Null gesetzt wurde, hat man auch hier von einem Principe zu sprechen.

Man hat den bewegenden Kräften durch Parallel-Verschiebung den Schwerpunkt als Angriffspunkt zu geben.

Wenn dabei nach der Verschiebung (d. h. im Schwerpunkte) **Gleichgewicht** eintritt, so hat man $\Sigma k^{(x)}_i = \Sigma k^{(y)}_i = \Sigma k^{(z)}_i = 0$ zu setzen, d. h. es ist

$$m\varphi^{(x)}_i = 0, \ m\varphi^{(y)}_i = 0, \ m\varphi^{(z)}_i = 0.$$

In diesem Falle bewegen sich die Projektionen des Schwerpunktes (S. 187) mit konstanter Geschwindigkeit, d. h. der **Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig auf einer Graden.**

Ruht der Schwerpunkt unter diesen Umständen für ein Zeit-Element, so kommt er überhaupt nicht in Bewegung.

Wenn man von der Einwirkung der Fixsterne absieht, so unterliegt unser Planeten-System nur den Spannkräften, welche durch die gegenseitige Lage der einzelnen Himmelskörper bedingt ist, d. h. die Bewegung des Schwerpunktes unseres Planeten-Systemes kann in großer Annäherung als gleichförmige Bewegung auf gerader Linie angesehen werden.

Man hat diese Grade durch Beobachtungen zu bestimmen gesucht.

Auf einer absolut glatten Oberfläche würde ein Mensch, dessen Standfläche absolut glatt ist, keine Bewegung seines Schwerpunktes hervorrufen können, sobald sein Schwerpunkt einmal in Ruhe ist.

In den thatsächlichen Verhältnissen kommt die Reibung als bewegende Kraft zur Geltung: je glatter die reibenden Flächen (Eisbahn, Holzschuhe), desto schwerer ist die Fortbewegung, weil die Spannkräfte der Körper allein keine Änderung in der Lage des Schwerpunktes bewirken können.

Wäre kein Luftwiderstand vorhanden, so würde ein Vogel, der während eines Zeit-Elementes ruht, trotz aller Bemühung senkrecht zur Erde fallen [1]).

Beim Abfeuern eines Schusses aus einer ruhenden Kanone, welche auf absolut glatter Oberfläche steht, bleibt der Schwerpunkt des Systemes in Ruhe, so dafs der Vorwärts-Bewegung des Geschosses eine Rückwärts-Bewegung des Rohres entsprechen mufs.

Dieselbe ist auch unter den thatsächlich gegebenen Verhältnissen (Rückschlag) zu beobachten.

Denkt man den Schwerpunkt S des ruhenden Systemes in irgend einem Momente durch zwei Strecken mit dem Schwerpunkte S_1 des Geschosses, dessen Masse m_1 sein mag, und dem Schwerpunkte S_2 der Kanone, deren Masse m_2 sein mag, verbunden, so entsteht keine gebrochene Linie, sondern eine Grade. Dabei ist stets $\frac{SS_1}{SS_2} = \frac{m_2}{m_1}$ *und*

1) Vergl. das Beispiel von der Taube bei Kant, Kritik der reinen Vernunft, Einleitung.

zwar ist für praktische Verhältnisse $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\text{Rohr} + \text{Zubehör}}{\text{Geschofs}}$ *etwa 200 zu setzen.*

Der Schwerpunkt des Geschosses beschreibt eine bestimmte Kurve (angenähert eine Parabel) und zwar unabhängig davon, ob das Geschofs explodiert oder nicht: für das Teil-System der Sprengstücke gilt die obige Überlegung, d. h. der Schwerpunkt tritt bei der Explosion nicht unter die Einwirkung neuer Kräfte.

Analoges findet bei allen Veränderungen der Erdgestaltung (vulkanische Eruptionen etc.) statt.

Das Modell einer Dampfmaschine geräth, wenn es zu leicht gearbeitet ist, beim Gange in hüpfende Bewegungen [1].

Theorie der Rakete [2].

Wenn die bewegenden Kräfte stets einer Kraft äquivalent sind (S. 351), welche durch den Schwerpunkt des Systems geht, so bestimmt diese die Bewegung des Schwerpunktes, ohne auf die Drehung des Systemes einzuwirken.

Der Schwerpunkt eines physischen Körpers würde im luftleeren Raume eine Parabel (vergl. S. 272) beschreiben, während sich der Körper gleichzeitig um Momentan-Achsen dreht, welche durch den Schwerpunkt gehen.

2.

Wenn im Hinblick auf das Verbindungs-Gesetz eines Systems um drei auf einander senkrechte Achsen erlaubte Drehungen möglich sind, bei welchen die relative Lage der einzelnen Systempunkte nicht geändert wird, so kann man **jeden Punkt für jede dieser Achsen dieselbe Amplitude** erteilen und für den so gewonnenen Zustand $A_s = 0$ setzen.

Man gewinnt im Hinblicke auf die Theorie der Flächen-Beschleunigungen für jede der drei Achsen eine Gleichung von sehr einfacher Bedeutung.

Wenn man im Punkte (x_i, y_i, z_i) die Resultante k_i der gegebenen Kräfte und die Resultante r_i der Spannkräfte wiederum nach drei Achsen zerlegt, so hat man für diesen Punkt bei einer Drehung α_z um die Z-Achse als Arbeit (vergl. S. 347) zu berechnen:

$$\alpha_z \,.\, m_i\,(f^{(x)}{}_i \,.\, y_i - f^{(y)}{}_i \,.\, x_i)$$
$$= \alpha_z \,.\, (k^{(x)}{}_i \,.\, y_i - k^{(y)}{}_i \,.\, x_i) + \alpha_z \,.\, (r^{(x)}{}_i\, y_i - r^{(y)}{}_i \,.\, x_i.$$

Daraus folgt durch Summation für alle Punkte des Systems im Hinblick auf $A_s = 0$

$$\Sigma\, m_i\,(f^{(x)}{}_i \,.\, y_i - f^{(y)}{}_i \,.\, x_i) = \Sigma\,(k^{(x)}{}_i \,.\, y_i - k^{(y)}{}_i \,.\, x_i).$$

Bezeichnet man die Flächen-Beschleunigung erster Ordnung für den Punkt P_i in Bezug auf die Drehung um die Z-Achse mit $A^{(z)}{}_i$, so läſst sich die linke Seite der Gleichung darstellen (S. 258) als

$$\Sigma\, 2\, m_i\, A^{(z)}{}_i.$$

---

1) Vergl. Mach, Grundlinien der Lehre von den Bewegungs-Empfindungen 1875.

2) Vergl. z. B. Delaunay, Traité de mécanique rationelle und Bour, Cours de mécanique et machines.

Die Beziehungen

$$\Sigma\, 2\, m_i\, A^{(x)}_i = \Sigma\, (k^{(x)}_i\, y_i - k^{(y)}_i \,.\, x_i)$$
$$\Sigma\, 2\, m_i\, A^{(y)}_i = \Sigma\, (k^{(y)}_i\, z_i - k^{(z)}_i \,.\, y_i)$$
$$\Sigma\, 2\, m_i\, A^{(z)}_i = \Sigma\, (k^{(z)}_i\, x_i - k^{(x)}_i \,.\, z_i)$$

stellen in ihrer Gesamtheit das **Princip für die Veränderung der Flächen** dar.

Für ein dissolutes System stellt der obige Satz eine Identität dar: insofern aber für ein veränderliches System der oben genannten Beschaffenheit die Arbeit der inneren Spannkräfte A_s gleich Null gesetzt wurde, hat man auch hier von einem Princip zu sprechen.

Wenn das Drehungs-Moment der Kräfte für die Z-Achse verschwindet, so resultiert im allgemeinen

$$\Sigma\, 2\, m_i\, A^{(z)}_i = 0, \text{ d. h. } \Sigma\, 2\, m_i\, S^{(z)}_i = Ct + \text{constans}$$

und für homogene Systeme

$$2\, m\, \Sigma\, A^{(z)}_i = 0, \text{ d. h. } \Sigma\, S^{(z)}_i = C't + \text{constans.}$$

Diese Beziehung (S. 257) heifst der **Satz von der Erhaltung der Flächen** in Bezug auf die Z-Achse.

Wenn die Momente der Kräfte für die drei Orthogonal-Achsen eines Kreuzes verschwinden, so verschwinden sie für alle Achsen aus dessen (S. 98) Centrum, d. h. der Satz von der Erhaltung der Flächen gilt hier für jede Ebene des Raumes: in diesem Falle existiert (Laplace) eine Ebene, die unveränderliche (invariable) Ebene, für welche $\Sigma\, 2\, m_i\, S^{(z)}_i$ zu jeder Zeit ein Maximum ist.

Im allgemeinen ist die Summe der Gröfsen $m_i\, S^{(z)}_i$ und im besonderen ist die Summe der Gröfsen $S^{(z)}_i$ nur von den äufseren Kräften (k_i) abhängig.

Wirken keine äufsern Kräfte, wie es z. B. für unser Planeten-System bei seiner grofsen Entfernung von den Fixsternen innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung angenommen werden darf, so existiert eine unveränderliche Ebene[1]*, für welche die Gröfse $\Sigma\, m_i\, A^{(z)}_i$ ein Maximum ist.*

Denkt man ein lebendes Wesen, das keinen äufseren Kräften ausgesetzt ist, isoliert im Raume schweben, so kann sich dasselbe aus der Ruhe nicht selbst in gleichförmige Drehungen versetzen: wenn gewisse Körperteile von links nach rechts gedreht werden, so drehen sich andere von links nach rechts, weil die Summe der Sektoren stets konstant bleibt[2]*.*

Wenn sich die Erde beim Erkalten zusammenzieht, so würde der Sektor, welchen die Projektion irgend eines Punktes derselben auf die Äquatorial-Ebene in dieser innerhalb einer bestimmten Zeit beschreibt, immer kleiner und kleiner werden, wenn nicht gleichzeitig eine Vergröfserung der Umdrehungs-Geschwindigkeit (S. 183) stattfände.

---

1) Vergl. Laplace, mécanique céleste Bd. III, S. 163.

2) Vergl. Delaunay und Bour a. a. O.

Analoge Beispiele lassen sich mit Leichtigkeit in grofser Menge geben [1]).

§. 6. Das Princip von der Erhaltung der Energie.

1.

Wenn eine Kugel von der Masse m in der Nähe der Erdoberfläche frei fallend die Strecke x durchlaufen hat, so wird die Energie der Bewegung $\left(\frac{1}{2}\ m\,v^2\right)$ durch die Gröfse m g . x dargestellt.

Befand sich die Kugel bei Beginn der Bewegung ($v = 0$) in einer Höhe h über der Erdoberfläche, so hat die Energie der Bewegung im Momente des Aufschlagens den Wert m g . h, d. h. sie ist dann gröfser als in jedem andern Momente während des Falles.

Die Differenz zwischen dem Maximal-Werte m g . h und einem beliebig gewählten Werte m g . x, welcher der Fallstrecke x entspricht, stellt hier offenbar die Energie dar, welche die fallende Kugel noch erreichen kann.

Führt man diesen Energie-Wert, der noch erreicht werden kann, im Gegensatz zu der thatsächlich vorhandenen Energie der Bewegung als die **potenzielle Energie der Bewegung** ein, so gelangt man zu dem Satze, dafs für jeden Moment der Bewegung die **Summe aus der thatsächlich vorhandenen Energie** (m g . x) **und aus der potenziellen Energie** (m g . h — m g . x) **von konstantem Werte ist.**

Fafst man die Erde und den fallenden Körper in ihrem Vereine als ein System auf, so kann man sagen, dafs innerhalb des Systems für jeden Moment ein bestimmter Wert von Energie (E_a) thatsächlich vorhanden (aktuell) ist, während ein andrer bestimmter Wert von Energie (E_p) noch erreichbar (potenziell) ist und dafs die Summe beider Energieen, d. h. die totale Energie (E) für jeden Moment durch eine und dieselbe Gröfse (m g . h) dargestellt wird.

Analoge Verhältnisse finden auch statt, wenn eine Kugel innerhalb eines von Pol zu Pol gegrabenen Schachtes (S. 237) im Erdinnern pendelnd gedacht wird, wobei das Maximum der Energie für den Mittelpunkt der Erde erreicht wird.

Wenn man den Erdradius mit R bezeichnet, so ist hier (S. 238) anzusetzen:

$$\tfrac{1}{2}\, m v^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2\,\pi}{T}\,.\,R\,\sin 2\pi\,.\,\frac{t}{T}\right)^2.$$

Für $t = \frac{T}{4}$ *und für* $T = \frac{3}{4}$ *tritt innerhalb einer Doppelschwingung das Maximum ein, welches den Wert* $\frac{m}{2}\left(\frac{R\,.\,2\,\pi}{T}\right)^2$

1) Vergl. Mach, Grundlinien. Diese Abhandlung ist für das Studium dieser Paragraphen höchst empfehlenswert.

darstellt, so dafs sich die potenzielle Energie des Systems darstellt als

$$E_p = m\left(\frac{2\pi}{T}\,.\,R\cos 2\pi\,.\,\frac{t}{T}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\,.\,x\right)^2.$$

Es ist charakteristisch, dafs E_p aufser Konstanten nur von Mafs-Zahlen der Lage (x) abhängt.

Um diese Betrachtungen, welche hiernach als Darstellungen von Identitäten erscheinen könnten, zu erweitern, suchen wir das Allgemeine derselben festzustellen.

Wenn man beachtet, dafs E_p bisher als ein eindeutiger Rechnungs-Ausdruck aufgetreten ist, welcher aufser Konstanten nur Mafs-Zahlen der Lage der bewegten Systempunkte enthält, so gelangt man leicht zur Feststellung von Bedingungen, unter denen die gesuchten Analogieen für Systeme vorhanden sind: die Wichtigkeit dieser Special-Lösung liegt darin, dafs bei den physischen Bewegungen in der That Verhältnisse gegeben zu sein scheinen, welche die Voraussetzung der gegebenen Bedingung ohne Ausnahme gestatten.

Wenn die Beschaffenheit eines Systems, welches **nicht** unter dem Einflusse **äufserer** Kräfte steht, für jeden Moment einen Wert von potenzieller Energie bedingt, dessen Charakteristikum es ist, abgesehen von gewissen Konstanten, allein durch die Mafs-Zahlen der augenblicklichen Lage der System-Punkte in eindeutiger Weise bestimmt zu werden, so besteht die Gleichung

$$E = E_a + E_p = \text{constans}.$$

Für jedes dissolute System gilt (S. 339) die Gleichung

$$E_t - E_o = \Sigma\, m'\, a'_i\, s'_i + \Sigma\, m''\, a''_i\, s''_i + \ldots\ldots..$$

Unterscheidet man die Arbeit der inneren Kräfte $A^{(i)}$ von der Arbeit der äufseren Kräfte $A^{(a)}$, so gewinnt die obige Gleichung die Form

$$E_t - E_o = A^{(i)} + A^{(a)}.$$

Ist man nun imstande, ein gegebenes System als dissolutes System darzustellen[1]*, so gilt die obige Gleichung auch für dieses in Bezug auf alle vorhandenen Kräfte.*

Wenn sich nun $A^{(i)}$ als eine Differenz $A^{(i)}{}_t - A^{(i)}{}_o$ darstellen läfst, deren Minuendus sich, abgesehen von gewissen Konstanten, eindeutig durch die Mafs-Zahlen der Lage für den Zeit-Moment t und deren Subtrahendus sich, abgesehen von gewissen Konstanten, eindeutig durch die Mafs-Zahlen der Lage für den Zeit-Moment o darstellen läfst, so gewinnt die obige Gleichung die Form

$$E_t - A^{(i)}{}_t = E_o - A^{(i)}{}_o + A^{(a)}.$$

Eine solche Darstellung ist offenbar für je zwei beliebige Zeit-Momente möglich, wenn sich $A^{(i)}{}_t$ für jeden Zeit-Moment t eindeutig durch die Mafs-Zahlen der Lage darstellen läfst.

---

1) Dazu ist erforderlich, dafs die Bedingungs-Gleichungen die Zeit nicht enthalten. Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen S. 34.

Bezeichnet man den konstanten Wert $E_o - A^{(i)}_o$, *welcher für einen bestimmten Zeitmoment* (*o*) *berechnet ist, durch* C_o, *so gilt die Beziehung*

$$\mathfrak{I} = E_t - A^{(i)}_t = C_o + A^{(a)}.$$

In diesem Falle existiert für das System ein Rechnungs-Ausdruck $\mathfrak{I} = E_t - A^{(i)}_t$, *welcher sich zu jeder Zeit* (*t*) *als die Summe aus dem konstanten Werte* C_o *und aus dem variablen Werte* $A^{(a)}$ *ergiebt: dieser Ausdruck, welcher die innere Energie des Systems heifst, ändert sich in jedem Zeit-Elemente, um die, für dieses Zeit-Element in Rechnung tretende, Arbeit der äufseren Kräfte.*

Der erste Teil E_t *von* $\mathfrak{I}$ *stellt die Summe der aktuellen Energie der einzelnen System-Punkte* (E_a) *dar, während der zweite Teil* $-A^{(i)}_t$ *als Summe der potenziellen Energie der einzelnen System-Punkte* (E_p) *zu bezeichnen ist, so dafs man hat*

$$E = E_a + E_p = C_o + A^{(a)}.$$

Wenn sich nun auch $A^{(a)}$ *in analoger Weise stets als* $A^{(a)}_t - A^{(a)}_o$ *darstellen läfst, so gilt*

$$\mathfrak{A} = E_t - (A^{(i)}_t + A^{(a)}_t) = E_o - (A^{(i)}_o + A^{(a)}_o) = F_o.$$

In diesem Falle existiert für das System ein Rechnungs-Ausdruck $\mathfrak{A} = E_t - (A^{(i)}_t + A^{(a)}_t)$, *welcher zu jeder Zeit* (*t*) *durch dieselbe Konstante* F_o *dargestellt wird: dieser Ausdruck, welcher die Gesamt-Energie des Systems heifst, bleibt stets ungeändert.*

Der erste Teil E_t *von* $\mathfrak{A}$ *stellt die Summe der aktuellen Energie der einzelnen System-Punkte* (E_a) *dar, während der zweite Teil* $-(A^{(i)}_t + A^{(a)}_t)$ *mit negativem Vorzeichen angesetzt als Kräfte-Funktion oder Potenzial* (*U*) *bezeichnet wird, so dafs also*

$$U = A^{(i)}_t + A^{(a)}_t$$

einzuführen ist: die aktuelle Energie E_a *wird bis auf eine Konstante* (F_o) *durch die Kräfte-Funktion zum Ausdruck gebracht.*

Wenn im besondern keine äufseren Kräfte wirken, so ist bei der ersten Form der Darstellung $A^{(a)} = o$ *zu setzen, während für die zweite Form der Darstellung, wo die Gröfse U allein von den Kräften des Systems abhängt,* F_o *in* C_o *übergeht.*

In diesem Falle, wo $\overline{U}$ *statt U geschrieben werden mag, hat man* ($\overline{U} = -E_p$) *die Beziehungen*

$$E = E_a + E_p = \text{constans oder}$$
$$E - E_p = E_a = \overline{U} + \text{constans.}$$

Wenn sich $A^{(i)}$ *in der oben geschilderten Weise als* $A^{(i)}_t - A^{(i)}_o$ *darstellen läfst, so darf man offenbar statt* $A^{(i)}_t$ *auch* $A^{(i)}_t + K$ *anführen, wobei K irgend eine Konstante bedeutet.*

Wählt man diese Konstante K so, dafs für den numerisch gröfsten Wert von $A^{(i)}_t$, *welcher* $A^{(i)}_T$ *heifsen soll, die Gleichung*

$$A^{(i)}_T + K = 0$$

erfüllt ist, so bezeichnet $A^{(i)}_t + K$ *eine Gröfse* ($A^{(i)}_t$), *welche im allgemeinen negativ ist und die für* $t = T$ *den Wert „Null" hat.*

Geht man von dem Zeit-Momente $t = T$ aus, so hat man hier

$$(3) = E_t - (A^{(i)}{}_t) = (C_o) + A^{(a)},$$

und zwar ist dabei $-(A^{(i)}{}_t) = (E_p)$ *im allgemeinen positiv, während für* $t = T$ *die Beziehung* $(E_p) = 0$ *resultiert.*

Wenn $A^{(a)} = 0$ *zu setzen ist, so gelangt man hier zu einer Gleichung*

$$(E) = E_t + (E_p) = E_T,$$

in welcher $(E) = E_T$ *das Maximum der aktuellen Energie, d. h. die überhaupt erreichbare aktuelle Energie darstellt.*

Wenn man die angegebene Bestimmung von E_p *ein für alle Mal voraussetzt, so darf in Abkürzung für* (E_p) *stets* E_p *und demnach auch für* (E) *stets* E *geschrieben werden* [1]).

Die Gleichung $E = E_a + E_p$ scheint für jedes physische System, das sich selbst überlassen ($A^{(a)} = 0$) ist, in der That zu bestehen.

Wenn der Schwerpunkt einer frei fallenden Kugel in zwei Zeitmomenten $[t_1]$ *und* $[t_2]$ *bezüglich die Erhebungen* h_1 *und* h_2 *in Bezug auf die Erdoberfläche hat, so ist*

$$\frac{1}{2}\, m v^2 t_2 - \frac{1}{2}\, m v^2 t_1 = m g \,.\, x = m g \,.\, (h_1 - h_2),$$

d. h. man hat für das aus Erde und Kugel bestehende System:

$$\frac{1}{2}\, m v^2 t_2 + m g \,.\, h_2 = \frac{1}{2}\, m v^2 t_1 + m g \,.\, h_1 = E.$$

Bezeichnet man die Erhebung über die Erdoberfläche ganz allgemein mit h, *so gilt hier die Beziehung*

$$U = A^{(i)}{}_t = - m g \,.\, h,$$

während $E_p = m g \,.\, h$ *zu setzen ist.*

Die Gleichung $E_a + E_p = E$ stellt den Satz von der Erhaltung der Energieen-Summe (S. 39) dar.

Die Gröfse E_p könnte man auch als eine **im latenten Zustande befindliche aktuelle Energie** einführen, weil dieselbe in aktuelle Energie übergehen kann, ohne dafs man dem Systeme von aufsen irgend welche Bewegungen mitteilt und weil dieselbe infolgedessen schon, bevor ihre Umsetzung eintritt, in irgend einer Weise innerhalb des Systems als aktuelle Energie gedacht werden kann.

Wenn man in der That die Bedingungen für das Auftreten von Bewegungen ohne Ausnahme aus anderen Bewegungen herzuleiten sucht, so ist man auch gezwungen, dieser Vorstellung beizutreten, d. h. man mufs in der potenziellen Energie des Systems gleichfalls aktuelle Energie sehen, indem man dieselbe aus Bewe-

---

1) Vergl. die Bedingungen für stabile Gleichgewichts-Lagen bei Dirichlet, Crelles Journal Bd. 32. Vergl. ferner Schell, Theorie II, S. 541 und 542.

gungen der Systempunkte herleitet, welche innerhalb des Systems nur auf relativ kleinen Bahnstücken zustande kommen und welche infolgedessen für den Beobachter latent bleiben.

Wenn z. B. elastische Schwingungen eines Körpers gewisse Grenzen nicht überschreiten, so wird der Körper, mag er sich nun in Ruhe befinden oder mag er bewegt werden, scheinbar den Charakter eines unveränderlichen Systems haben.

Die Schwingungen, in welche ein Glas durch einen, seiner Gestaltung entsprechenden, Ton (S. 318) versetzt wird, bleiben dem schauenden Auge im allgemeinen verborgen, obwohl sie für die tastende Hand (beim Halten) zur Wahrnehmung gelangen, und doch können analoge Schwingungen so heftig werden, dafs ihre bis dahin latent gebliebene Energie in den aus einander fliegenden Trümmern des Glases als aktuelle Energie zur Anschauung kommen.

2.

Der **Satz von der Erhaltung der Energie** läfst sich in aller Strenge nur für bestimmte Systeme **beweisen**, welche **Potenzial-Systeme** genannt werden sollen [1]).

Wenn innerhalb eines Systems zwischen je zwei Punkten P_i und P_k nicht mehr und nicht weniger als zwei Kräfte von den Richtungen $P_i P_k$ und $P_k P_i$ zur Geltung kommen, welche ihren absoluten Beträgen nach einander gleich, in P_i und P_k angreifen und welche aufserdem, abgesehen von Konstanten, als eindeutige Rechnungs-Ausdrücke $(R_{i,k})$ der Entfernung $P_i P_k$ resultieren, so soll das betreffende System ein Potenzial-System genannt werden.

Ein **Specialfall** (S. 259 flg.) solcher Potenzial-Systeme ist in dem sogenannten **Newtonschen Systeme** [2]) gegeben, für welches der Rechnungs-Ausdruck $R_{i,k}$ proportional zu $\frac{1}{P_i P_k{}^2}$ ist.

Newton vereinigte die Keplerschen Gesetze in seinem **Gravitations-Gesetze**, demgemäfs die Bewegungen der Himmelskörper so vor sich gehen, als ob sie sich im direkten Verhältnisse ihrer Massen und im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihrer Central-Entfernungen anziehen.

Nach Newton hat man sich bemüht, die Gesamtheit aller physischen Bewegungen (auch im kleinen) nach Analogie der Bewegungen der Centra der Himmelskörper aufzufassen, d. h. man suchte jedes physische System als ein Newtonsches System darzustellen.

Wenn man bei diesen Bemühungen immer danach gestrebt hätte, eine möglichst genaue Beschreibung des Thatsächlichen zu liefern, so wäre man zu der Überzeugung gelangt, dafs der

---

1) Vergl. Helmholtz, Erhaltung der Kraft, 1847.

2) C. Neumann, Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme, S. 12.

Satz von Erhaltung der Energie nicht jener Pseudo-Veranschaulichung der Atome bedarf, welche die Wurzeln ihrer Kraft unmittelbar im antiken Materialismus hat.

Statt dessen suchte man das Seiende nach Analogie unseres Planeten-Systems anzuschauen, d. h. man löste es auf in ein System von unteilbaren Kugeln von äufserst kleinem Radius, begabte dieselben mit anziehenden und abstofsenden Kräften und konstruierte sich so eine Welt, innerhalb welcher für keine Form des Idealismus eine Stelle bleiben konnte [1]).

Wenn man die Vorstellung, welche man in Bezug auf die Bewegungen in unserm Planeten-Systeme ausgebildet hatte, der Erfahrung gemäfs analysierte, so würde man dazu gelangen, zwischen je zwei Punkten P_i und P_k von der Masse m_i und m_k je zwei Beschleunigungen anzunehmen, welche in den Richtungen $P_i P_k$ und $P_k P_i$ zur Geltung kommen und welche die Entfernung (r) der Punkte stets zu verkleinern streben: eine weitere Analyse zeigt, dafs man die Beschleunigung von P_k proportional zu m_i und dafs man die Beschleunigung von P_i proportional zu m_k anzusetzen hat.

Aus dieser Hypothese, welche in strenger Fassung den zweiten Teil des **Newtonschen Satzes** (S. 27) darstellt, folgt mit Hülfe der früher angegebenen Erfahrungen, welche den ersten Teil (S. 259 flg.) des **Newtonschen Satzes** darstellen, dafs die Beschleunigungen von P_i und P_k beziehungsweise proportional zu $\frac{m_k}{r^2}$ und $\frac{m_i}{r^2}$ sind und dafs die Kräfte, mit welchen sich P_i und P_k bewegen, demselben Ausdrucke $\frac{m_i\, m_k}{r^2}$ proportional sind.

Aus dem **Newtonschen Satze** leitet man unter Anderem folgendes Theorem her: Eine Kugel, welche aus konzentrischen Schichten von homogener Struktur besteht, erteilt einem aufserhalb gelegenen Punkte eine Beschleunigung, welche den Punkt nach dem Centrum der Kugel treibt: dieselbe ist proportional zu

$$\frac{\Sigma\, m_i}{r^2},$$

falls man die Masse der Kugel durch $\Sigma\, m_i$ und den Central-Abstand von Q durch r bezeichnet.

In analoger Weise folgt, dafs einem innerhalb gelegenen Punkte, dessen Abstand vom Centrum durch ρ bezeichnet werden mag, durch die Kugel eine Beschleunigung erteilt wird, welche den Punkt nach dem Centrum treibt: dieselbe ist proportional zu

$$\frac{\Sigma\, m'_i}{\rho^2} = \frac{4\,\pi}{3} \cdot \rho \cdot \delta,$$

falls man Masse und Dichtigkeit der zur gegebenen Kugel konzentrischen Kugel vom Radius ρ beziehungsweise mit $\Sigma\, m'_i$ und δ bezeichnet.

1) In Bezug auf den phänomenalen Atomismus vergleiche das Vorwort.

Da diese Theoreme [1]) den erfahrungsmäſsig gegebenen Verhältnissen entsprechen, so rechtfertigen dieselben die Voraussetzungen, welche durch den Newtonschen Satz eingeführt werden.

Gemäſs dem Newtonschen Satze müſsten in der Entfernung Null, d. h. bei Berührung zwischen P_i und P_k unendlich groſse, gegen einander gerichtete, Beschleunigungen auftreten, falls deren Beschleunigungen in endlicher Entfernung endlich sind.

Letztere Voraussetzung ist hier (m_i und m_k) nicht erfüllt, so daſs auch nicht ohne weiteres geschlossen werden darf, daſs die entsprechenden Körper unzertrennlich an einander haften.

Für die Berührung zweier Körper ist zu untersuchen, ob die Gröſse $\frac{\Sigma m_i m_k}{r^2}$ für die Grenzfläche endlich bleibt, wie es die Erfahrung fordert, oder ob dieselbe hier einen unendlich groſsen Wert annimmt.

Von dieser Untersuchung hängt es ab, ob die Gültigkeit des Newtonschen Satzes eine allgemeine ist oder ob dieselbe für sehr kleine Entfernungen ($r < \rho$) nicht vorhanden ist. Im letzteren Falle könnte man den Ausdruck des Newtonschen Satzes z. B. durch [2])

$$\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{\frac{\rho^2 - r^2}{\alpha^2}}\right)$$

ersetzen, wobei α und ρ sehr kleine Gröſsen bezeichnen: wenn r um Vieles gröſser ist als ρ, so wird $\frac{\rho^2 - r^2}{\alpha^2}$ eine sehr groſse negative und $e^{\frac{\rho^2 - r^2}{\alpha^2}}$ eine sehr kleine positive Zahl (ε), d. h. es resultiert $\frac{1}{r^2}(1 - \varepsilon)$ oder angenähert $\frac{1}{r^2}$.

Die Wichtigkeit des Newtonschen Satzes rechtfertigt eine kurze Wiederholung des Gedankenganges, welcher zu demselben führen muſste.

Die numerische Übereinstimmung zwischen der Acceleration der Mond-Bewegung (S. 230) und der Beschleunigung des freien Falles bestätigt den Zusammenhang zwischen der Bewegung eines geworfenen Körpers und der Bewegung des seine Bahn durcheilenden Planeten: eine Kugel, welche mit einer Geschwindigkeit von 7731,1 $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ in horizontaler Richtung geworfen würde, müſste die Erde, wenn keine Hindernisse vorhanden wären, als Mond umkreisen.

---

1) Vergl. Newton, Principia, lib. I, 75 und 76. Elementare Beweise dieses Satzes findet man z. B. bei Schellbach, Neue Elemente, S. 160 flg. Auf C. Neumanns diesbezügliche geometrische Konstruktionen mag besonders aufmerksam gemacht werden.

2) Vergl. Schellbach, Neue Elemente, S. 150.

Dieselbe Betrachtung verbindet auch die Bewegungen der Trabanten jedes andern Planeten, wobei g durch die Acceleration des betreffenden Planeten zu ersetzen ist.

Die Umlaufszeiten der 4 Monde des Jupiters sind in Sterntagen beziehungsweise

$$T_1 = 1{,}769,\ T_2 = 3{,}551,\ T_3 = 7{,}155,\ T_4 = 16{,}689,$$

während ihre mittleren Entfernungen sich beziehungsweise als

$$r_1 = 6{,}05\,a,\ r_2 = 9{,}62\,a,\ r_3 = 15{,}35\,a,\ r_4 = 27{,}00\,a$$

ausdrücken lassen, falls man den Radius des Jupiter mit a bezeichnet.

Wenn die Formel $g^a_{\rho,\varphi} = g \cdot \frac{R^2}{\rho^2}$ *auch für die Welt des Jupiter Gültigkeit hat, so würde hier die Beziehung*

$$g^a_{\rho,\varphi} = \frac{4\,\pi^2\,r_i}{T^2_i} \cdot a$$

zu einer Formel

$$g = \frac{4\,\pi^2}{R^2} \cdot \frac{r^3_i}{T^2_i} \cdot a^3$$

führen.

Berechnet man $\frac{r^3_i}{T^2_i}$ *der Reihe nach für die vier Trabanten, so gelangt man zu den Zahlen*

70,7637, 70,603 70,649, 70,669.

Die Übereinstimmung dieser 4 Werte ist hinreichend grofs, um die Analogie dieser Verhältnisse mit den Verhältnissen, welche bei Erde und Mond gegeben sind, hervortreten zu lassen.

Dieselbe Betrachtung verbindet ferner auch die Bewegungen aller Planeten unseres Sonnensystems, wobei g durch die Acceleration der Sonne zu ersetzen ist.

Diese Beziehungen haben im dritten Keplerschen Gesetze ihren Ausdruck gefunden, demgemäfs $\frac{r^3_i}{T^2_i}$ *für alle Planeten eine Konstante ist.*

Wählt man z. B. die Erde aus, um das g für die Sonne zu berechnen, so hat man r_i *den Wert 152 957 000 km und* T_i *den Wert* $365^d{,}256$ *zu geben, während* $R = 6\,366\,000$ *m zu setzen ist.*

Man erhält für die Beschleunigung an der Sonnen-Oberfläche etwa 28,3 mal so viel als die Beschleunigung an der Erdoberfläche beträgt, d. h. ungefähr $278{,}06\ \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde})\,.\,(\text{Sekunde})}$.

Wenn man jede Bewegung im Sonnensysteme für ein Zeitelement aufheben könnte, so würde sich im nächsten Zeitelemente [τ] einerseits jeder Planet in grader Linie auf die Sonne zu und andrerseits jeder Trabant in grader Linie auf seinen Planeten zu bewegen, ebenso wie der frei fallende Stein in einer Vertikalen auf die Erde herabstürzt.

Die Bestimmung der Beschleunigungen aller dieser Bewegungen läfst sich vollenden, wenn man annimmt, dafs zwischen je zwei physischen Punkten P_i und P_k eine Kraft proportional zu

$$\frac{m_i \,.\, m_k}{r^2_{i,\,k}}$$

zur Geltung kommt.

Wesentlich neu ist bei dieser Bestimmung, dafs der Koëfficient m_i, welcher die Wirksamkeit des bewegten Punktes P_i (Energie der Bewegung) bestimmen würde, auch für den ruhenden Punkt P_i eine gewisse Wirksamkeit festsetzt.

Aus dem Volumen (v_e) der Erde und aus deren Dichtigkeit (d_e), deren Bestimmung noch gegeben werden soll, folgt zunächst die **Masse** ($m_e = v_e \,.\, d_e$) **der Erde.**

Um die **Masse der Sonne** zu berechnen, vergleicht man die Mond-Bewegung, deren Centrum die Erde ist, mit der Erd-Bewegung, deren Centrum die Sonne ist.

Für das Mond-Centrum ist die Centripetal-Beschleunigung der Bewegung $\frac{4\,\pi^2 \,.\, \rho_m}{T^2_m}$, falls man mit ρ_m und T_m beziehungsweise den Radius der Mondbahn und die Umlaufszeit des Mondes bezeichnet; dieselbe Beschleunigung ist nach dem Newtonschen Satze proportional (k) zu m_e und $\frac{1}{\rho^2_m}$.

Demnach ist, falls man den Radius der Erde wiederum durch R bezeichnet:

$$\frac{4\,\pi^2 \,.\, \rho_m}{T^2_m} = k \,.\, \frac{m_e}{\rho^2_m} = g_R \,.\, \frac{R^2}{\rho^2_m}.$$

In analoger Weise findet man für die Bewegung der Erde

$$\frac{4\,\pi^2 \,.\, \rho_e}{T^2_e} = k \,.\, \frac{m_s}{\rho^2_e} = g_R \,.\, \frac{m_s}{m_e} \,.\, \frac{R^2}{\rho^2_m},$$

falls man mit ρ_e und T_e beziehungsweise den Radius der Erdbahn und die Umlaufszeit der Erde und mit m_s die Masse der Sonne bezeichnet.

Demnach folgt:

$$m_s : m_e = \frac{\rho^3_e}{T^2_e} : \frac{\rho^3_m}{T^2_m},$$

d. h. es ist

$$m_s = m_e \,.\, \frac{\rho^3_e}{T^2_e} \,.\, \frac{T^2_m}{\rho^3_m} = m_e \,.\, \frac{4\,\pi^2\,R}{g_R} \,.\, \left(\frac{\rho_e}{R}\right)^3 \,.\, \frac{1}{T^2_e}.$$

Stellt man m_s nach dieser Formel dar, so gelangt man zu

$$m_s = 358\,000\; m_e,$$

während eine genauere Rechnung $m_s = 355\,000\; m_e$ ergiebt.

Dasselbe Verfahren gestattet aus der Mond-Bewegung, deren Centrum die Erde ist, und aus einer Mond-Bewegung, deren Centrum der Jupiter (Saturn, Uranus) ist, die Masse des Jupiter (Saturn, Uranus) herzuleiten.

Dieses Verfahren mufs in doppelter Hinsicht als angenähert bezeichnet werden, da man einerseits die vorhandenen Bahnen durch Kreise ersetzt und da man andrerseits auf die gegenseitigen Beeinflussungen der Gestirne (Störungen) keine Rücksicht nimmt.

Diese Überlegungen zeigen auch, dafs man auf dem hier bezeichneten Wege relativ genaue Werte erhält, wenn man die Bewegungs-Verhältnisse der äufsersten Trabanten für die Rechnung benutzt.

Man findet für Jupiter, Saturn, Uranus beziehungsweise 340 m_e, *102* m_e, *14,5* m_e.

Die Masse derjenigen Planeten, welche keine Trabanten haben, ist aus den gegenseitigen Beeinflussungen (Störungen) dieser Planeten und andrer Planeten hergeleitet worden.

Für den Mond der Erde gestatten die Erscheinungen der Ebbe und Fluth Control-Rechnungen durchzuführen.

Man findet die Masse des Mondes als $\frac{1}{81}\, m_e$.

Aus den Dimensionen der Himmelskörper berechnet man, nachdem ihre Massen festgestellt sind, die bezüglichen Dichtigkeiten $\left(\frac{m}{v}\right)$.

Die Dichtigkeit (d_e) *der Erde, welche direkt bestimmt werden mufs, ist etwa 5,5.*

Für die Sonne findet man 0,25 d_e, *d. h. 1,375.*

Für den Mars, der unsrer Erde in allen Verhältnissen analog gebildet zu sein scheint, folgt 5,3, während Merkur 6,7, Venus 5,0, Jupiter 1,25, Saturn 0,72 als Dichtigkeit hat.

3.

A. **Scheinbare Abweichungen** vom Principe der Erhaltung der Energie. Wenn die Grenzflächen zweier Körper zur Berührung gelangen, so scheint des öftern ein Verlust an aktueller Energie einzutreten, welcher dem betrachteten Principe gemäfs von vornherein auf eine Umwandlung der „verlorenen“ Energie, sei es in andere aktuelle Formen, sei es in potenzielle Formen zurückweist.

Die Behandlung der Erscheinungen, welche bei der Berührung zweier Körper auftreten, kann im allgemeinen in einer **Theorie des Stofses** zusammengefafst werden: die Grundlage dieser Theorie bildet die Theorie des graden Stofses sphärischer Körper.

Wenn sich die Centra zweier Kugeln, welche aus konzentrischen Schichten von homogener Beschaffenheit bestehen, auf einer Graden bewegen, so entstehen bei einer Berührung der beiden Kugeln (beim Stofse) Beschleunigungen, welche die Richtung der Centrale haben.

Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln, deren Massen beziehungsweise m_1 und m_2 sein mögen, vor dem Stofse beziehungsweise mit v_1 und v_2, und nach dem Stofse beziehungsweise mit v'_1 und v'_2, so gilt nach dem Principe von der Erhaltung der Energie die Beziehung:

$$m_1 v^2_1 + m_2 v^2_2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2.$$

Andrerseits liefert das Princip für die Bewegung des Schwerpunktes die Gleichung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2.$$

Demnach resultiert:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \text{ und}$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Während des Stofses bewegen sich die beiden Körper für ein Zeit-Element mit der gemeinsamen Mittelgeschwindigkeit c, deren Wert sich nach dem Principe für die Bewegung des Schwerpunktes darstellt als:

$$c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Führt man die Gröfse c ein, so resultiert

$$v'_1 = 2c - v_1 \text{ und } v'_2 = 2c - v_2.$$

Beim Stofse physischer Körper scheint nun des öftern das bisher vorausgesetzte Princip der Erhaltung der Energie nicht zu gelten, weil hier die Energie der Bewegungen, welche vor dem Stofse vorhanden war, erfahrungsmäfsig dazu verwandt wird, innerhalb der Körper Bewegungen einzuleiten, welche mit Wärme-Empfindungen etc. verbunden sein können.

Wenn man bedenkt, dafs die Kugeln beim Stofse für ein Zeit-Element mit gemeinsamer Geschwindigkeit vorwärtsgehen, so gelangt man zu der Vorstellung, dafs die elastischen Bewegungen (S. 287) der Körper nach Verlauf dieses Zeit-Elementes eine Ungleichheit der Geschwindigkeiten hervorrufen.

Stellt man sich vor, dafs diese Bewegungen ganz fehlen, so setzt man unelastische Systeme voraus, für welche also $v'_1 = c = v'_2$ ist: hier tritt scheinbar ein Verlust von Energie ein.

Nach dem Stofse ist $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) c^2$, *d. h.*

$$\frac{1}{2}\left(m_1 v^2_1 + m_2 v^2_2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [v_2 - v_1]^2\right)$$

als Energie in Rechnung zu bringen, während die Gültigkeit des Principes $\frac{1}{2}(m_1 v^2_1 + m_2 v^2_2)$ *fordert.*

Stellt man sich vor, dafs die elastischen Bewegungen für die resultierende Bewegung der ganzen Systeme die Gültigkeit des

Principes in aller Strenge bedingen, so setzt man elastische Systeme voraus: hier tritt kein scheinbarer Verlust an Energie auf.

Dieser Fall unterliegt den im Eingange gemachten theoretischen Voraussetzungen und kann durch den Stofs von Elfenbein-Kugeln veranschaulicht werden.

In der That sind die physischen Körper ihrer Beschaffenheit nach zwischen die elastischen und unelastischen Systeme einzureihen, d. h. sie sind unvollkommen elastisch.

Hier wird ein Teil der Energie latent, indem er an dem stofsenden Körper bleibende Änderungen der Form hervorruft oder indem er in derselben Bewegungen einleitet, welche als Wärme [1]) empfunden werden etc.

Der unelastische Stofs kann durch eine Lehm-Kugel, welche gegen eine feste Wand geworfen wird, veranschaulicht werden.

Auf die Erscheinungen des **Central-Stofses** lassen sich eine Reihe von anderen Erscheinungen zurückführen, welche bei der Berührung zweier Körper auftreten.

Hier ist namentlich der scheinbare Verlust an Energie zu erwähnen, welcher durch Reibung hervorgerufen wird, wobei die Thatsache zu registrieren ist, dafs beim Gleiten eines Körpers auf einem andern erfahrungsmäfsig immer Form-Veränderungen und Erwärmungen auftreten.

Die Lehre von der Reibung (S. 44) ist noch so wenig ausgebildet, dafs die Zurückführung der hierher gehörigen Erscheinungen auf Stöfse von Elementen (S. 9) der sich berührenden Körper noch kaum in Angriff genommen werden konnte.

Als Specialfall des graden Stofses sphärischer Körper mag der Stofs gegen einen ruhenden Körper ($v_2 = 0$) hervorgehoben werden, bei welchem für elastische Systeme $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} . v_1$ und $v'_2 = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} . v_1$ und für unelastische Systeme $c = \frac{m_1\, v_1}{m_1 + m_2}$ in Rechnung zu bringen ist.

Beim Stofse gegen eine feste Wand, hat man m_2 unendlich grofs zu denken, so dafs hier im ersten Falle $v'_1 = - v_1$ und $v'_2 = 0$ und im zweiten Falle $c = 0$ resultiert: im ersten Falle prallt der stofsende Körper (Reflexion) ab, im zweiten Falle kommt er zur Ruhe.

Um die Geschwindigkeit von abgeschossenen Kugeln zu be-

---

1) Ein interessantes Beispiel für diese Verhältnisse teilte mir Herr Steinway (Braunschweig — New-York) mit: Schlechte Resonanzböden von Instrumenten, welche nicht in genügender Weise mitschwingen, erwärmen sich so stark, dafs man mit Hülfe eines Thermometers die Güte der Resonanzböden prüfen kann.

stimmen, benutzt man das ballistische Pendel[1]***; d. h. eine schwere Masse, welche um eine horizontale Achse drehbar ist.***

Durch das Einschlagen der Kugel, welche von weichem Holze oder von einer Thonfütterung aufgenommen wird, um den Stofs möglichst unelastisch zu machen, gerät das Pendel in Schwingungen, deren Verhältnisse durch die bekannte Konstruktion des Pendels, durch die bekannte Masse des Geschosses und durch dessen unbekannte Geschwindigkeit bestimmt werden.

Zur **Veranschaulichung der Wirkungsweise eines Stofses** stellen wir noch die folgende Betrachtung an.

Wenn man einen Körper von der Masse m in einer Vertikalen von der Erdoberfläche fortbewegt, so nimmt der Schwer-Druck desselben

$$m \cdot \frac{R^2}{\rho^2} \cdot g_{R,\varphi}$$

mit wachsendem ρ mehr und mehr ab, so dafs der Druck von 1 kg an einer bestimmten Stelle A der Erdoberfläche eben so grofs ist wie der Druck von $\frac{\rho^2}{R^2}$ kg an der entsprechenden (S. 193) Stelle A_ρ in der Entfernung ρ vom Erd-Centrum.

Daraus darf man nicht[2] schliefsen, dafs $\frac{\rho^2}{R^2}$ kg an der Stelle A_ρ mit derselben Leichtigkeit in Bewegung gesetzt werden könne wie 1 kg an der Stelle A, d. h. dafs in beiden Fällen unter analogen Bedingungen nach Ablauf der Zeit $[\tau]$ dieselben Geschwindigkeiten erzeugt werden.

Die Einleitung einer Bewegung läfst sich stets als das Resultat eines Stofses ansehen und hängt infolgedessen überhaupt nicht vom Schwer-Drucke ab: wenn ein Körper von der Masse μ mit der Geschwindigkeit c auf einen ruhenden Körper von der Masse m stöfst, so erhält derselbe bei elastischen Verhältnissen (S. 389) unter allen Umständen die Geschwindigkeit $\frac{2\,\mu}{m + \mu} \cdot c$.

Dagegen ist die Fortsetzung der Bewegung für A und A_ρ durchaus verschieden, weil die Gröfse $v_t = v_0 \pm g_{\rho,\varphi}\, t$ und $s_t = v_0 \pm \frac{1}{2}\, g_{\rho,\varphi}\, t^2$ von dem Werte von $g_{\rho,\varphi}$ durchaus abhängig sind.

In einer Entfernung von 50 000 geographischen Meilen (Mond-Centrum) vom Erd-Centrum würde ungefähr ein Schwer-Druck von der Gröfse $m \cdot \frac{1}{3384{,}6} \cdot \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})}$ *resultieren*

---

1) Vergl. z. B. Ad. Wernicke, Lehrbuch der Mechanik, S. 564.
2) Vergl. Schellbach, Neue Elemente, S. 351.

d. h. 3384,6 kg drücken dort so stark auf die Unterlage, wie hier 1 kg.

Wirft man einen Körper auf derselben Vertikalen das eine Mal an der Stelle A und das andere Mal an der Stelle A_ϱ *unter sonst gleichen Umständen empor, so entsteht in beiden Fällen eine gleichmäfsig verzögerte Bewegung, für welche* $v_t = v_o - g_{\varrho,\varphi}\, t$ *anzusetzen ist: die Steighöhe hat an der Stelle A den Wert* $\frac{v^2_o}{2\, g_{R,\varphi}}$*, während sie an der Stelle* A_ϱ *den Wert* $\frac{v^2_o}{2\, g_{\varrho,\varphi}}$ *hat, d. h. sie ist in* A_ϱ *ungefähr 3385 mal gröfser als in A.*

B. Für den **scheinbaren Verlust an Energie** bieten auch die Erscheinungen von **Ebbe und Flut** ein gutes Beispiel.

Die Accelerationen, welche Punkte der Erd-Oberfläche durch den Mond (beziehungsweise Sonne) erfahren, sind im Verein mit der durch die gemeinsamen Bewegungs-Verhältnisse von Erde und Mond (beziehungsweise von Sonne und Erde) bedingten Acceleration für verschiedene Punkte der Erd-Oberfläche im allgemeinen verschieden: die Wassermassen der Erd-Oberfläche geraten infolge dessen bei der leichten Verschiebbarkeit ihrer Teile in Bezug auf den festen Kern der Erde in Bewegung.

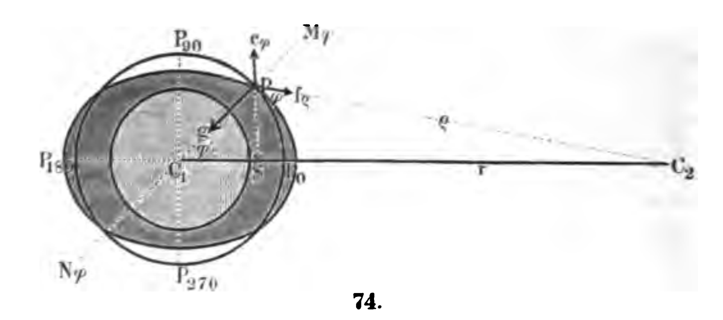
Dabei treten an der Grenze von Kern und Hülle Reibungs-Erscheinungen auf, die mit einem scheinbaren Verluste an Energie verbunden sein müssen.

Wenn man Erde (m_1) und Mond (m_2), deren Centra C_1 und C_2 die Entfernung r haben mögen, als ein System auffafst, welches aus seiner thatsächlich bestehenden Verbindung mit dem Planeten-Systeme gelöst ist, so gelangt man zu dem Satze, dafs sich Erde und Mond nahezu mit konstanter Winkel-Geschwindigkeit ω um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen, welcher dabei stets in Ruhe bleibt.

Das System ist ersetzbar (S. 383) durch die Centra C_1 *und* C_2 *von Erde und Mond, auf welche beziehungsweise die beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte von gleichem Werte* $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ *wirken, so dafs für den Schwerpunkt (S. 375) Annullierung eintritt.*

Da die Masse m_2 des Mondes etwa als $\frac{m_1}{81}$ einzuführen ist, während r ungefähr 60 Erd-Radien (= 60 R) beträgt, so ist der Schwerpunkt S des Systems um $\frac{60}{82}$ R oder angenähert um $\frac{3}{4}$ R vom Centrum der Erde entfernt.

Die Beschleunigung für einen Punkt P_φ der Erd-Oberfläche setzt sich zusammen aus der Centrifugal-Beschleunigung für die Bewegung um S und aus den Beschleunigungen, welche von C_1 und C_2 ausgehen.



74.

In der Richtung $P_\varphi C_1$ kommt dabei eine Gesamt-Beschleunigung (Figur 74)

$$g\left\{1-\frac{4-3\cos\varphi}{864000}-\frac{1}{81}\,\frac{60\cos\varphi-1}{(3601-120\cos\varphi)^{3/2}}\right\}$$

zur Geltung, welche für P_0 den Wert

$$g\left\{1-\frac{1}{864000}-\frac{1}{81}\cdot\left(\frac{1}{59}\right)^2\right\}$$

und welche für P_{180} den Wert

$$g\left\{1-\frac{1}{864\,000}+\frac{1}{81}\cdot\left(\frac{1}{61}\right)^2\right\}$$

annimmt, während man für P_{90} und P_{270} denselben Wert

$$g\left\{1-\frac{4}{864\,000}+\frac{1}{291\,600}\right\}$$

erhält.

Um diese Formel abzuleiten, berechnet man die Beschleunigung f_ϱ, welche C_2 in der Entfernung ϱ ausübt: dieselbe ist nach dem Newtonschen Satze $\frac{k\,.\,m_2}{\varrho^2}$.

Um k zu eliminieren benutzt man die Formel (S. 386), welche die von C_1 ausgehende Beschleunigung darstellt, so daſs $k = \frac{g\,.\,R^2}{m_1}$ und $f_\varrho = g\,.\,\frac{m_2}{m_1}\,.\,\frac{R^2}{\varrho^2}$ zu setzen ist.

Wenn man eine Strecke, welche f_ϱ darstellt, auf den Strahl $M_\varphi N_\varphi$ projiciert und ein Gleiches mit der in der Richtung SP zur Geltung kommenden Centripetal-Beschleunigung c_φ macht, so führt die algebraische Addition dieser Komponenten und der Beschleunigung [g] zu obiger Formel.

Die Rechnung ergiebt für P_0 und P_{180}, beziehungsweise die Werte g (1 — 0,00000470) und g (1 — 0,00000478), während für P_{90} und P_{270} gleiche Werte

g (1 — 0,00000120)

resultieren

Durch diese Verhältnisse werden also für die einzelnen Punkte der Umgrenzung des in Figur 74 dargestellten Querschnittes un-

gleiche Beschleunigungen bedingt: der Druck (m g) einer Masse m ist in den Punkten P_{90} und P_{270} gröſser als in den Punkten P_0 und P_{180}.

Denkt man sich nun zunächst statt der Erde einen festen Kern gleichmäſsig mit Flüssigkeit bedeckt, so wird innerhalb dieser Flüssigkeit ein Ausgleich der Druck-Differenzen stattfinden, so daſs sich die Flüssigkeit in P_0 und P_{180} ansammelt, während sie von P_{90} und P_{180} wegflieſst.

Dreht sich der feste Kern um eine Achse, welche senkrecht zu der dargestellten Querschnitts-Ebene der Zeichnung durch C, geht, so wird jeder Punkt während eines Umlaufes je einmal einem Punkte P_0 und einem Punkte P_{180}, so wie auch je einmal einem Punkte P_{90} und P_{270} entsprechen, d. h. jeder Punkt der Umgrenzung des festen Kernes wird zweimal während eines Umlaufes unter Kulmination (P_0 und P_{180}) und unter Depression (P_{90} und P_{270}) treten.

Diese Erscheinungen sind für die Erde erfahrungsmäſsig in groſser Annäherung vorhanden: die Zeit zwischen zwei Fluten beziehungsweise zwischen zwei Ebben beträgt $12^h\ 25'\ 14''$, d. h. sie ist gleich der Hälfte der scheinbaren täglichen Umlaufszeit des Mondes.

Auch die Sonne bedingt Flut und Ebbe und zwar sind hier die Höhen-Differenzen bedeutend geringer als bei der Erscheinung, welche durch den Mond bedingt werden.

Während des Neumondes, wo Sonne und Mond auf derselben Seite der Erde stehen, summieren sich beide Phänomene (Springflut), während zur Zeit des Vollmondes, wo Sonne und Mond auf verschiedenen Seiten der Erde stehen, die Differenz der beiden Phänomene (Nippflut) beobachtet wird.

In kleineren Meeren, welche nahezu von Land umschlossen sind, tritt Ebbe und Flut überhaupt nicht ein [1]).

Es unterliegt keinem Zweifel, daſs die stetige Reibung der Flutwelle eine stetige Verzögerung der Rotation der Erde bedingt, so daſs also hier scheinbar ein Verlust an Energie zu konstatieren ist.

Da die Beobachtung einer solchen Verzögerung bisher noch nicht mit Sicherheit gelang, so ist vorläufig die Annahme (S. 184) wohl berechtigt, daſs dieser verzögernde Einfluſs durch andere beschleunigende Einflüsse wiederum aufgehoben wird.

---

1) Es ist wesentlich zu bemerken, daſs zum Zustandekommen dieser Erscheinungen eine Druck-Differenz an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche vorhanden sein muſs. Stellt man sich vor, daſs die Spiegel zweier Gläser voll Wasser, deren eines bei uns und deren anderes in Amerika aufgestellt wird, durch einen Kautschuk-Schlauch kommunicierten, so würde man auch hier auf die Erscheinungen von Ebbe und Flut schlieſsen müssen.

C. Die Bestimmung der dynamischen Fundamental-Gröfsen.

Zur Darstellung aller physikalischen Gröfsen bedarf man dreier Einheiten, welche man als die **geometrische**, als die **phoronomische** und als die **dynamische** Einheit unterscheiden kann.

Die Festsetzung dieser Einheiten (Meter, mittlere Sekunde, Kilogramm) ist zunächst (S. 21) völlig willkürlich, während nach einer solchen Festsetzung alle Gröfsen der Physik in eindeutiger Weise bestimmbar sind.

Die **Gröfsen**, welche in der **Physik** eine Rolle spielen, zerfallen in **geometrische, phoronomische** und **dynamische** Gröfsen, je nachdem dieselbe beziehungsweise zu ihrer Darstellung die Einheit l, die Einheiten l unt t oder die Einheiten l, t und m bedürfen.

*Aus der **geometrischen** Einheit leitet man unmittelbar die Einheiten für Flächen und Volumina ab, während die **phoronomische** Einheit ohne Vermittelung geometrischer Einheiten zu keinen abgeleiteten Einheiten führt.*

Eine besondere Betrachtung verdienen diejenigen **dynamischen Gröfsen**, welche wegen ihrer grundlegenden Bedeutung als **fundamental** zu bezeichnen sind: abgesehen von der dynamischen Einheit (Masse) sind hier besonders **Dichtigkeit, Kraft** und **Arbeit** zu nennen.

An dieser Stelle mag bemerkt werden, dafs statt des früher besprochenen Mafs-Systems (S. 47) der Physik, welches auch das absolute [1]) Mafs-System genannt wird, zum Teil noch ein sogenanntes konventionelles Mafs-System [2]) in Brauch ist.

Hier bezeichnet das Wort Kilogramm eine Kraft P und zwar den Druck eines Kubik-Decimeters reinen Wasser bei 4° Celsius für die Sternwarte von Paris [3]).

Hier existiert für die Massen-Einheit kein besonderes Wort, d. h. man geht überall von Pariser Kraft-Werte P aus und spricht dann einfach von der Masse eines Kilogramms $\frac{P}{g}$.

§. 1. Die Bestimmung der geometrischen Gröfsen.

1.

Längen-Messungen werden im allgemeinen (S. 47 und 66) durch gradlinige und kreisförmige Teilungen (Skalen) ausgeführt.

Um eine Beobachtung noch genauer zu machen, als es die Wahl des kleinsten Teilungs-Intervalles gestattet, verwendet man den **Nonius** oder **Vernier**, welcher in einem längst des Hauptmafsstabes verschiebbaren kleinen Mafsstabe besteht.

---

1) Gaufs, Intensitus vis magneticae etc.
2) Vergl. Herwig, Physikalische Begriffe, S. 18.
3) Vergl. Wüllner, Lehrbuch, I, S. 12.

Man konstruiert die Nonien so, dafs z. B. auf 9 Teile der Hauptskala 10 Teile der Nebenskala kommen, dafs also ein Teil der Nebenskala 0,9 Teile der Hauptskala beträgt.

Fallen zwei Teilstriche beider Skalen auf einander, so differieren die nächsten beiden Teilstriche um 0,1, die folgenden beiden um 0,2, die nächstfolgenden beiden um 0,3 Teile der Hauptskala etc.

Endet nun ein zu messendes Objekt zwischen zwei Teilstrichen der Hauptskala, so schiebt man den Nonius an die Endfläche desselben an und sucht diejenige Stelle auf, wo Teilstriche beider Skalen angenähert zusammenfallen: ein Abzählen der Teilstriche des Nonius, welche zwischen der Endfläche des Objektes und der Koincidenz-Stelle liegen, gestattet den Bruchteil der zu messenden Länge bis auf 0,1 der Hauptskalen abzuschätzen und führt demnach um eine dekadische Einheit weiter.

Obwohl man durch Nonien für 20stel, 30stel etc. unter Hinzunahme einer Lupe die Genauigheit um ein Bedeutendes steigern kann, so hat diese Steigerung doch ihre wohl bestimmten Grenzen.

Für das Ausmessen von **graden Linien** kann man des öfteren ein **Kathetometer** benutzen. Dasselbe besteht im wesentlichen aus einer gradlinigen Stange, welche die Achse eines auf ihr verschiebbaren Fernrohres unter rechtem Winkel schneidet.

Man visiert mit dem Fernrohre, das aufserdem um die Stange drehbar ist, nach den beiden Endpunkten der zu messenden Länge und liest die Verschiebung des Fernrohrs auf der Skala ab, mit welcher die Stange versehen ist.

Ursprünglich (Dulong und Petit) wurde dieser Apparat nur für die Messung von Höhenunterschieden ersonnen und darum mit vertikaler Achse konstruiert.

Die Länge kleiner Strecken bestimmt man direkt mit Hülfe von **Mikrometer-Schrauben.** Dieselben bestehen im wesentlichen aus einer graduierten Schraube mit grofsem Kopfe und einer, parallel zur Schraubenspindel angebrachten, Markierstange mit Teilung. Da einer bestimmten Umdrehung der Schraube eine bestimmte Verschiebung der Schraubenspindel entspricht, so kann man Hebungen oder Senkungen der Spindel durch die beiden Teilungen bestimmen, da die eine ganze Umdrehungen und da die andere Bruchteile von Umdrehungen zu messen gestattet.

Bei einem Sphärometer steht die Schraubenspindel vertikal.

Soll z. B. die Dicke eines Drahtes gemessen werden, so senkt man erst die Spindel bis zur Berührung mit einer festen Platte und liest die Stellung der Scheibe ab, schraubt zurück, legt den Draht auf die Platte, senkt die Spindel bis zur Berührung mit dem Drahte und liest wiederum die Stellung der Schraube ab.

Um krumme Linien zu messen, wendet man möglichst biegsame Fäden etc. an, falls man sich nicht der Rechnung bedienen kann.

Ein kleines, um eine Achse bewegliches Zahnrädchen, welches auf einer Strecke von der Länge l eine Reihe von n Teilen durch Zahn-Abdrücke markiert, liefert auf einer krummen Linie m Teile gleicher Länge: die Länge der krummen Linie beträgt $l \cdot \frac{m}{n}$.

Um **Flächen** zu messen, kann man sich des öfteren der Wägung bedienen, indem man Platten von konstanter Dicke (z. B. Papier oder Pappe) herstellt, welche sich der Gestalt der zu bestimmenden Fläche möglichst genau anschmiegen.

Wenn man weiſs, was 1 Quadrat-Centimeter der verwendeten Platte wiegt, so kann man aus dem gefundenen Gewichte die Gröſse der betreffenden Fläche berechnen.

Um **Volumina** unmittelbar zu messen, wendet man graduierte Cylinder an und füllt dieselben mit Flüssigkeiten, welche das zu bestimmende Volumen direkt oder indirekt darstellen.

Mittelbare Messungen geschehen durch Wägung und durch Bestimmung der Dichtigkeit.

Wenn ein Körper in einer bestimmten Flüssigkeit unlöslich ist, so füllt man einen Maſs-Cylinder mit einer solchen Flüssigkeit, liest den Stand der Oberfläche ab, bringt den Körper in die Flüssigkeit und liest von neuem ab.

2.

Die Messungen mit Kreisteilungen, welche zur Bestimmung von Winkeln dienen, lassen sich des öfteren durch einen **Theodolith**[1]) ausführen.

Eine horizontale Kreisscheibe (Alhidade) ist innerhalb eines (horizontalen) koncentrischen Kreisringes, der mit einer Teilung versehen ist, drehbar.

Die Alhidade trägt in ihrer Mitte eine vertikale Säule, in welcher sich ein horizontales Lager für ein Fernrohr befindet, das mit einer vertikalen Kreisteilung (Vertikal-Kreis) fest verbunden ist.

Da die Alhidade um eine vertikale Achse drehbar ist, während sich das Fernrohr zugleich mit dem Vertikal-Kreise um eine horizontale Achse drehen läſst, so ist die Bestimmung der Winkel-Distanz zweier, in derselben Horizontal-Ebene gelegenen, Punkte ermöglicht[2]).

---

1) Die Ableitung des Wortes ist gänzlich unbekannt.

2) In Bezug auf Einstellung und Korrektion vergl. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, Bd. I.

§. 2. Die Bestimmung der phoronomischen Gröfsen.

1.

Die Instrumente, welche den Flufs der Zeit zur Darstellung bringen und demnach **Teile der Zeit zu messen** gestatten, werden im allgemeinen **Uhren** genannt.

Die Sonnen-Uhren sind unzweifelhaft die ältesten Instrumente (Schatten-Länge), welche der Zeit-Messung dienten.

Später traten Wasser-Uhren und Sand-Uhren auf: der Erfinder der Wasser-Uhren mit Räderwerk und Zeiger soll Ktesibius (140 v. Chr.) in Alexandrien gewesen sein.

Wann zuerst Räder-Uhren mit Gewichten in Brauch gekommen, ist unbekannt: einige gehen sogar bis auf Pacificus (850 n. Chr.) in Verona, andere nur bis auf Gerbert (als Papst Sylvester II.) zurück, während sicher feststeht, dafs im 12ten Jahrhundert in Klöstern Schlag-Uhren mit Räderwerk vorhanden waren.

Ein deutscher Uhrmacher Heinrich von Wyk baute (1364—1370) in Paris im Auftrage des Kaisers Karl V. eine grofse Uhr mit Gewichten und Schlagwerk, während fast zu derselben Zeit (1354) die erste Uhr des Strafsburger Münsters angefertigt wurde.

Die Konstruktion der ersten Pendel-Uhr durch Huyghens wurde bereits (S. 246) erwähnt.

Vibrations-Chronoskope und Vibrations-Chronometer.

Um **Geschwindigkeiten** zu messen, wendet man des öfteren eigene Apparate an, statt dieselben unmittelbar durch Rechnung aus gemessenen Bahnstücken und Zeitteilen zu bestimmen [1].

Hydrometer und Anemometer.

Apparate zur Bestimmung der Licht-Geschwindigkeit etc.

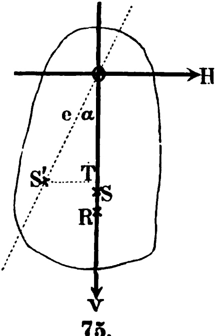
Apparate zur Bestimmung der Fahr-Geschwindigkeit von Bahn-Zügen, Schiffen etc.

Apparate zur Bestimmung der Flug-Geschwindigkeit und der Aufschlag-Geschwindigkeit von Geschossen.

2.

Um die **Beschleunigung der Schwere** (g) zu bestimmen, welche unter allen Konstanten von hervorragender Bedeutung ist, dient **das physische Pendel.** Wenn ein Körper von der Masse m, welcher nur unter dem Einflusse der Erdschwere steht, um eine horizontale Achse drehbar ist, so sucht sein Schwerpunkt eine möglichst tiefe Lage einzunehmen. Bei einer Bewegung aus der Ruhelage liefert die Reaktion an der festen Achse im Verein mit dem im Schwerpunkt angreifenden Drucke m g ein Kräftepaar, welches denselben in die Ruhelage zurückzuführen strebt: ein

1) Vergl. Emile With, Les machines, und die treffliche deutsche Bearbeitung dieses Buches von Ludwig Ramdohr (Halle 1876).



75.

solches physisches Pendel schwingt um die Ruhelage, weil er dieselbe nicht mit der Geschwindigkeit „Null“ erreicht.

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse mit e, so hat jenes Kräftepaar für einen Ausschlag α den Wert $m g . e . \sin\alpha$. (Figur 75).

Dasselbe Kräftepaar läfst sich aber als eine Summe S von Kräftepaaren darstellen, wenn man für jeden Punkt P_i, dessen Abstand von der Achse r_i sein mag, eine analoge Überlegung anstellt.

Die Summe $S = g . \Sigma m_i . r_i . \sin\alpha_i$ läfst eine gewisse Transformation zu, wenn man bedenkt, dafs alle Punkte P_i dieselbe Winkel-Beschleunigung η haben, welche sich aus ihrer beziehentlichen Tangential-Beschleunigung $g . \sin\alpha_i$ als $\frac{g . \sin\alpha_i}{r_i}$ ergiebt.

Man hat infolgedessen

$$S = \eta . \Sigma m_i r^2_i = m g . e . \sin\alpha.$$

Wenn man die Vertikale, welche für die Ruhelage durch den Schwerpunkt des Körpers geht, als **Achse** einführt, so kann man sich ein ideales Pendel von der Länge l denken, welches stets mit der Achse zusammenfällt und dessen Winkel-Beschleunigung

$$\eta' = \frac{g . \sin\alpha}{l}$$

mit der Winkel-Beschleunigung η übereinstimmt.

Aus der Gleichung $\eta = \eta'$ folgt

$$\frac{g . \sin\alpha}{l} . \Sigma m_i r^2_i = m g . e . \sin\alpha$$

d. h. man hat $$l = \frac{\Sigma m_i r^2_i}{m . e}.$$

Jedem physischen Pendel läfst sich ein ideales Pendel zuordnen, dessen Bewegung mit der Bewegung der Achse des physischen Pendels genau übereinstimmt.

Der Zähler des Bruches, welcher l darstellt, ist proportional dem Trägheits-Momente des Körpers für die Festsetzung, dafs Σm_i die Masse m desselben bedeutet, der Nenner jenes Bruches, der auch den Namen statisches Moment führt, ist das Drehungs-Moment von m g in Bezug auf die feste Achse.

Die Gröfse l heifst reducierte Pendellänge.

Die **Schwingungs-Dauer eines physischen Pendels** wird durch die Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma m_i r^2_i}{m g . e}}$$

angenähert (S. 243) dargestellt.

Die Berechnung der Gröſsen $\Sigma m_i r^2_i$ und e kann bei komplicierten Körperformen ganz undurchführbar werden, während die Beobachtung von T und die Messung von m durchaus keine Schwierigkeiten macht.

Wenn die **Berechnung von $\Sigma m_i r^2_i$** und e, welche für einfache Körperformen bei homogenem Material durch die früheren Untersuchungen (S. 138 und 125) erledigt ist, auf Schwierigkeit stöſst, so sucht man durch das **Experiment** zum Ziele zu gelangen.

Belastet man das Pendel in zwei Punkten der Pendel-Achse durch zwei Körper von gleicher Form und gleicher Masse m', deren Schwerpunkte von der Drehungs-Achse gleiche Abstände r_1 haben, so erhält das Trägheits-Moment des belasteten Pendels für die Drehungs-Achse den Wert $k + 2m'(a^2 + r^2_1)$, wenn man das Trägheits-Moment des unbelasteten Pendels unter analogen Umständen mit k und das Trägheits-Moment jedes Belastungs-Körpers für eine der Drehungs-Achse parallele Schwer-Achse mit $m' . a^2$ bezeichnet.

Für einen andern Abstand r_2 erhält man ebenso

$$k + 2m'(a^2 + r^2_2).$$

Beobachtet man nun die Schwingungs-Dauer T des unbelasteten Pendels und die Schwingungs-Dauer T_1 und T_2 für Belastung beziehungsweise im Abstande r_1 und r_2, so haben T, T_1 und T_2 infolge der existierenden Belastungs-Verhältnisse denselben Nenner p.

Aus
$$p^2 \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = k + 2m'(a^2 + r^2_1)$$
und
$$p^2 \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = k + 2m'(a^2 + r^2_2)$$
folgt
$$p^2 = 4\pi^2 . \frac{2m'(r^2_1 - r^2_2)}{T^2_1 - T^2_2}.$$

Diese Bestimmung führt im Verein mit $p^2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = k$ zu

$$k = T^2 . \frac{2m'(r^2_1 - r^2_2)}{T^2_1 - T^2_2}.$$

Diese Methode ist von Gauſs für Horizontal-Schwingungen zur Bestimmung der horizontalen Komponente der erdmagnetischen Kraft verwendet worden, indem er einen Stab, welcher an einem Faden aufgehängt war, belastet und unbelastet um seine Ruhelage schwingen lieſs.

Eine andere Methode zur Bestimmung von g wird durch das **Reversions-Pendel** ermöglicht.

Auf der Achse des Pendels bestimmt die reducierte Pendellänge zwei Punkte, von denen der obere Aufhängepunkt (O) heiſsen mag, während der untere allgemein Schwingungs-Punkt (R) genannt wird: Legt man durch diese beiden Punkte parallele Drehungs-Achsen, welche die Achse des physischen Pendels unter rechtem Winkel schneiden, so hat das Pendel für beide Drehungs-Achsen dieselbe Schwingungs-Dauer.

Konstruiert man daher ein Pendel mit zwei festen Achsen

für bewegliche Belastung oder mit fester Belastung für verstellbare Achsen, so kann man durch Versuche eine Anordnung der beweglichen Teile erhalten, für welche die Schwingungs-Dauer für jede der beiden Achsen denselben Wert erhält: die Messung des Achsen-Abstandes liefert hier direkt l.

Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt und vom Schwingungspunkte beziehungsweise mit s_1 und s_2, so wird das Trägheits-Moment im ersten Falle für eine Länge l_1 durch $K_0 + m \cdot s^2_1$ und im zweiten Falle für eine Länge l_2 durch $K_0 + m \cdot s^2_2$ gegeben, falls man dasselbe für den Schwerpunkt durch K_0 bezeichnet.

Demnach ist $l_1 = \frac{K_0 + m \cdot s^2_1}{m \cdot s_1}$ *und* $l_2 = \frac{K_0 + m \cdot s^2_2}{m \cdot s_2}$, *so dafs*

$$l_1 s_1 - l_2 s_2 = s^2_1 - s^2_2 = l_1 (s_1 - s_2) = l_1 s_1 - l_1 s_2$$

und demnach auch $l_1 = l_2$ *resultiert.*

Da es unmöglich ist T_1 und T_2 völlig gleich zu machen, so mifst man die Abstände s_1 und s_2 des Schwerpunktes von den beiden Drehungs-Achsen und bestimmt daraus die Schwingungs-Dauer T, welche der Lage $l = s_1 + s_2$ entspricht.

Dieselbe ist:

$$T = \sqrt{\frac{s_1 T^2_1 - s_2 T^2_1}{s_1 - s_2}}.$$

Aus $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ *folgt die Formel im Verein mit* $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$ *und* $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$.

Die genauesten Resultate erhält man durch die Besselsche **Differenz-Methode.**

Wenn man eine Kugel an einem dünnen Drahte aufhängt, so hat man ein physisches Pendel, welches einem mathematischen möchlichst nahe kommt.

Bezeichnet man die Länge des Pendels von der Aufhängung bis zum Mittelpunkte der Kugel mit λ_1, so ist die reducierte Pendel-Länge $l_1 = \lambda_1 + \varepsilon_1$, wobei ε_1 einen Fehler darstellt, welcher durch die Vernachlässigung einer genauen Berechnung (Trägheits-Momente) entsteht.

Benutzt man nun zwei verschiedene Pendel, so ist für kleine Amplituden

$$T^2_1 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1}{g} \text{ und } T^2_2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_2}{g}$$

und man gelangt zu

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1 - l_2}{T^2_1 - T^2_2} = 4\pi^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{T^2_1 - T^2_2} + 4\pi^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{T^2_1 - T^2_2}$$

Wenn man nun zwei Pendel verwendet, für welche $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ ist, so resultiert

$$g = 4\pi^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{T^2_1 - T^2_2}.$$

Der Kernpunkt der Besselschen **Differenz-Methode** besteht nun darin, die beiden Pendel so auszuwählen, dafs in der That $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ist.

Diese Bedingung wurde ermöglicht, indem Bessel dieselbe Pendel-Vorrichtung (Figur 76) benutzte und nur die Längen des Aufhängungs-Drahtes änderte.

Auf der Rolle M ist ein feiner Draht aufgewickelt, so dafs durch Drehung der Rolle der über den Stift N laufende Pendel-Draht verkürzt oder verlängert werden kann.

Für ein Pendel des Heidelberger Institutes (Elfenbein-Kugel an feinem Eisen-Draht) wurde seiner Zeit [1] *die Rechnung durchgeführt, wobei $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ resultierte: man hatte infolgedessen nur λ_1 und λ_2 zu messen.*

Um λ_1 und λ_2 zu bestimmen, hätte man für beide Lagen die Stellung des tiefsten und des höchsten Punktes der Pendel-Kugel auf einer vertikal aufgehängten Skala (vermittelst eines Fernrohres) abzulesen: da man hier nur der Gröfse $\lambda_2 - \lambda_1$ bedarf, so genügt es die Stellung des tiefsten Punktes (A beziehungsweise A_1) für jedes Pendel abzulesen.

76.

Der Draht trägt vor der durchbrochenen Skala einen kleinen Kork-Cylinder K_1, welcher später für die Bestimmung der Schwingungs-Dauer von Wichtigkeit ist.

Um nun die **Schwingungs-Dauer** eines Pendels zu bestimmen, bedient man sich am besten der Bordaschen **Koincidenz-Methode** [2]), welche die unbekannte Schwingungs-Dauer eines Pendels mit der bereits bekannten Schwingungs-Dauer eines andern Pendels (Mafs-Pendel) zu vergleichen gestattet.

Als **Mafs-Pendel** wählt man das Sekunden-Pendel einer astronomischen Uhr.

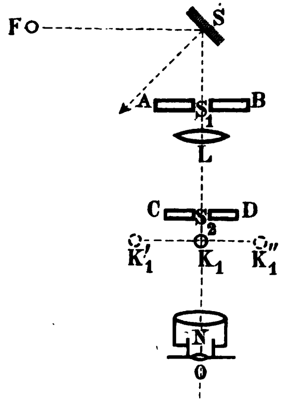
Nachdem die beiden Pendel in einem bestimmten Zeit-Momente zugleich durch die Ruhelage gegangen sind (d. h. nachdem sie in Koincidenz waren), beginnt das eine Pendel wegen der Differenz der Schwingungs-Dauer dem andern vorzueilen, bis endlich wieder eine Koincidenz zu Stande kommt.

Beobachtet man eine Reihe von Koincidenzen $C_1, C_2, C_3, C_4 \ldots$ deren erste gleichartig ist, bei welcher also der Durchgang der beiden Pendel in demselben Sinne erfolgt, so sind, wie leicht zu ersehen, die Koincidenzen $C_1, C_3, C_5 \ldots\ldots\ldots$ gleichartig, während die Koincidenzen $C_2, C_4, C_6 \ldots\ldots$ ungleichartig sind.

Bei dem Besselschen Apparate kann man die in Figur 77 dargestellte Anordnung des Versuches wählen: das Bild einer

1) Vergl. W. 2.

2) Base du système métrique Bd. 3, S. 337. 1810.



77.

Flamme F wird mit Hülfe des Spiegels S durch den Spalt S_2 der Skala CD in das Fernrohr N geworfen, sobald der Spalt S_1 des Uhr-Pendels AB und sobald gleichzeitig der Kork K_1 des Besselschen Pendels den Durchgang der Lichtstrahlen gestattet. Wird nun das Faden-Pendel in Bewegung gesetzt, so sieht ein Auge durch N in jeder Sekunde ein Bild von F, solange nicht die beiden Pendel zusammen durch die Ruhelage gehen; wenn aber beide Pendel zugleich in der Vertikalen liegen, so kann das Auge durch N keinen Licht-Eindruck erhalten.

So oft der Lichtblitz zwischen zwei Sekunden-Schlägen der Uhr ausbleibt, so oft koincidieren die beiden Pendel.

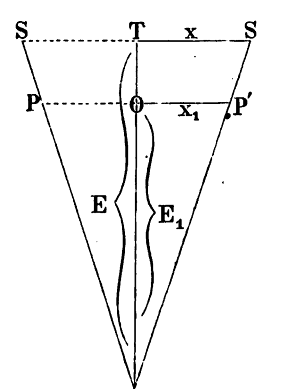
Beobachtet man nun eine Reihe auf einander folgender Koincidenzen, welche zur Zeit z_1, z_2, z_3 . . . . . stattfinden mögen, so dafs z_1, z_3, z_5 . . . . . gleichartige Koincidenzen sind, so macht das zweite Pendel in den Zeitteilen $z_3 - z_1$, $z_5 - z_3$, $z_7 - z_5$ . . . je zwei Schwingungen mehr oder weniger als das Uhr-Pendel.

Bezeichnet man die Schwingungs-Dauer des Uhr-Pendels und des Faden-Pendels beziehungsweise mit T_1 und bezeichnet man ferner die Differenzen $z_3 - z_1$, $z_5 - z_3$, $z_7 - z_5$ . . . . mit t_1, t_2, t_3 . . . . . so ist

$$t_1 T = (t_1 \pm 2)\, T_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; t_n T = (t_n \pm 2)\, T_1.$$

Aus diesen Beobachtungen bestimmt man den Wert für $\frac{T_1}{T}$, indem man mehrere Reihen von Koincidenzen (Sätze) beobachtet.

Bei der Besselschen Methode wäre dann aufserdem $\frac{T_2}{T}$ in analoger Weise festzustellen.



78.

Zum Schlusse mag noch bemerkt werden, dafs bei genauen Messungen auch die Abnahme der Amplituden zu berücksichtigen ist.

Befestigt man (Figur 78) hinter dem Pendel, dessen Kugel sich auf POP' bewegt, eine horizontale Skala STS', auf der man den Ausschlag x abliest, so ist der wirkliche Ausschlag des Pendels $x_1 = x \, . \, \frac{E_1}{E}$, falls man den Abstand des Fernrohr-Objektives A von POP' mit E_1 und von STS' mit E bezeichnet.

§. 3. Die Bestimmung der dynamischen Gröfsen.

1.

Um die Masse eines Körpers zu bestimmen (Wägung) bedient man sich eines gleicharmigen Hebels und eines Massen-Satzes, d. h. einer **Hebel-Wage** mit Zubehör.

Da man hier aus der **horizontalen Stellung des Hebels** (Wagenbalkens) jedesmal auf die Gleichheit zweier Massen schliefsen will, so mufs sich der Wagenbalken bei fehlender Belastung horizontal stellen.

Man erfüllt diese Bedingung bei homogenem Material, indem man den Apparat so konstruiert, dafs eine bestimmte durch die Achse gehende Ebene für denselben Normal-Diametral-Ebene wird. *Es genügt übrigens, wenn man diese Bedingung nur für den Wagenbalken herstellt und in entsprechenden Punkten desselben Schalen von gleichem Gewichte aufhängt, weil dann bei horizontaler Stellung Gleichgewicht eintritt.*

Der Schwerpunkt des ganzen Apparates ist in seiner **Lage** durch die vorige Bedingung insoweit bestimmt, als die dort erwähnte Ebene notwendig eine Schwer-Ebene ist.

Setzt man des weiteren fest, dafs der Schwerpunkt in derjenigen Vertikalen liegt, welche durch die Mitte der Achse bestimmt wird, so kann es sich nur noch darum handeln, ob derselbe unterhalb oder oberhalb des Achsen-Centrums gelegen sein oder mit diesem zusammenfallen mufs.

Der **Schwerpunkt mufs unterhalb des Achsen-Centrums** liegen.

Wenn der Schwerpunkt innerhalb der Achse läge, so wäre bei fehlender Belastung für jede Lage Gleichgewicht (indifferent) vorhanden, während bei dem geringsten Übergewicht eine vertikale Stellung des Hebels angestrebt würde: eine solche Wage würde unbrauchbar sein.

Läge der Schwerpunkt oberhalb der Achse, so würde das geringste Übergewicht ein Umschlagen des Wagenbalkens (labil) hervorrufen, weil der Schwerpunkt stets eine möglichst tiefe Lage anzunehmen sucht: eine solche Wage würde, abgesehen von der praktischen Unausführbarkeit der Konstruktion, unbrauchbar sein.

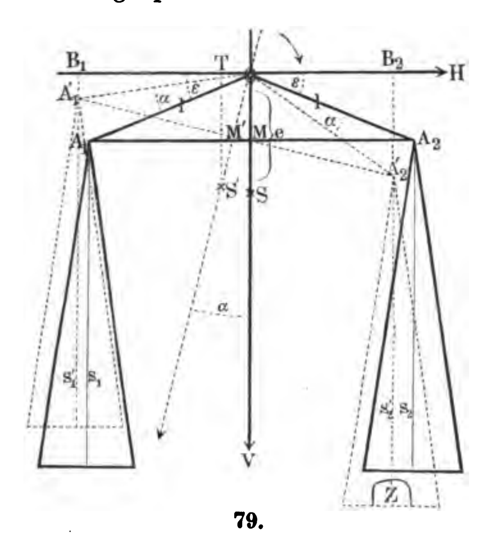
Dafs die dritte Möglichkeit (stabil) zu praktischen Konstruktionen führt, folgt aus der Überlegung, dafs der Schwerpunkt hier bei fehlender Belastung eine möglichst tiefe Lage hat, aus welcher denselben ein Übergewicht nur um relativ kleine Bogen verschiebt.

Die Thatsache einer horizontalen Hebel-Stellung untersucht man durch die Lage eines, normal zum Wagenbalken angebrachten, Zeigers, welcher vor einer Kreisteilung hin und her schwingen kann: der Nullpunkt der Teilung entspricht der horizontalen Stellung des Wagebalkens.

Es ist von hoher Bedeutung, dafs die Ausschläge des Zeigers einen möglichst grofsen Wert erreichen, oder dafs die Wage, wie man zu sagen pflegt, empfindlich ist.

Die **Empfindlichkeit** einer Wage mifst man durch die **Tangente des Ausschlag-Winkels für 1 mgr Übergewicht bei bestimmter Belastung.**

Wenn der eine Arm des Wagenbalkens die Verlängerung des andern Arms ist, so ist die Empfindlichkeit der Wage von der Belastung unabhängig: in allen andern Fällen darf man nur von der Empfindlichkeit für eine bestimmte Belastung sprechen.



79.

Wenn die Wage für einen Ausschlag α zur Ruhe gekommen ist, so mufs die Summe der Momente für die wirkenden Kräfte Null sein.

Bezeichnet man die Masse der Wage mit m_w und die Masse jeder (eventuell belasteten) Schale mit $\frac{1}{2} m_s$, bezeichnet man ferner den Abstand von Schwerpunkt und Drehungs-Achse mit e und bezeichnet man endlich die Länge (Figur 79) eines Armes mit l, so erhält die Momenten-Gleichung, falls die Arme des Balkens in der Ruhelage mit der Horizontalen den Winkel $\pm \varepsilon$ bilden, für ein Übergewicht (Zusatz) von der Masse m_z die Form:

$$\left(\frac{1}{2} m_s + m_z\right) g\, l \cos(\pm \varepsilon + \alpha) - \left(\frac{1}{2} m_s\right) g\, l \cos(\pm \varepsilon - \alpha) - m_w\, g\, e \sin \alpha = 0.$$

Daraus folgt

$$tg\, \alpha = \frac{1}{\pm \frac{m_s + m_z}{m_z} \cdot tg\, \varepsilon + \frac{m_w}{m_z} \cdot \frac{e}{l} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon}}$$

d. h. die Empfindlichkeit nimmt mit steigender Belastung im allgemeinen beziehungsweise ab $(+\varepsilon)$ oder zu $(-\varepsilon)$.

Wenn der eine Arm des Wagenbalkens eine Verlängerung des andern Armes ist, so resultiert $(\varepsilon = 0)$ hier

$$tg\, \alpha = m_z \left(\frac{l}{e \cdot m_w}\right),$$

d. h. die Empfindlichkeit ist hier unabhängig von der Belastung m_s.

Um eine Wage, deren Empfindlichkeit von der Belastung unabhängig ist, **möglichst empfindlich** zu machen, hat man derselben bei möglichst geringem Gewichte (m_w) möglichst lange Arme (l) zu geben und hat aufserdem die Drehachse möglichst nahe am Schwerpunkte (e) anzubringen.

Bei der Konstruktion ist darauf Rücksicht zu nehmen, dafs sich lange Arme leichter verbiegen als kurze Arme, ganz abgesehen davon, dafs die Masse der Wage mit der Verlängerung der Arme zunimmt.

Da eine Hebel-Wage den Druck einer Masse $m_s + m_z$ mit dem Drucke einer Masse m_s für denselben Wert von g vergleicht, so dient dieselbe nicht zu Druck-Bestimmungen (Kraft-Messung), sondern zur Feststellung der Masse.

Der Satz von der Konstanz der Masse und der Satz von der Konstanz der Massen-Summe werden durch die Wage bestätigt.

Der Faktor g hebt sich innerhalb der Momenten-Gleichung fort. Die Berechtigung jener beiden Erfahrungs-Sätze, welche man zwar in allen gegebenen, aber nicht in allen möglichen Fällen prüfen kann, liegt wiederum nur in der Fruchtbarkeit ihrer Verwendung.

Unter dem **Fehler einer Wage** versteht man das Verhältnis der Längen ihrer Arme.

Nennt man die Längen der beiden Arme beziehungsweise l und l' und die Masse der beiden Schalen beziehungsweise $\frac{1}{2} m_s$ und $\frac{1}{2} m'_s$, so sollte der Theorie nach $l = l'$ und $m_s = m'_s$ sein: diese Forderung ist selbst bei den besten Wagen nicht genau erfüllt.

Um möglichst genau zu arbeiten, führt man infolgedessen eine Wägung für die rechte und eine Wägung für die linke Seite der Wage aus, um eine Masse M zu bestimmen. Hat man für die rechte beziehungsweise für die linke Seite dem Gewichtssatz die Massen P und P' zu entnehmen, um M ins Gleichgewicht zu bringen, so ist

$(m_s + P)\, l = (m'_s + M)\, l'$ *und* $(m'_s + P')\, l' = (m_s + M)\, l$

oder $P\, l = M\, l'$ *und* $P'\, l' = M\, l$.

Daraus folgt $M = \sqrt{P\, P'}$.

Setzt man $P' = P \pm \pi$, *so ist*

$$M = P \sqrt{1 \pm \frac{\pi}{P}}.$$

Da $\frac{\pi}{P}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so erhält man bei Entwicklung der Wurzel angenähert

$$M = P\left(1 \pm \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{P}\right) = \frac{2\,P \pm \pi}{2} = \frac{P + P'}{2},$$

d. h. man darf das geometrische Mittel $\sqrt{PP'}$ *hier durch das arithmetische Mittel ersetzen.*

Der Fehler (ε) *der Wage, d. h.* $\frac{l}{l'}$ *hat den Wert* $\frac{M}{P}$ *oder* $\frac{P'}{M'}$, *d. h. man findet dafür* $\sqrt{\frac{P'}{P}} = \sqrt{1 \pm \frac{\pi}{P}}$ *oder angenähert* $1 \pm \frac{1}{2}\frac{\pi}{P}$.

Wenn der Fehler (ε) *für eine Reihe von Wägungen einmal bestimmt ist, so hat man dabei stets* $l = \varepsilon\, l'$ *in Rechnung zu bringen.*

Für eine Wage des Heidelberger Laboratoriums [1] *fand sich* $\varepsilon = 1{,}00000953$.

Genaue Wägungen führt man durch die **Methode der Schwingungen** aus.

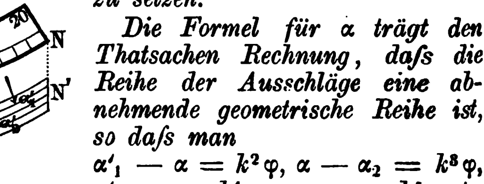
Man bestimmt zunächst den Nullpunkt der Teilung, indem man die Wage unbelastet schwingen läfst und die Dekremente der Bogen (S. 314), welche der Zeiger bei seinen Schwingungen bestimmt, vergleicht.

Hat man links und rechts beziehungsweise die Aufschläge

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ldots\ \alpha_s \text{ und } \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3\ \ldots\ldots\ \alpha'_{s-1}$$

zu notieren, so findet man für die Lage des Nullpunktes (Figur 80):

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_s}{s} + \frac{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots\ldots \alpha'_{s-1}}{s-1}\right).$$



80.

Man macht für die eine Seite s und für die andere Seite s — 1 Beobachtungen, wobei es in der Praxis genügt $s = 3$ *oder* $s = 4$ *zu setzen.*

Die Formel für α *trägt den Thatsachen Rechnung, dafs die Reihe der Ausschläge eine abnehmende geometrische Reihe ist, so dafs man*

$\alpha'_1 - \alpha = k^2\varphi$, $\alpha - \alpha_2 = k^3\varphi$, $\alpha'_2 - \alpha = k^4\varphi$, $\alpha - \alpha_3 = k^5\varphi$ *etc.*

zu setzen hat, falls man

$$\alpha - \alpha_1 = k\,.\,\varphi$$

setzt, wobei k sehr wenig vom Werte 1 verschieden ist.

Man findet durch diese Substitution z. B. für $s = 3$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) - \delta$$

1) Vergl. W. 2.

und $\delta = \frac{\varphi}{6}(2k - 3k^2 + 2k^3 - 3k^4 + 2k^5)$,

wobei das Korrektionsglied für $k = 1 - \varepsilon$ *den Wert* $\varphi . \frac{\varepsilon^2}{2}$ *erhält, falls man die Entwicklung von* ε *auf die erste und zweite Potenz beschränkt.*

Man belastet nun die eine Schale (z. B. rechts) durch den zu wägenden Körper und legt in die andere Schale einmal so viel Gewichte m_1, dafs die durch den Zeiger markierte Gleichgewichts-Lage links von der Lage für fehlende Belastung gelegen ist und nimmt dann so viel Gewichte m_2, dafs die durch den Zeiger markierte Gleichgewichtslage rechts von der Lage für fehlende Belastung gelegen ist und bestimmt jedesmal den Punkt der Einstellung.

Im ersten Falle, wo die Einstellung α_1 *erreicht werden mag, hat man dem Gewichtssatze zu wenig Masse* (m_1) *entnommen, im zweiten Falle, wo die Einstellung* α_2 *erreicht werden mag, hat man dem Gewichtssatze zu viel Masse* (m_2) *entnommen, während die Einstellung für gleiche Belastung, wobei die Masse des Körpers als m gefunden werden würde, auf die Einstellung* α *hinweist.*

Um m zu finden, berechnet man die Empfindlichkeit der Wage für den Ausschlag $\alpha - \alpha_1$ *und für den Ausschlag* $\alpha_2 - \alpha$ *und bildet die Gleichung*

$$\frac{tg(\alpha - \alpha_1)}{tg(\alpha_2 - \alpha)} = \frac{m - m_1}{m_2 - m}.$$

Bei kleinen Ausschlägen, wie sie hier vorhanden sind, darf man das Verhältnis der Tangenten durch das Verhältnis der Winkel selbst ersetzen, so dafs für die Bestimmung von m resultiert

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha} = \frac{m - m_1}{m_2 - m}.$$

Man findet

$$m = \frac{m_1(\alpha_2 - \alpha) + m_2(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = m_1 + (m_2 - m_1) . \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Da wir keine Massen-Bestimmung in einem absolut leeren Raume ausführen können, und da eine flüssige oder gasförmige Umgebung eines Körpers stets einen Teil seines Schwer-Druckes durch einen Gegendruck (Auftrieb) aufhebt, so ist bei jeder Wägung eine Korrektion anzubringen.

Wenn man das Volumen eines Körpers aus dem umgebenden (flüssigen oder gasförmigen) Material hergestellt denkt, so hat man in dem Schwer-Drucke dieses Volumens den Verlust des Schwer-Druckes des betreffenden Körpers (Archimedisches Princip) gegeben.

Die reducierte Masse m_0 *findet man aus dem, durch die Wägung bestimmten, Werte m durch die Formel*

$$m_0 = m \frac{1 - \frac{\lambda_t}{\sigma_t}}{1 - \frac{\lambda_t}{k_t}},$$

in welcher λ_t, σ_t und k_t beziehungsweise die Dichtigkeiten (vergl. die folgende Nummer) von Luft, Gewicht-Stück und Körper für die Temperatur t bedeuten.

2.

A. Die **Dichtigkeit** eines Körpers wurde (S. 52) als $\frac{m}{v}$ definiert, falls man Masse und Volumen beziehungsweise mit m und v bezeichnete.

Da 1 kbcm reinen Wassers bei 4° Celsius die Masse 1 g darstellt, so ist die Dichtigkeit des reinen Wassers bei 4° Celsius die **Einheit der Dichtigkeit.**

Bestimmt man die Masse von 1 kbcm Gold, Schwefel, Quarz etc. bei 4° C., so geben die gewonnenen Zahlen zugleich die Dichtigkeiten der betreffenden Substanzen für 4° C. an.

Da Temperatur-Änderungen bei festen Körpern relativ geringe Volumen-Änderungen im Gefolge haben, so pflegt man schlechthin von der Dichtigkeit der festen Körper zu sprechen.

Analoges gilt für Flüssigkeiten, nicht aber für Gase.

Die Bestimmung der Dichtigkeit verschiedener Substanzen führt zu folgender Tabelle:

Platin	*21,36*	*Eisen*	*7,79 bis 7,83*
Gold	*19,36*	*Natrium*	*0,97*
Quecksilber	*13,60*	*Kalium*	*0,86*
Blei (gegossen)	*11,35*	*Glas*	*2,89*
Silber (gegossen)	*10,51*	*Kork*	*0,24*
Kupfer	*8,95*	*Schwefelsäure*	*1,51*
Nickel	*8,28*	*Alkohol (absolut)*	*0,79*

Bei mittlerem Barometerstande hat die Luft für 0° C. die Dichtigkeit 0,001293.

Da das Verhältnis $\frac{m_1 g_\varphi}{v_1} : \frac{m_2 g_\varphi}{v_2}$ für denselben Ort (φ) mit dem Verhältnisse $\frac{m_1}{v_1} : \frac{m_2}{v_2}$ übereinstimmt, so pflegt man die Dichtigkeit auch specifisches Gewicht zu nennen.

Zur **Bestimmung der Dichtigkeit** hat man höchst mannigfaltige Methoden ersonnen, welche sich zum grofsen Teile auf das sogenannte **Archimedische Princip** stützen: Der Schwer-Druck eines von Flüssigkeit umgebenen Körpers ist geringer als der Schwer-Druck eines freien Körpers, und zwar ist die Differenz gleich dem Schwer-Drucke des Flüssigkeits-Volumens, welches der eingetauchte Körper verdrängt.

Die Volumen-Bestimmung von festen Körpern unterliegt gewissen Schwierigkeiten, welche mit Hülfe indirekter Methoden (Archimedisches Princip) umgangen werden müssen, während

man Flüssigkeiten und Gase in geeigneten Behältern direkt wägen und somit in Bezug auf Masse und Volumen leicht bestimmen kann.

Wägt man einen festen Körper erst in Luft und dann in Wasser von 4° C., wobei man für dessen Schwer-Druck beziehungsweise die Zahlen p_1 und p_2 erhalten mag, so ist $p_1 - p_2$ der Schwer-Druck eines Wasser-Volumens, welches mit dem Volumen des Körpers genau übereinstimmt, so dafs also p_1 und $p_1 - p_2$ beziehungsweise den Schwer-Druck gleicher Volumen des festen Körpers und der Flüssigkeit darstellen.

Die Zahl $\frac{p_1}{p_1 - p_2}$, welche man auf diese Weise durch Beobachtung bestimmt, liefert einen rohen Wert für die Dichtigkeit des festen Körpers, da hier darauf Rücksicht zu nehmen ist, dafs p_1 den Schwer-Druck des Körpers in Luft darstellt und dafs auch hier gemäfs dem Archimedischen Principe dem „absoluten“ Schwer-Drucke des Körpers gegenüber eine Differenz zu konstatieren ist.

Instrumente, welche die Wägung eines Körpers in Luft und in Wasser gestatten, sind Wagen mit einer kürzeren und mit einer längeren Aufhängung der Wagschalen: dieselben heifsen ***hydrostatische*** *Wagen.*

Wenn ein fester Körper in Wasser löslich ist, so benutzt man statt dessen eine andere Umgebungs-Flüssigkeit und bestimmt aufserdem deren Dichtigkeit gegen Wasser.

Ein analoges Verfahren wendet man an, wenn der feste Körper leichter als Wasser ist, falls man eine Flüssigkeit findet, in welcher derselbe untersinkt; andern Falles hat man den Körper z. B. mit einem Bleistücke von bekanntem Volumen zu verbinden und die Dichtigkeit des so konstruierten Systems zu bestimmen.

Wenn die Dichtigkeit eines Körpers bestimmt ist, so kann man denselben benutzen, um aus $p_1 - p_2$ die Dichtigkeit irgend einer Flüssigkeit festzustellen.

Aräometer sind cylindrische Gefäfse, welche in Flüssigkeiten mit vertikaler Achse schwimmen und Marken oder ganze Teilungen tragen, an welchen man die Gröfse des eingetauchten Volumens abliest.

Unter diesen Instrumenten verdient das Densimeter Beachtung, dessen Skala unmittelbar die Dichtigkeit der umgebenden Flüssigkeit angiebt. Von andern Aräometern mit Skala mögen die Alkoholometer (Richter und Tralles), Most-Wagen, Alaun-Spindeln etc. erwähnt werden, mit deren Hülfe man den Gehalt an Alkohol, Traubenzucker, Alaun etc. bestimmt.

Nicholsons Gewichts-Aräometer.

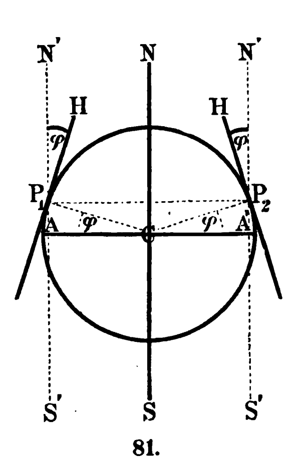
Für die Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten kann man endlich auch kommunicierende Röhren benutzen, deren Schema durch eine U-förmig gebogene Röhre mit Schenkeln von gleichem oder ungleichem Kaliber dargestellt wird.

Giefst man in eine solche Röhren-Kombination eine schwere und eine leichtere Flüssigkeit, so verhalten sich die Höhen h_1 und h_2 der Flüssigkeiten über der gemeinsamen Trennungs-Fläche beider Flüssigkeiten umgekehrt wie deren Dichtigkeiten.

B. Da die **Massen-Bestimmung der Erde**, von welcher die Massen-Bestimmung der andern Welt-Körper unmittelbar abhängt, auf direktem Wege unmöglich scheint, so bestimmt man zunächst die **Dichtigkeit der Erde** und berechnet deren Masse aus dieser Konstanten und aus dem Volumen der Erde.

Zur Bestimmung der **Dichtigkeit der Erde** sind bisher vier Methoden angewandt worden.

Die älteste Methode stammt von **Maskelyne**[1]), welcher die **Ablenkung eines Bleilotes** an dem Gebirgs-Stocke des Shehallien in Portshire (Schottland) beobachtete, nachdem Bouguer auf dieses Phänomen aufmerksam gemacht hatte.



81.

Bestimmt man die Pol-Höhe für zwei Punkte P_1 und P_2 desselben Parallel-Kreises (φ), *von denen der eine nahe an einem isolierten Berg-Kegel liegt, während der andre von solchem lokalen Einflusse frei ist, so findet man eine Differenz* ε, *während die Theorie (Figur 81) für Punkte desselben Parallel-Kreises* (φ) *dieselbe Pol-Höhe* φ *fordert.*

Diese Abweichung erklärt sich aus der Ablenkung, welche der Bergkegel auf ein Bleilot ausübt, dessen Achse ja als Normale der Horizontal-Ebene des betreffenden Ortes aufzufassen ist.

Die Richtung des abgelenkten Pendels bezeichnet die Resultante zwischen den durch die ganze Erde und der durch den Berg hervorgerufenen Beschleunigungen, welche beziehungsweise als a_1 *und* a_2 *bezeichnet werden mögen, so dafs angenähert* $tg\, \varepsilon = \frac{a_2}{a_1}$ *ist, falls die Beschleunigung* a_2, *wie es am Shehallien der Fall war, nahezu horizontal gerichtet ist.*

Man hat $a_1 = \frac{k \cdot m_e}{R^2}$ *und* $a_2 = \frac{k \cdot \mu}{s^2}$, *falls man die Massen der Erde und des Berges beziehungsweise mit* m_e *und* μ, *die Abstände der Schwerpunkte der Erde und des Berges*[2]) *von der*

---

1) Maskelyne und Hutton, Philosophical Transactions. 1775 und 1778.

2) Die Rechnung kann natürlich nur als Annäherung aufgefafst werden, da die Attraktion bei der Form des Berges (Kegel) überhaupt nicht vom Schwerpunkte ausgehend gedacht werden darf.

Pendelkugel beziehungsweise mit R (Erd-Radius) und s bezeichnet, so daſs

$$tg\,\varepsilon = \frac{\mu}{m_e} \cdot \frac{R^2}{s^2}$$

resultiert.

Hutton bestimmte den Abstand s und die Masse μ des Berges (aus dessen Volumen und aus dessen Dichtigkeit), so daſs Maskelyne imstande war, aus der Ablenkung ε mit Hülfe des bekannten Volumens (v) der Erde deren Dichtigkeit

$$d = \frac{\mu}{v} \cdot \frac{R^2}{s^2} \cdot \frac{1}{tg\,\varepsilon}$$

zu bestimmen: Die Rechnung ergab angenähert die Zahl 5, d. h. die Erde ist etwa 5 mal schwerer, als wenn sie ganz aus reinem Wasser von 4° C. bestände.

Später bestimmte **Cavendish** [1]) die Dichtigkeit der Erde mit Hülfe eines **Horizontal-Pendels**, das aus einem leichten Stabe mit zwei gleichmäſsig gearbeiteten End-Kugeln bestand, deren jede auf einem Elfenbein-Plättchen eine kleine horizontale Skala trug.

Ein horizontaler Stab, dessen Enden durch zwei schwere Bleikugeln (158 kg) belastet waren, lieſs sich unterhalb des Pendels um die Achse drehen, welche der Faden des Horizontal-Pendels bezeichnet: die Beschleunigung des Pendels, welche dem Einflusse der Kugeln zuzuschreiben war, diente zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde.

Die Schwingungs-Dauer des freien Horizontal-Pendels T, welches derjenigen Lage der Bleikugeln entsprach, bei der die Achse ihres Trägers das Horizontal-Pendel unter rechtem Winkel kreuzte, und die Schwingungs-Dauer des Horizontal-Pendels, welche irgend einer andern Lage jener Kugeln entsprach, gestatteten zusammen die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen: Versuche und Rechnung ergaben hier 5,48.

Analoge Versuche wurden später (1837) von Reich in Freiberg unternommen, welcher 5,49 erhielt.

Baily in London fand als Mittel aus mehr als 2000 Versuchen (1843) die Gröſse 5,67, während Reich bei spätern Berechnungen (1852) auf 5,583 kam.

Airy [2]) benutzte (1856) zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde die **Veränderung von g in tieferen Schichten der Erde**.

Der Boden eines Schachtes von der Tiefe h liegt auf einer zur Erdoberfläche (R) konzentrischen Kugel von den Radien

$$R' = R - h.$$

Beobachtet man auf dem Boden des Schachtes eine Beschleunigung g, welche allein (S. 383) durch die Kugel vom Radius R' bedingt wird, so ist die Beschleunigung dieser Kugel vom Radius

---

1) **Philosophical Transactions, Bd. 88.**
2) **Philosophical Transactions, 1856.**

R' für die Erdoberfläche als $g' \cdot \frac{R'^2}{R^2}$ anzusetzen, so daſs $g - g' \frac{R'^2}{R^2}$ auf Rechnung der übrig bleibenden Schale (h) zu setzen ist.

Bezeichnet man Volumen und Dichtigkeit von Schale und Kern beziehungsweise mit v_1, v_2 und d_1, d_2, so hat man also

$$v_1 d_1 : v_2 d_2 = g - g' \frac{R'^2}{R^2} : g' \frac{R'^2}{R^2}.$$

Bei den Beobachtungen von Airy, die auf dem Boden und am Rande eines Schachtes von Harton ($h = 383$ m) ausgeführt wurden, ergab sich

$$g' = g \cdot 1{,}000052.$$

Für die Dichtigkeit der Schale (d_1) fand man in der Nähe des Beobachtungs-Ortes 2,5, während $R = h \cdot 16621{,}7$ und $R' = h \cdot 16620{,}7$ zu setzen war: die Rechnung ergiebt

$$d_2 = 6{,}566.$$

Haughton führte d_1 als 2,059 ein, wobei sich der Airysche Wert auf 5,480 erniedrigte.

In allerneuester Zeit endlich hat **v. Jolly** in München [1]) die **Wage** benutzt, um die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen.

Im obern Teile eines Turmes wurde eine Wage mit doppelten Schalen-Paaren erschütterungsfrei aufgestellt: das eine Schalen-Paar befand sich etwa 1½ m über dem Erdboden, während das andre Schalen-Paar genau 21,005 m darüber hing.

„Ein Körper von der obern Schale in die untere Schale gebracht, erfährt in all seinen Punkten eine, der Annäherung an den Erdmittelpunkt entsprechende Gewichts-Zunahme. Seine Gewichts-Zunahme ist entsprechend seiner Beschleunigungs-Zunahme. Wird unter der einen der untern Schalen eine Bleikugel aufgestellt, so wird ein von der obern in die untere Schale gebrachter Körper eine weitere Beschleunigungs-Zunahme erfahren, welche durch die Annäherung des Körpers an den Mittelpunkt der Bleikugel bedingt ist“.

„Die Differenz der Gewichts-Zunahme mit und ohne untergelegte Bleikugel bezeichnet die Gröſse des Zuges der Bleikugel, und der Quotient dieses Zuges und des Zuges der Erde allein giebt unter Benutzung des Gravitations-Gesetzes das Mittel ab, die Dichtigkeit des Bleies, und, da die Dichtigkeit des Bleies bekannt ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen“ [2]).

„Der Beobachtungs-Ort (München) ist auf einer Hochebene in der Höhe H über dem Meeres-Niveau gelegen. Unter einer der unteren Schalen ist eine Bleikugel vom Radius r aus Bleibarren

1) Abhandlungen der königlich bairischen Akademie der Wissenschaften II Kl. 13 und Wiedemanns Annalen, 1881. Diese Methode wurde zuerst mitgeteilt auf der Naturforscher-Versammlung 1877.

2) Vergl. v. Jolly, Wiedemanns Annalen 1881, Bd. 14, S. 333.

aufgebaut. Auf der Schale befindet sich ein mit Quecksilber gefüllter Glaskolben. Der Glaskolben hat Kugelgestalt und der Abstand des Mittelpunktes dieser Kugel vom Mittelpunkte der Bleikugel ist a“.

Die ausgedehnten Beobachtungen v. Jollys ergaben den Wert 5,692.

Man kann die Feststellung der Masse der Erde beziehungsweise deren Dichtigkeit benutzen, um die Konstante (k) des Gravitations-Gesetzes zu bestimmen.

Aus $g = \frac{k \cdot m_e}{R^2}$ folgt, falls man 6 als Dichtigkeit der Erde annimmt, $k = 0{,}00000000613$, d. h. die Beschleunigung, welche die Massen-Einheit in der Einheit der Entfernung erteilt, beträgt

$$0{,}00613 \frac{\text{Milliontel Meter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})}.$$

3.

Um **Kräfte** unmittelbar zu messen, bedient man sich federnder Körper, während man die Mafse der Kräfte mittelbar aus den Mafsen von Beschleunigung und Masse zusammensetzen kann.

Die **Feder-Wage**, welche für Zug oder für Druck konstruiert werden kann, besteht aus einer elastischen Schrauben-Spirale (Feder), die innerhalb eines Cylinders zusammengedrückt oder ausgezogen werden kann und dabei das Mafs der angewandten Kraft direkt durch einen Zeiger an einer auf dem Cylinder angebrachten Skala anzeigt.

Eine solche Skala mufs für einen bestimmten Ort der Erdoberfläche empirisch bestimmt werden, indem man die Stellen markiert, welche einem Drucke m g, 2 m g, 3 m g etc. (beim Auflegen von bestimmten Massen-Stücken) entsprechen.

Maxwell und andere englische Forscher bezeichnen mit dem Worte Dyn (δυναμις) die Gaufsische Kraft-Einheit

$$1 \text{ Milligramm} \cdot \frac{\text{Millimeter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})}.$$

während man vielleicht zweckmäfsiger [1]) der Massen-Einheit entsprechend die Gröfse $1 \text{ Gramm} \cdot \frac{\text{Meter}}{(\text{Sekunde}) \cdot (\text{Sekunde})} \cdot g$ als Dyn einführt.

Natürlich ist dann das Dyn für Berlin in jedem Falle von dem Dyn für Paris verschieden, weil g an beiden Orten nicht denselben Wert hat.

Wenn man zwischen zwei Punkten A und B, deren gegenseitiger Zug oder Druck gemessen werden soll, eine Feder-Wage

1) Vergl. Budde, Lehrbuch, S. 27.

einschaltet, so gestattet deren Zeiger die gesuchte Gröfse unmittelbar abzumessen.

Stark konstruierte Feder-Wagen werden Dynamometer genannt.

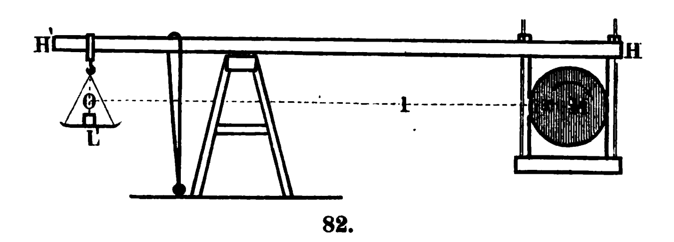
Die Brief-Wagen mit Feder-Konstruktion können als Modell eines Dynamometers dienen.

Über die Messung des **Druckes von Flüssigkeiten und Gasen** wird später zu sprechen sein.

Um **Arbeit** oder Energie unmittelbar zu messen dient das Energometer.

Ein solches wird z. B. durch den Pronyschen Zaun [1] (Brems-Dynamometer) dargestellt, welches die Arbeits-Leistung einer Welle zu messen gestattet.

Nachdem man die Anzahl (n) der Umdrehungen pro Sekunde festgestellt hat, welche der gewöhnlichen Arbeits-Leistung der Welle entsprechen, wird an dieser bei freiem Gange der Prony sche Zaun (Figur 82) angebracht.



82.

Die Schrauben, welche die cylindrischen Backen an die Welle M anpressen, werden so lange angezogen, bis die Welle wieder die gleiche Anzahl (n) Umdrehungen macht.

Die Belastung L' am Hebel HH' bringt das System ins Gleichgewicht, sobald HH' in horizontaler Richtung frei schwebt.

Bezeichnet man mit L die Gesamt-Belastung des Punktes O, welche sich aus dem Gewichte des Hebels und aus der Belastung L' zusammensetzt, so tritt das Drehungs-Moment $L \,.\, MO = Ll$ auf, dessen Wert dem Werte des durch die Reibung (R) der Welle hervorgerufenen Momentes $r\,R$ gleich ist.

Die Arbeits-Leistung pro Sekunde ist hier

$$(n \,.\, 2\,\pi\, r) \,.\, R, \text{ d. h. } n \,.\, 2\,\pi \,.\, Ll.$$

Anstatt die Welle direkt in Anspruch zu nehmen, kann man (Egen) die Reibung eines gufseisernen Ringes benutzen, der durch Schrauben aufgeprefst wird.

Dabei hat man den Vorteil einen und denselben Apparat für Wellen von verschiedenem Durchmesser brauchen zu können.

---

1) Der französische Ingenieur Prony lebte 1755 bis 1839.

Die Einheit der Arbeit

(Kilogramm . Schwerbeschleunigung . Meter)

wird in Abkürzung als Kilogramm-Meter bezeichnet.

Ein Arbeits-Wert von 75 Kilogramm-Metern heifst 1 Pferde-Kraft.

Man giebt in der Praxis die Arbeits-Leistung pro Sekunde an und mifst dieselbe nach Pferde-Stärken, indem man darunter

$$75 \frac{\text{Kilogramm . Schwer-Beschleunigung . Meter}}{\text{Sekunde}}$$

versteht.

2. Die Systeme der physikalischen Dynamik.

Wenn man die **Gesamtheit der physischen Körper**, deren Volumen erfahrungsmäfsig variabel (S 41) ist, nach dem **Grade der Abweichung** einteilt, den dieselben in Bezug auf die **Vorstellung eines unveränderlichen Systems** darbieten, so gelangt man zu **drei Hauptklassen**, nämlich zu **festen**, **flüssigen** und **gasförmigen** Körpern.

Da ein bestimmter Stoff (vergl. S. 41) bald als fester, bald als flüssiger, bald als gasförmiger Körper auftreten kann, so hat man in Bezug auf die Beschaffenheit der Stoffe drei Hauptformen zu unterscheiden, welche man die **drei Aggregat-Zustände** zu nennen pflegt.

Die physikalische Dynamik wird demnach zunächst den **idealen Fall des unveränderlichen** Systems zu behandeln haben, um daran die Besprechung der verschiedenen Aggregat-Zustände der physischen Körper anzuschliefsen.

A. Das unveränderliche System.

Gemäfs den Voraussetzungen, welche durch die dynamischen Principien bestimmt werden, haben die Kräfte eines unveränderlichen Systems stets eine **Centrale**, auf welcher sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Achsen-Moment gelegen ist.

Wenn ein System von Kräften auftritt, nachdem das Punkt-System während eines Zeitelementes in Ruhe gewesen, so wird der centralen Kraft eine Verschiebung längs der Central-Achse entsprechen, während das centrale Moment zu einer Drehung um die Central-Achse führt.

Wenn das Punkt-System beim Auftreten der Kräfte bereits in Bewegung war, so tritt eine Verschiebung und eine Drehung in Bezug auf die Central-Achse auf, welche sich beziehungsweise mit den vorhandenen Verschiebungen und Drehungen vereinigt.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines unveränderlichen Systems führen nach dem Principe d'Alemberts ohne weiteres zu den Bewegungs-Gleichungen desselben.

Man findet:

$$\Sigma\, m_i f^{(x)}_i = \Sigma\, k^{(x)}_i \text{ etc. und}$$

$$\Sigma\, m_i (y_i f^{(z)}_i - z_i f^{(y)}_i) = \Sigma\, (y_i k^{(z)}_i - z_i k^{(y)}_i), \text{ etc.}$$

Da dieses Gleichungs-System (6) die Koordinaten aller Systempunkte enthält, so hat man bei Benutzung desselben mit grofsen Schwierigkeiten zu kämpfen: man hätte die Koordinaten von n — 3 Systempunkten durch die Koordinaten von 3 bestimmten Systempunkten (Bewegungs-Dreieck) auszudrücken, um das obige Gleichungs-System auf 6 Gleichungen mit 9 Unbekannten zu reducieren, während die Bedingung der Unveränderlichkeit der drei Abstände jener drei Punkte die noch fehlenden drei Gleichungen liefert.

Statt die Bewegung auf diese Weise zu beschreiben, kann man die drei Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes des Systems (vergl. S. 374) aufstellen und diesen gemäfs die Bahn desselben entwickeln.

Die vollständige Bewegung des Systems reduciert sich hier auf die Translation des Schwerpunktes und auf die Rotation um den Schwerpunkt.

Die Drehung, welche als Ergänzung der Translation des Schwerpunktes einzuführen ist, läfst sich durch drei Gleichungen darstellen, in welchen die Amplituden in Bezug auf drei Achsen als Unbekannte vorkommen.

Wenn das System der bewegenden Kräfte im Gleichgewicht ist, so existiert eine invariable Ebene, auf welcher das Central-Ellipsoid der Bewegung abrollt, während der Mittelpunkt (Schwerpunkt) desselben in grader Linie fortschreitet, falls er nicht in Ruhe bleibt [1]).

Geht die Resultante aller Kräfte durch den Schwerpunkt, so gelten dieselben Betrachtungen, abgesehen davon, dafs der Schwerpunkt hier im allgemeinen keine Grade beschreiben wird [2]).

Wenn während eines Zeitelementes eine Drehung um eine Hauptachse des Central-Ellipsoides stattfindet, so dreht sich das System während der ganzen Bewegung [3]) *um diese Achse (permanente Achse) mit konstanter Winkel-Geschwindigkeit.*

Dabei treten für die Achsen des gröfsten und kleinsten Trägheits-Momentes stabile Lagen ein, während in Bezug auf die mittlere labiles Gleichgewicht vorhanden ist.

---

1) Vergl. Poinsot, Théorie nouvelle 1834 und Additions à la connaissance des temps 1852. Vergl. aufserdem Poinsots Abhandlung in Lionvilles Journal 1851.

2) Der korrespondierende Fall, in welchem stets ein Paar resultiert, ist für die genauere Theorie der Präcession und Nutation von grofser Wichtigkeit. Vergl. Schell, Theorie II, 453.

3) Segner, Programma sistens specimen theoriae turbinum. Halae 1755.

Eine geworfene Kugel dreht sich demnach mit konstanter Winkel-Geschwindigkeit um eine Drehungs-Achse, welche senkrecht zu der, durch die Stofs-Richtung bestimmten, Schwer-Ebene ist. Bewegung einer Gerstange.

Wenn innerhalb des Systems ein **fester Punkt** vorhanden ist, so gelten in Bezug auf diesen Punkt analoge Betrachtungen, wie sie oben in Bezug auf den Schwerpunkt durchgeführt wurden. Der **feste Punkt** hat einen **Druck** auszuhalten.

Da keine Verschiebungen stattfinden, so wird die Bewegung durch drei Gleichungen dargestellt.

Wenn innerhalb des Systems **zwei feste Punkte** vorhanden sind, so findet eine Drehung um eine **feste Achse** statt, welche im allgemeinen einen Druck auszuhalten hat

Da keine Verschiebungen stattfinden, und nur eine Drehung in Frage kommen kann, so genügt eine Gleichung zur Beschreibung der Bewegung.

Diese Gleichung, welche der Definition

$$\textit{Kraft} = (\textit{Masse}) \,.\, (\textit{Beschleunigung})$$

in gewissem Sinne entspricht, hat zunächst die Form

$$\Sigma\, m_i (x_i f^{(y)}{}_i - y_i f^{(x)}{}_i) = \Sigma\, (x_i k^{(y)}{}_i - y_i k^{(x)}{}_i),$$

falls man nämlich die Dreh-Achse zur Z-Achse eines dreiachsigen Koordinaten-Systems macht.

Rechts vom Gleichgewichtszeichen steht das Gesamt-Moment aller Kraft-Komponenten, welche senkrecht zur Z-Achse wirken, in Bezug auf die Z-Achse, d. h. ein bestimmtes Drehungs-Moment Pp, *während die linke Seite (vergl. physisches Pendel) auf die Form* $\eta \,.\, T$ *gebracht werden kann, falls man die Beschleunigung des Systems durch* η *und sein Trägheits-Moment durch* T *bezeichnet.*

In beiden Formeln $k = m \,.\, a$ *und* $Pp = T \,.\, \eta$ *tritt neben einer gewissen Korrespondenz der Gegensatz zwischen fortschreitender und drehender Bewegung zu Tage. Eine Erörterung dieser Beziehungen soll in der folgenden Tabelle für konstantes* k *und für konstantes* Pp *dargestellt werden, in welcher den Linear-Gröfsen* s, v, a *die Winkel-Gröfsen* ϑ, ω, η *beziehungsweise entsprechen.*

Translation.	*Rotation.*
$s = v_0 t + \frac{k}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$	$\vartheta = \omega_t t + \frac{Pp}{T} \cdot \frac{t^2}{2}$
$v_t = v_0 + \frac{k}{m} \cdot t$	$\omega_t = \omega_0 + \frac{Pp}{T} \cdot t$
$a = \frac{k}{m}$	$\eta = \frac{Pp}{T}$

Während das Gleichungs-System linker Hand zu der Formel

$$\frac{1}{2} m v^2_t - \frac{1}{2} m v^2_o = k . s$$

führt, erhält man auf der andern Seite:

$$\frac{1}{2} m \omega^2_t - \frac{1}{2} m \omega^2_o = Pp . \vartheta.$$

Auch hier steht auf der linken Seite der Zuwachs an lebendiger Kraft, während rechts die Arbeit für eine Drehung in der Ebene des Momentes Pp dargestellt wird.

Zur Berechnung des **Druckes** auf die Achse hat man die Centripetal-Beschleunigung der einzelnen Punkte einzuführen.

Wenn keine äußeren Kräfte gegeben sind, so gilt folgender Satz[1]*: wenn sich ein System um eine Haupt-Achse dreht, so findet aus den Centrifugalkräften nur Druck auf den Punkt der Drehachse statt, durch den die beiden andern (entsprechenden) Hauptachsen gehen.*

Ist dieser Punkt Schwerpunkt des Systems, so ist auch dieser aus den Centrifugalkräften hervorgehende Druck Null.

B. Feste Systeme.

Im **ersten Aggregat-Zustande** dürfen die physischen Körper innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung als **unveränderliche Systeme** angesehen werden, weil für dieselben Verhältnisse existieren, in denen die einzelnen System-Punkte unter der Einwirkung von geringen Kräften nur geringe gegenseitige Lage-Änderungen erleiden.

Die **Druckkräfte,** welche hier den Veränderungen der System-Punkte entsprechen, sind **im allgemeinen** von den **21 Konstanten der Elasticität** abhängig, welche für jedes Material durch Versuche bestimmt werden müssen, während diese Verhältnisse für Körper, welche der Vorstellung von **homogenen Systemen** nahezu entsprechen, durch **2 Konstanten** vollständig darstellbar (vergl. S 319) sind.

Die phoronomischen Betrachtungen über die Variabilität des Volumens physischer Systeme setzen voraus, daſs die Verschiebungen relativ klein seien: dieselben müssen, wie man zu sagen pflegt, unterhalb der Elasticitäts-Grenze liegen.

Die festen Körper erleiden unter der Einwirkung geringer Kräfte Deformationen, welche sich wiederum ausgleichen, sobald jene äußeren Kräfte zu wirken aufhören, während jenseits der Elasticitäts-Grenze bleibende Deformationen eintreten.

---

1) Vergl. die Ableitung in A. Wernicke, Lehrbuch der Mechanik, I, 341.

§. 1. Die beiden Elasticitäts-Konstanten homogener Materialien.

Wenn ein **fester Körper** von homogener Struktur durch Kräfte in Anspruch genommen wird, so tritt innerhalb der Elasticitäts-Grenze ein Gleichgewichts-Zustand ein, welcher von dem Gleichgewichts-Zustande des freien Körpers verschieden ist.

Die **Druck-Beschleunigungen** d_1, d_2, d_3, welche unter dem Einflusse äufserer Kräfte im Innern des Körpers auftreten, entsprechen **Druck-Kräften** p_1, p_2, p_3, welche den äufseren Kräften entgegengesetzt gleich sind: die Proportionen für d_1, d_2, d_3 gehen hier über (S. 319) in die Gleichungen:

$$p_1 = -2K(\lambda_1 + \vartheta\varphi),\ p_2 = -2K(\lambda_2 + \vartheta\varphi),$$
$$p_3 = -2K(\lambda_3 + \vartheta\varphi).$$

Es giebt verschiedene Methoden um die **Elasticitäts-Konstanten** eines festen Körpers von homogener Struktur durch Versuche festzustellen.

Die ersten (Wertheim) Beobachtungen dieser Art, welche hier kurz angedeutet werden sollen, bezogen sich auf die Veränderungen, welche ein prismatischer Stab bei Längs-Belastung zeigt.

Wenn der Zug oder der Druck, welcher hier in der Achsen-Richtung des Stabes für einen Querschnitt q zur Geltung kommt, mit P bezeichnet wird, so hat man $\frac{P}{q}$ für die Einheit des Querschnittes in Rechnung zu bringen.

Läfst man die Achsen-Richtung der Dilatation λ_1 entsprechen, so hat man das Gleichungs-System

$$\frac{P}{q} = 2K(\lambda_1 + \vartheta\varphi),\ 0 = 2K(\lambda_2 + \vartheta\varphi),\ 0 = 2K(\lambda_3 + \vartheta\varphi)$$

anzusetzen, aus welchem zunächst

$$\lambda_2 = \lambda_3 \text{ und } \varphi = -\frac{\lambda_2}{\vartheta} = -\frac{\lambda_3}{\vartheta}$$

folgt.

Da hier für jede Richtung des Querschnittes analoge Verhältnisse geschaffen werden, so konnte man das Resultat $\lambda_2 = \lambda_3$ auch ohne weiteres ersehen.

Führt man die Bezeichnung $\lambda_2 = \mu\lambda_1 = \lambda_3$ ein, so ist $\varphi = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ gegeben als $\lambda_1(1 + 2\mu)$, d. h. man findet

$$-\frac{\mu\lambda_1}{\vartheta} = \varphi = \lambda_1(1 + 2\mu)$$

oder

$$\mu = -\frac{\vartheta}{2\vartheta + 1}.$$

Die Gröfse μ giebt Aufschlufs über die Veränderung des Querschnittes: eine Verlängerung des Stabes entspricht einer Verkleinerung, eine Verkürzung des Stabes entspricht einer Vergröfserung des Querschnittes.

Da der absolute Betrag von μ, *d. h.* $|\mu|$ *durch* $\frac{1}{2 + \frac{1}{\vartheta}}$ *dargestellt wird, so mufs* $|\mu| < \frac{1}{2}$ *sein, falls* $\vartheta > 0$ *ist.*

Navier und Poisson machten infolge gewisser Spekulationen die willkürliche Annahme, dafs für alle Körper $\vartheta = \frac{1}{2}$ *zu setzen ist, so dafs* $\mu = \frac{1}{4}$ *resultiert, während Wertheim aus seinen Versuchen für verschiedene Körper* $\mu = -\frac{1}{3}$ *erhielt und demnach* $\vartheta = 1$ *setzte.*

Neuere Versuche über den Wert von μ *rühren von Kirchhoff*[1] *und Cornu*[2] *her, von denen der erstere* μ *als eine von der Natur des betreffenden Körpers durchaus abhängige Konstante ansieht, während Cornu die Abweichungen, welche die Beobachtungen in Bezug auf Poissons Wert (0,25) geben, daraus herleitet, dafs bei den Versuchen die Bestimmung der Homogeneität des Materials nicht erfüllt gewesen sei.*

Kirchhoff findet für Stahl $\mu = -0{,}29$ *und für Messing* $\mu = -0{,}39$.

Während Okatow[3] *und Schneebeli*[4] *für verschiedene Stahlsorten und sogar für verschiedene Zustände derselben Stahlsorte verschiedene Werte von* μ *finden, erhielt Cornu für Glasprismen, für welche die Bedingung der Homogeneität vollkommen erfüllt sein soll, im Durchschnitt* $\mu = -0{,}24$.

Wenn μ *durch Versuche bestimmt ist, so findet man*

$$\vartheta = -\frac{\mu}{2\mu + 1}.$$

Wenn man die Verlängerung oder Verkürzung v des Stabes mifst, so findet (Hooke 1679) man dieselbe der Länge (l) und dem belasteten Gewichte (P) direkt und dem Querschnitte (q) indirekt proportional, so dafs man

$$v = c \cdot \frac{l}{q} \cdot P$$

setzen darf, falls man durch c eine Konstante bezeichnet, welche von der Natur der zu untersuchenden Körper abhängig ist.

Da $\frac{v}{l} = \lambda_1$ und $\varphi = \lambda_1 (1 + 2\mu)$ ist, so hat man

$$\frac{P}{q} = c \cdot 2k \cdot \frac{P}{q} (1 + \vartheta [1 + 2\mu])$$

d. h.

$$2k \cdot \frac{1 + 3\vartheta}{1 + 2\vartheta} = \frac{1}{c} = \varepsilon.$$

---

1) Poggendorff, Annalen, Bd. 108.
2) Comptes rendus, Bd. I, XIX.
3) Poggendorff, Annalen, Bd. 119.
4) Poggendorff, Annalen, Bd. 140.

Die Gröfse ε, welche durch Versuche bestimmt ist, wird der **Elasticitäts-Koëfficient** des Materials genannt, während μ die (positive oder negative) **Quer-Kontraktion** des Materials heifst.

Da die Gröfsen μ und ε durch Versuche bestimmbar sind, so sind damit die Konstanten k und ϑ gegeben.

Man findet

$$k = \frac{\varepsilon}{2(1-\mu)} \text{ und } \vartheta = -\frac{\mu}{2\mu+1}$$

und hat demnach zu setzen:

$$p_i = -\frac{\varepsilon}{1-\mu}\left(\lambda_i - \frac{\mu}{2\mu+1}\right).$$

Die Gröfse μ ist eine **unbenannte Zahl.**

Da die Gröfse ε aus der Gleichung $\frac{P}{q} = \varepsilon \, . \, \lambda_1$ resultiert, für welche $\frac{P}{q}$ und λ_1 gemessen werden mufs, so ist die Mafszahl von ε zugleich die Mafszahl von $\frac{P}{q}$ für den Fall, dafs $\lambda_1 = \frac{v}{l} = 1$ gesetzt werden darf, d. h. der **Elasticitäts-Koëfficient** ε hat dieselbe Mafszahl wie die für die Einheit des Querschnittes berechnete Belastung, welche der Stab um seine eigene Länge ($v = l$) dehnen würde, falls jenseits der Elasticitäts-Grenze dieselben Gesetze giltig wären, welche unterhalb derselben in der That in Kraft sind.

Da λ_1 eine unbenannte Zahl ist, so hat ε auch wirklich dieselbe Dimension wie $\frac{P}{q}$, d. h. die Gröfse ε stellt eine für den Querschnitt „Eins" berechnete Belastung dar.

So gilt z. B. nach Wertheim, welchem man eine grofse Reihe von Bestimmungen über Elasticitäts-Verhältnisse verdankt, bei 15 bis 20° Celsius folgende Tabelle:

Gezogenes Blei:	$\varepsilon = 1883.$
Gezogenes Kupfer:	$\varepsilon = 12449.$
Gezogenes Eisen:	$\varepsilon = 20869.$
Gezogener Gufsstahl:	$\varepsilon = 19549.$

Um die Gröfsen ε und μ zu bestimmen, kann man unmittelbar die Dilatationen $\lambda_1 = \frac{v}{l}$ und $\lambda_2 = -\frac{\mu \, . \, v}{l} = \lambda_3$ für Stäbe beziehungsweise für Drähte messen, während andererseits fast jede elastische Änderung die Gröfse μ zu bestimmen gestattet, falls ε bereits bekannt ist.

Um ε herzuleiten benutzt man mit grofsem Vorteil die elastischen Schwingungen von longitudinal erregten Stäben.

So kann ein Körper in einer Flüssigkeit einem Drucke ausgesetzt werden, welcher für alle Teile seiner Oberfläche derselbe ist: Regnault[1] *hat auf diese Weise Kontraktionen beobachtet, welche μ abzuleiten gestatten, falls ε bekannt ist.*

1) Mém. de l'Acad. des sciences de l'Institut de France Bd. 21.

Für die Fortpflanzung (v) von longitutinalen Wellen (S. 302) in Stäben findet man, falls man die Dichtigkeit des Stabes mit d und den Elasticitäts-Koëfficienten mit ε bezeichnet: die Beziehung

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Wenn ein Stab von der Länge l, der an einem Ende festgeklemmt ist, in Schwingungen versetzt wird, so entspricht das feste Ende dem Knotenpunkte einer stehenden Welle, d. h. die Bewegungen des Stabes korrespondieren mit den Bewegungs-Verhältnissen einer halben stehenden Welle.

Die Schwingungs-Dauer (T) eines solchen Stabes wird durch

$$T = 4\,l.\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}.$$

dargestellt.

Bestimmt man auf experimentellem Wege T, l und d so findet man

$$\varepsilon = \frac{1}{d}\cdot\left(\frac{4\,l}{T}\right)^2.$$

§. 2. Die Arten der elastischen Veränderungen.

Die Einteilung der Deformationen, welche an einem festen Körper unter dem Einflusse eines Kräfte-Systems auftreten, weisen auf zwei einfache Veränderungen, welche der Wirkung **einer Kraft** und der Wirkung **eines Kräftepaares** entsprechen und welche demnach wiederum auf Translation und Rotation zurückweisen.

A. **Eine Kraft tritt hier als Zug oder Druck** und bewirkt in ihrer Richtung immer **Verlängerungen oder Verkürzungen.**

Für die Versuche über diese elastischen Erscheinungen klemmt man (Wertheim) Drähte oder Stäbe mit vertikal gerichteter Achse zwischen zwei Flächen eines in die Mauer fest eingelegten Kniestückes und belastet dieselben vermittelst eines Tellers, welcher am andern Ende des stabförmigen Körpers festgeschraubt ist.

Wenn man die Stellung je zweier auf den Drähten angebrachten Marken vor und nach der Belastung durch ein Kathetometer bestimmt, so erhält man die Längen des belasteten und die Längen des unbelasteten Drahtes, d. h. man gelangt zu einer Bestimmung von ε.

Dabei mufs man vor dem Verschieben durch ein kleines Gewicht eine vollständige Spannung des Drahtes zu erreichen suchen, damit kleine Verbiegungen etc. eliminiert werden.

An Kautschuk-Prismen von quadratischem Querschnitt kann man (Wertheim) bei analogen Versuchen auch die Quer-Dilatation mittelst eines feinen Zirkels bestimmen.

Statt dessen benutzt man (Regnault-Wertheim) [1]) besser

1) Annales de chimie et de physique III. sér. Bd. 23.

Glasröhren oder Messingröhren ohne Naht, welche am obern Ende in ein feines Glasrohr auslaufen.

Füllt man eine solche Röhre vor dem Versuche mit Wasser, so nimmt die Oberfläche desselben in der feinen Glasröhre, welche mit dem Innern der gedehnten Röhre kommuniciert, vor und nach der Belastung eine andere Stellung ein, so dafs man hier neben der Verlängerung der Röhre zugleich die Änderung des Röhren-Volumens messen kann.

Man unterscheidet die Erscheinungen beim Zuge und beim Drucke als Erscheinungen der absoluten und der rückwirkenden Elasticität.

B. Ein Kräftepaar tritt hier als Torsions-Moment auf und bewirkt in seiner Ebene eine **Drehung** gegen parallele Ebenen.

Wertheim[1]) untersuchte starke Stäbe in Bezug auf ihre Torsions-Momente, indem er das eine Ende derselben mit einer Welle versah, an welcher Belastungen angebracht werden konnten, während das andere Ende des Stabes fest eingeklemmt war.

Coulomb[2]) untersuchte zu demselben Zwecke feine Drähte und Fäden durch seine Methode der Oscillationen.

Der Winkel ω, um welchen ein Querschnitt des Stabes gegen den festen Querschnitt desselben gedreht wird, heifst Torsions-Winkel.

Für cylindrische Stäbe von der Länge l und vom Radius r findet man durch Versuche für ein Kräftepaar Pp die Beziehung

$$\omega = c' \,.\, Pp \,.\, \frac{1}{r^4}$$

falls man durch c′ eine Konstante bezeichnet, welche von dem untersuchten Materiale abhängig ist.

Wenn Gleichgewicht eingetreten ist, so stellen die inneren Druckkräfte ein Moment Qq dar, welches als — Pp zu bezeichnen ist, d. h. man hat

$$Qq = -\frac{1}{c'} \,.\, \omega \,.\, \frac{r^4}{l}.$$

Das Torsions-Moment (Pp) der äufseren Kräfte, welchem das Torsions-Moment (Qq) der elastischen Kräfte entgegengesetzt gleich ist, ist unter sonst gleichen Umständen dem Torsions-Koëfficienten $\left(\frac{1}{c'}\right)$ und dem Torsions-Winkel (ω) proportional.

Setzt man $\frac{1}{c'} = D$, so stimmt die Mafs-Zahl von D überein mit der Kraft, welche bei einem Stabe von der Länge 1 und vom Querschnitte 1 angebracht werden mufs, um am Arme 1 einen Torsions-Winkel 1 hervorzurufen.

Die Methode Coulombs beruht auf folgendem Gedankengange: Wenn das Torsions-Moment Qq in der That zu ω proportional ist, so mufs eine Kraft Q, welche stets an demselben Arme q

1) Annales de chimie et de physique III. sér. Bd. 50.

2) Mém. de l'Acad. des sciences. Paris 1784.

angreift, gleichmäſsige Schwingungen hervorbringen können, so daſs hier auch umgekehrt aus der Existenz von gleichmäſsigen Schwingungen auf eine Proportionalität von Qq und ω geschlossen werden darf.

Coulomb klemmte Drähte von vertikal gerichteter Längsachse fest ein und belastet dieselben durch eine Kugel, welche einen leichten Zeiger trug und über einer Winkel-Teilung Schwingungen machen konnte.

Tordierte man den Faden, so traten isochrone Schwingungen ein, sobald derselbe sich selbst überlassen wurde.

Die Schwingungs-Dauer (T) des Systems ist hier

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{d}},$$

falls man das Trägheits-Moment des Systems für die Achse des Drahtes als M einführt und $\frac{D \cdot r^4}{l}$, d. h. den (specifischen) Torsions-Koëfficienten des betreffenden Drahtes mit d bezeichnet.

Zur Bestimmung von M kann man die oben (S. 399) bezeichnete Methode anwenden, indem man die Kugel mit einem horizontalen Zeiger versieht, welcher auf beiden Seiten belastet werden kann.

Für cylindrische Stäbe sind ε und μ mit D durch folgende Gleichung [1]) verbunden:

$$D = \frac{\varepsilon}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Die hier behandelten Erscheinungen nennt man Erscheinungen der Torsions-Elasticität.

C. Wenn eine relativ starke Kraft auf einen relativ kleinen Teil eines Körpers wirkt, während dessen Umgebung nicht durch Kräfte in Anspruch genommen wird, so treten Verhältnisse auf, welche man als Erscheinungen der Schub- oder Scheer-Elasticität von den Erscheinungen der absoluten und der rückwirkenden Elasticität zu scheiden pflegt.

Eine Kugel, welche eine Panzerplatte durchbohrt, nimmt dieselbe, wie man zu sagen pflegt, auf Scheer-Elasticität, in Anspruch.

Wenn gleiche Kräftepaare Parallel-Ebenen eines Körpers in gleicher Weise angreifen, so treten Erscheinungen auf, welche unter dem Titel Biegungs-Elasticität (relative Elasticität) besonders behandelt werden, weil sie für die Praxis von hoher Bedeutung sind [2]).

Für horizontale Stäbe, welche an einem oder an beiden Enden eingeklemmt sind und dabei durch Kräfte in einer Vertikal-Ebene

---

1) Clebsch, Theorie der Elasticität pag. 8. Vergl. auch Wüllner, Lehrbuch, Bd. I, S. 199.

2) Eine elementare Behandlung dieses Gebietes findet man in Wernicke Lehrbuch, I, S. 412 fg.

in Anspruch genommen werden, läfst sich in jedem Vertikal-Schnitte eine Faser auffinden, welche nicht verkürzt und nicht verlängert ist. Die Gesamtheit dieser „neutralen Fasern“ bildet eine Fläche, welche die „neutrale Faserschicht“ heifst.

Die Kurve, in welcher die Vertikal-Ebene der wirkenden Kräfte die „neutrale Faserschicht“ schneidet, heifst „elastische Linie“: dieselbe ist der geometrische Ort der Schwerpunkte aller vertikalen Querschnitte des Körpers, d. h. so zu sagen dessen gekrümmte Achse.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dafs bei den physischen Bewegungen fast immer höchst verwickelte Fälle der elastischen Erscheinungen auftreten, welche auf die hier skizzierten zurückzuführen sind.

So wird z. B. ein Stab bei Druck-Belastungen im allgemeinen zusammengedrückt und gebogen.

D. Jenseits der Elasticitäts-Grenze der Materialien gelten die theoretischen Betrachtungen über die Verschiebungen innerhalb fester Körper nicht mehr, während es für die Praxis von grofser Wichtigkeit ist zu wissen, bei welcher Belastung z. B. ein Eisendraht von bestimmter Beschaffenheit zerreifst.

Man hat diese Zahlen durch Versuche bestimmt, welche den Elasticitäts-Koëfficienten entsprechen, und welche Festigkeits-Koëfficienten genannt werden.

So zerreifst z. B. ein Stab aus Tannenholz von 1 qcm Querschnitt bei einer Belastung von 850 Kg.

§. 3. Die krystallinischen Materialien.

In der Bestimmung der Elasticitäts-Konstanten derjenigen Körper, welche nicht als homogen aufgefafst werden dürfen, sind bisher [1]) nur relativ geringe Erfolge erreicht worden.

Die Bestätigung der Elasticitäts-Theorie ist für heterogene Substanzen im wesentlichen durch die Untersuchung der Wellen-Bewegungen gegeben worden, welche unsern Licht-Empfindungen entsprechen.

Die Gültigkeit der elastischen Grundgleichungen ist in äufserst mannigfaltiger Weise an dem optischen Verhalten von Krystallplatten geprüft worden.

Die physischen Körper treten bald in amorpher Form [2]), d. h. gestaltlos auf, bald in mathematisch bestimmten Gestaltungen, für deren Charakterisierung die Gröfse der auftretenden Flächen gar nicht, die Gröfse der auftretenden Winkel aber in hohem Mafse wichtig ist.

---

1) Zur Orientierung über den Stand der Frage vergl. die Arbeiten von W. Voigt in Wiedemanns Annalen 1882.

2) Gewisse Substanzen scheinen überhaupt immer in amorpher Form vorzukommen. Vergl. dagegen z. B. W. 1.

Wenn man die Krystalle nach ihrer geometrischen Beschaffenheit einteilt, so gelangt man zu Klassen, welche auch in anderer (z. B. in optischer Beziehung) in durchgreifender Weise von einander getrennt sind.

Man bezieht die Lage der einzelnen Krystall-Flächen auf bestimmten Koordinaten-Systemen und unterscheidet in Bezug auf Länge und Lage derselben sechs verschiedene Klassen von Krystallen.

1) Das reguläre (Schwefelkies, Bleiglanz etc.) System: drei Orthogonal-Achsen von gleicher Länge. 2) Das quadratische oder viergliedrige (Zinnstein) System: zwei Achsen des orthogonalen Kreuzes sind einander gleich. 3) Das rhombische oder zweigliedrige (Schwefel) System: drei ungleiche Orthogonal-Achsen. 4) Das monokline oder zwei- und eingliedrige (Gips) System: eine unter drei ungleichen Achsen steht auf der Ebene der andern beiden, welche sich nicht unter rechten Winkeln schneiden, senkrecht. 5) Das trikline oder eingliedrige (Kupfervitriol) System: die drei ungleichen Achsen schneiden sich nicht unter rechten Winkeln. 6) Das hexagonale oder sechsgliedrige (Quarz, Kalkspath etc.) System: auf der Ebene dreier gleichen Achsen, welche diese Ebene in sechs gleiche Teile zerlegen, steht die vierte Achse senkrecht.

C. Flüssige Systeme von konstantem Volumen.

Im **zweiten Aggregat-Zustande** können die einzelnen Punkte eines Körpers unter der Einwirkung relativ geringer Kräfte relativ grofse Lagen-Änderungen erleiden, während dabei das Volumen derselben im allgemeinen als konstant angesehen werden darf.

Die Veränderungen des Volumens, denen eine Flüssigkeit bei starkem Drucke unterliegt, sind sehr gering (z. B. $\frac{1}{20000}$ für Wasser bei dem Drucke von 1 Atmosphäre) und gleichen sich nach dem Aufhören des Druckes vollkommen aus, während bei festen Körpern bleibende Deformationen (Elastische Nachwirkung) zu konstatieren waren.

Oerstedts Piezometer.

§. 1. Die Begrenzung der Flüssigkeiten.

Freie Flüssigkeits-Massen nehmen die Gestalt von Kugeln (Regen-Tropfen) an, während die Oberfläche einer **Flüssigkeit in einem Gefäfse** angenähert durch eine Horizontal-Ebene (senkrecht zum Schwerdrucke) dargestellt wird.

Gelingt es den Schwerdruck für eine Flüssigkeit aufzuheben, so nimmt dieselbe die Gestalt einer Kugel an: stellt man (Plateau) ein Gemisch von Wasser und Alkohol her, welches dieselbe Dichtigkeit

wie Rüböl hat, so schwimmt eine solche Ölmasse in dem Gemische als Kugel [1]).

Flüssigkeits-Häutchen stellen stets ***Minimal-Flächen*** *dar, d. h. sie bilden unter allen Flächen, welche unter analogen Verhältnissen möglich wären, diejenigen, welche den kleinsten Inhalt haben* [2]).

Draht-Figuren in Seifenwasser und Seifenblasen.

Bei der Berührung von festen Körpern und Flüssigkeiten treten die sogenannten **Kapillar-Erscheinungen** auf, welche die Gestaltung der Oberfläche innerhalb eines grofsen Bereiches wesentlich beeinflussen.

In dünnen Röhren (Kapillar-Röhren) von vertikaler Achsen-Stellung wird die freie Begrenzung der Flüssigkeit im allgemeinen durch eine konkave (benetzende Flüssigkeit bei stumpfem Randwinkel) oder durch eine konvexe (nicht benetzende Flüssigkeit bei spitzem Randwinkel) Fläche dargestellt.

Analoges findet bei Tropfen auf einer festen Unterlage statt: ein Wassertropfen benetzt (stumpfer Randwinkel) eine reine Glasplatte, während dieselbe von einem Quecksilbertropfen (spitzer Randwinkel) nicht benetzt wird.

Man pflegt die Kraft, welche das Auseinanderfliefsen der Teile einer Flüssigkeit oder das Auseinanderfallen der Teile eines festen Körpers verhindert, Kohäsionskraft zu nennen, während man dann aufserdem zwischen verschiedenartigen Körpern eine Adhäsionskraft (Muschenbrocks Platten) anzunehmen gezwungen ist: bei stumpfem Randwinkel überwiegt die Adhäsion des festen Körpers, bei spitzem Randwinkel überwiegt die Kohäsion der Flüssigkeit.

Kapillar-Erscheinungen treten auch bei der Berührung zweier Flüssigkeiten auf.

Olivenöl bildet auf Wasser Tropfen, während Terpentinöl benetzt.

Wenn man eine reine Quecksilber-Oberfläche (Quincke) mit einem Glasfaden berührt, welcher vorher in Öl getaucht worden und dann abgewischt worden ist, so krümmt sich die Oberfläche stärker (herabgleitender Papierschwimmer) infolge der Ausbreitung des Öles.

Die Kapillar-Erscheinungen sind im wesentlichen Erscheinungen an der Grenze zweier verschiedener Systeme und werden demnach

---

1) Läfst man eine solche Ölkugel an einem durchgeschobenen Draht rotieren, so plattet sich dieselbe ab (Erde) nnd bildet wohl auch abgespaltene Ringe (Saturn). Man hat durch diese Versuche die Kant-Laplacesche Hypothese über die Geschichte des Weltalls zu erläutern gesucht, obwohl dort Newtonsche Kräfte und hier Kapillar-Erscheinungen zur Geltung kommen.

Wenn man die Thomson-Helmholtzsche Hypothese der Wirbel-Ringe zu Grunde legt, so könnte man allerdings zu einer vollständigen Analogie gelangen.

2) Vergl. H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimal-Flächen.

gleich den Reibungs-Erscheinungen in einer Ästhematik (S. 44) zu behandeln sein.

Ursprünglich beobachtete man in engen Röhren (tubi capillares) von vertikaler Achsen-Stellung, welche in grofsen Gefäfsen mündeten, eine Erhebung oder Senkung der Flüssigkeit beziehungsweise bei stumpfem oder spitzem Randwinkel.

In analoger Weise läfst sich auch zwischen zwei parallelen Platten eine Erhebung (Elevation) oder Senkung (Depression) von Flüssigkeiten beobachten.

Zwischen zwei vertikal gestellten Platten, welche einen kleinen Winkel bilden, wird die mittlere Grenzkurve der aufsteigenden Flüssigkeit angenähert durch ein Stück eines Hyperbelastes dargestellt.

Die Erhebung der Flüssigkeit im Lampendochte, Löschpapier, Schwamm etc. beruht auf Kapillarität.

Laplace gab (1819) in seiner Théorie capillaire, welche er dem 10. Buche seiner Mécanique céleste anfügte, die erste Begründung der Kapillar-Erscheinungen, während Poisson (1831) in seiner Nouvelle théorie de l'action capillaire und Gaufs in seinen Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii wichtige Erweiterungen gab.

Die experimentelle Untersuchung dieser Erscheinungen verdankt man neben anderen vor allem Quincke[1]), welcher bei seinen Untersuchungen über die Tropfen-Bildung dazu gelangte, für jede Substanz eine bestimmte Kapillaritäts-Konstante, welche er specifische Kohäsion nannte, einzuführen: da dieselbe stets ein Vielfaches (m) von 4,3 ist, so können die verschiedenen Substanzen nach der Gröfse von m eingeteilt werden.

Es giebt Flüssigkeiten, welche völlig **unmischbar** sind, z. B. Wasser und Quecksilber.

An der Grenze zweier **mischbarer** Flüssigkeiten findet stets ein gegenseitiger Austausch von Flüssigkeits-Teilchen (Diffusion) statt, welcher zu einer Mischung der beiden Flüssigkeiten führt.

Dasselbe tritt auch noch ein (Osmose), wenn zwischen den beiden Flüssigkeiten eine Membran oder irgend eine andere poröse Scheidewand vorhanden ist, wobei sich gewöhnlich auf der einen Seite ein Überschufs von Flüssigkeit einstellt.

Dutrochet unterschied die beiden Strömungen, welche eine poröse Scheidewand durchdringen, als Endosmose und Exosmose und erkannte zugleich die Wichtigkeit dieser Strömungen für das Leben der Pflanzen und Tiere, deren Zellwände in der That die Rolle von porösen Scheidewänden spielen.

Flüssigkeits-Strahlen, welche aus einem Gefäfse austreten, zeigen an der Abflufsstelle eine Einschnürung (contractio venae), d. h. sie erscheinen (bis auf $^2/_3$ der Öffnungs-Fläche) im Vergleich zu der Öffnung wesentlich verengt.

---

1) In einer Reihe von Abhandlungen in Poggendorffs Annalen.

Ein vertikal nach unten gerichteter Strahl zerreifst in einiger Entfernung von der Mündung infolge der zunehmenden Fall-Beschleunigung der Wasserteilchen, d. h. er besteht hier aus getrennten Tropfen: dieselben folgen so rasch auf einander, dafs sie nur bei intermittierender Beleuchtung (elecktrischer Funken) sichtbar werden.

Die Erweiterungen und Verengerungen (Savartsche Bäuche) eines solchen zerrissenen Strahles rühren davon her, dafs die Tropfen abwechselnd aus langgestreckten Formen durch die Kugelgestalt in abgeplattete Formen übergehen.

§. 2. Die Druck-Verhältnisse der Flüssigkeiten.

Für jede Fläche, welche durch einen Punkt im Innern einer Flüssigkeit gelegt werden kann, haben die **Druckkräfte**, welche hier den Veränderungen der Systempunkte entsprechen, stets **denselben Wert**, so dafs also Unterschiede, wie sie durch die Elasticitäts-Koëfficienten der festen Körper angedeutet werden, hier nicht vorkommen können.

Man berechnet den Druck für die Fläche eines Quadrat-Centimeters.

Der auf einen Teil der Flüssigkeitsoberfläche (oder auf eine Fläche im Innern) ausgeübte Druck pflanzt sich im Innern der Flüssigkeit nach allen Richtungen in gleicher Stärke fort. Hydraulische Presse.

Beim Segnerschen Wasserrade (Turbine) führt die einseitige Druck-Entlastung zur Rotation des Apparates: derselbe rotiert entgegen den Bewegungen des ausfliefsenden Strahles.

Unter dem **Einflufs der Schwere** tritt in Horizontal-Schichten einer Flüssigkeit verschiedener Druck auf, während innerhalb einer und derselben Schicht für alle Punkte derselbe Druck in Rechnung zu bringen ist.

Für alle Punkte einer bestimmten Horizontal-Schicht von der Fläche q, welche um h von der Oberfläche entfernt ist, ist der Druck $q \cdot h \cdot \delta$ in Rechnung zu bringen, falls man die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit δ bezeichnet.

Pascals Apparat für das hydraulische Paradoxon.

Besonders bemerkt werden mag, dafs der Druck einer Horizontal-Schicht auch in der Richtung von unten nach oben (Auftrieb) nachgewiesen werden kann, indem man einen beiderseits offenen, abgeschliffenen Cylinder mit einer abgeschliffenen Glasplatte bedeckt und das System mit dem somit geschlossenen Ende in eine Flüssigkeit einsenkt: die Platte fällt bei einer bestimmten Tiefe der Einsinkung nicht herab.

Giefst man Wasser in den Cylinder, so sinkt die Platte in dem Augenblicke, in welchem der Druck des eingefüllten Wassers im Verein mit dem Schwer-Drucke der Platte den Auftrieb um ein Geringes übersteigt.

In den beiden Schenkeln (von gleichem oder ungleichem Kaliber) einer U-förmigen Röhre (communicierende Röhren S. 409) steigt eine Flüssigkeit stets gleich hoch, während sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten (gemessen von der gemeinsamen Grenze aus) umgekehrt wie ihre Dichtigkeiten verhalten.

Quellen, Artesische Brunnen, Fontänen.

Die Unabhängigkeit des Druckes von der Richtung der gedrückten Fläche führt zum **Archimedischen Princip.**

Um dieses zu beweisen, kann man statt des eingetauchten Körpers vom Volumen v dasselbe Volumen (v) von einer Flüssigkeit erfüllt denken, deren Dichtigkeit (δ) der umgebenden Flüssigkeit gleich ist: da dieses Volumen im Verein mit der umgebenden Flüssigkeit ein im Gleichgewichte befindliches System darstellt, so trägt die umgebende Flüssigkeit eine Masse vom Volumen v und der Dichtigkeit δ, d. h. der eingetauchte Körper von der Dichtigkeit ε übt einen Druck aus, welcher sich als $(v \,.\, \varepsilon)\, g - (v \,.\, \delta) \,.\, g$ darstellt.

Ein Körper schwebt (Plateaus Ölkugel) in der Flüssigkeit, wenn $\varepsilon = \delta$ ist.

Soll ein Körper auf einer Flüssigkeit schwimmen, so muſs der Auftrieb des eingetauchten Volumen v', d. h. die Gröſse $(v' \,.\, \delta) \,.\, g$ dem Schwer-Drucke des Körpers $(v \,.\, \varepsilon) \,.\, g$ gleich sein, so daſs man $v' = v \,.\, \frac{\varepsilon}{\delta}$ anzusetzen hat.

Da $v' < v$ ist, so muſs auch $\varepsilon < \delta$ sein.

Für jede Gleichgewichts-Lage desselben Körpers in derselben Flüssigkeit ist v' dasselbe: konstruiert man innerhalb des Körpers eine Fläche, deren Tangential-Ebenen von dem Körper gleiche Volumina abscheiden, so durchläuft der Körper alle Gleichgewichts-Lagen, wenn man diese Fläche auf der Oberfläche der Flüssigkeit in geeigneter Weise abrollen läſst [1]*.*

Um die Sicherheit des Gleichgewichtes eines schwimmenden Körpers zu untersuchen, bestimmt man den Schwerpunkt S des Körpers und den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit S': in S greift die Kraft $(v \,.\, \varepsilon)\, g$ an, während in S' die Kraft $(v' \,.\, \delta) \,.\, g$ zur Wirkung kommt.

Für eine Gleichgewichts-Lage müssen S und S' auf einer Vertikalen liegen, für benachbarte Lagen tritt ein Kräftepaar auf, welches entweder zur alten Lage (stabil) zurückstrebt oder auf eine neue Lage (labil) hindrängt.

Wenn sich in der Nähe einer Gleichgewichts-Lage andere Gleichgewichts-Lagen befinden, so ist das Gleichgewicht labil.

Wenn ein Flüssigkeits-Strahl aus einer Öffnung eines Gefäſses hervorströmt, welche von dem Rande der Flüssigkeit um h entfernt ist, so ist die Ausfluſs-Geschwindigkeit (v) desselben gegeben als $v = \sqrt{2\, g\, h}$.

---

1) Vergl. W. 3.

Wenn die Flüssigkeits-Masse m ausströmt, so sinkt gleichzeitig innerhalb des Gefäſses die Masse m um die Höhe h, d. h. das System leistet die Arbeit (m g) h, welche als Energie $\frac{1}{2} m v^2$ *des Flüssigkeits-Strahles zur Geltung kommt.*

Dieses Theorem wurde 1641 von Torricelli aufgefunden.

D. Flüssige Systeme von variablem Volumen.

Der **dritte Aggregat-Zustand** steht zu dem zweiten in naher Verwandtschaft, insofern als die Grundbeziehung über die **Unabhängigkeit des Druckes** von der Richtung auch hier vorhanden ist.

Von einer Konstanz des Volumens darf hier auch nicht angenähert gesprochen werden, da man mit einer gegebenen Gasmasse im allgemeinen beliebige Räume auszufüllen imstande ist.

§. 1. Der Luft-Druck.

Die Gasmasse, welche unsere Erde in einer Höhe von etwa 10 Meilen umgiebt, besteht, abgesehen von kleinen Beimischungen, aus 79 Raumteilen Stickstoff und 21 Raumteilen Sauerstoff.

Um den Druck der Atmosphäre nachzuweisen, welcher nach dem grundlegenden Satze über die Fortpflanzung des Druckes an allen Orten, welche mit andern kommunicieren können, für alle Richtungen derselbe ist, stellt man einen geschlossenen Raum her, welcher bis zu einem gewissen Grade von Luft befreit ist.

Wenn man die Decke eines allseitig geschlossenen Gefäſses aus einer trockenen Membran (oder durch eine dünne, mit Fett aufgekittete Glasplatte) herstellt, so wird diese Decke beim Entleeren des Gefäſses durch den Luftdruck zersprengt, weil hier der Gegendruck fehlt.

Benutzt man als Decke eine ausgehöhlte Holzplatte, auf welcher sich Quecksilber befindet, so wird dieses in das Gefäſs hineingepreſst.

Die Luftpumpe mit Stiefel wurde 1650 durch Otto v. Guericke in Magdeburg erfunden. Magdeburger Halbkugeln.

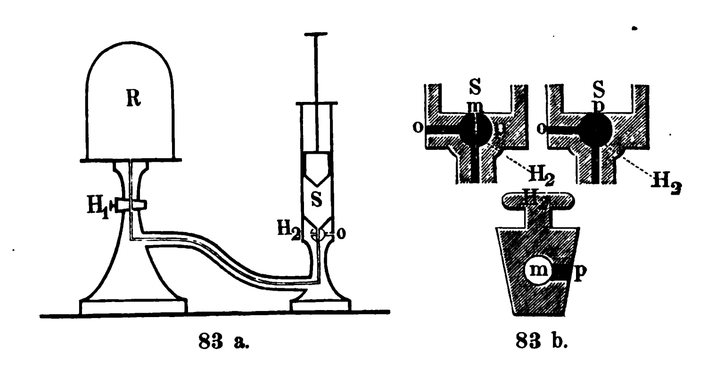
Ein Modell eines solchen Apparates ist in Figur 83 a im Schema dargestellt worden: Ein luftdicht anschlieſsender Kolben bewegt sich in der cylindrischen Röhre S (Stiefel), welche durch einen eigentümlichen Hahn H_2 *bald unter Abschluſs gegen auſsen mit der Glasglocke R (Recipienten), bald unter Abschluſs gegen den Recipienten mit der äuſseren Luft verbunden werden kann.*

Die zweifache Stellung des Hahnes H_2*, welcher mit einer doppelten Durchbohrung versehen ist, wird durch Figur 83 b dargestellt.*

Wenn der Kolben auf dem Grunde des Stiefels aufgesetzt ist, wird die Verbindung mit dem Recipienten hergestellt, dessen Luft bei dem nun folgenden Aufgange des Kolbens zum Teil in

den leeren Raum des Stiefels strömt; für den Niedergang des Kolbens wechselt man die Hahnstellung, so dafs die Luft aus S nunmehr in die äufsere Luft ausströmt, wodurch die Ausgangs-Stellung des Apparates wiederum erreicht ist.

Der Hahn H_1 dient zur Absperrung des Recipienten.



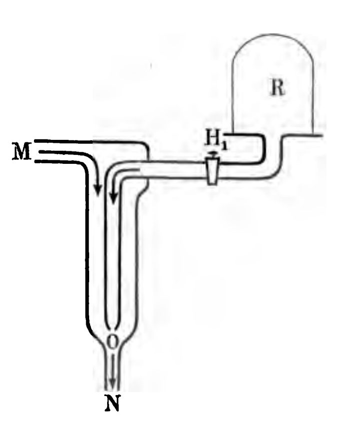
83 a. 83 b.

Es ist unmöglich mit der Luftpumpe ein wirkliches Vacuum zu erzeugen, weil einerseits im Apparate keine vollständige Dichtungen erreicht werden können und weil andrerseits zwischen Kolben und Stiefelboden beziehungsweise in der Bohrung des Hahnes (schädlicher Raum) stets Luft zurückbleibt.

Die Hähne, deren Handhabung immerhin unbequem ist, können durch selbstthätige Blasen-Ventile ersetzt werden.

Statt dieser Luftpumpe, welche mit einem oder mit zwei Stiefeln konstruiert werden kann, benutzt man in den Laboratorien vielfach Aspiratoren.

Die Figur 84 stellt den Bunsenschen Aspirator dar, neben welchem allenfalls noch die Stammersche Konstruktion zu nennen wäre: das Ende M der weiteren Röhre wird mit einer Wasserleitung verbunden, durch deren Inhalt das enge Rohr (O) umspült wird.



84.

Das abfliefsende Wasser (N) reifst die Luft aus dem engen Rohre mit sich fort, so dafs der Recipient R langsam entleert wird.

Sprengels Quecksilber-Luftpumpe.

Nachdem die Existenz des Luft-Druckes konstatiert ist, gelangt man zu einer sachgemäfsen Erklärung einer Reihe von Erscheinungen.

Wenn man die Mündung einer mit Wasser gefüllten Flasche unter

Wasser umkehrt, so hält der Luftdruck das Wasser in derselben fest; analoges geschieht in freier Luft, wenn man die bis zur Mündung gefüllte Flasche mit Papier bedeckt und dieselbe umstülpt.

Läfst man den Deckel einer Cigarrenkiste über den Rand eines Tisches hervorragen, während man Tisch und Deckel mit einem eng aufliegenden Papiere bedeckt, so zerschmettert ein kräftiger Faustschlag (von oben nach unten) den Deckel, ohne ihn vom Tisch herabzuschleudern.

Saug- und Stech-Heber, Herons-Ball und Herons-Brunnen, Mariottesches Gefäfs etc.

Die **Gröfse des Luft-Druckes** wurde (1643) durch Torricelli bestimmt, welcher, dem Gedankengange von Vives folgend, eine einseitig geschlossene Glasröhre, die etwa 90 cm lang war, mit Quecksilber füllte, um sie darauf mit verschlossener Mündung umzukehren und unter Quecksilber zu öffnen. Das Quecksilber-Niveau in der Röhre sank, bis es etwa 760 mm oder 28″ Paris über dem Quecksilber-Niveau des zweiten Gefäfses stand, d. h. der Luft-Druck hält einer Quecksilber-Säule von etwa 760 mm Höhe das Gleichgewicht.

Oberhalb des Quecksilber-Niveaus entsteht ein luftleerer Raum (Vacuum).

Der Luft-Druck ist demnach pro Quadrat-Centimeter gleich dem Schwer-Drucke von 76 Kubik-Centimeter Quecksilber, dessen Dichtigkeit ja durch 13,6 dargestellt wird: man findet 76 . 13,6 . g, d. h. ungefähr 1033 Dyn pro Quadrat-Centimeter.

Man wendet den bezeichneten Druck öfters unter dem Namen „Atmosphäre“ als Einheit der Druck-Messung an.

Derselbe Druck entspricht einer Wasser-Säule von 10 1/3 m Höhe: in einem Brunnen kann das Wasser durch Aufziehen des Kolbens, wobei ein luftleerer Raum entsteht, höchstens um 10 1/3 m gehoben werden.

Eine verfehlte Brunnen-Konstruktion zu Florenz bot Torricelli die Veranlassung, seine Versuche anzustellen, wodurch der „Horror vacui“ völlig beseitigt wurde.

Wenn man ein Torricellisches Vacuum von beträchtlicher Gröfse mit einem Recipienten verbindet, so wird die Luft in demselben erheblich verdünnt.

Geifslers Quecksilber-Luftpumpe [1]).

2.

Die Betrachtungen, welche bei Flüssigkeiten von konstantem Volumen zum Archimedischen Principe führen, gelten auch für Gase.

Um den Auftrieb der Luft nachzuweisen, benutzt man das

1) Vergl. Poggendorff in seinen Annalen Bd. 125.

Baroskop (Dasymeter) v. Guerike, welches aus einem Hebel besteht, welcher an einem Arme durch eine luftgefüllte Hohlkugel aus Glas von relativ grofsem Volumen und am andern Arme durch eine massive Metallkugel von relativ kleinem Volumen so belastet ist, dafs die Hebelarme in gewöhnlicher Luft horizontal stehn: unter der Luftpumpe senkt sich die Hohlkugel, wenn der Recipient entleert wird.

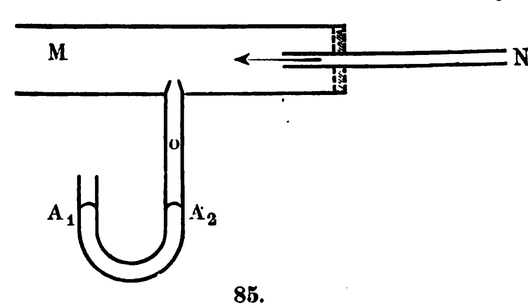
Theorie des Luftballons. Montgolfier benutzte (1780) verdünnte Luft, während Charles später Wasserstoffgas zur Füllung des Ballons verwandte.

Bei genauen Wägungen mufs die Korrektion des Schwer-Druckes, welche dem Auftriebe (S. 407) entspricht, berücksichtigt werden.

3.

Bewegte Flüssigkeits-Teile ändern den Druck ihrer Umgebung bei allen Flüssigkeiten.

Zum Nachweise solcher Druck-Änderungen kann man sich eines von Buff konstruierten Apparates, der in Figur 85 dargestellt ist, bedienen: Tritt aus N ein Luftstrom in die weitere Röhre, so entsteht in O eine Druck-Entlastung, welche durch das Quecksilber-Manometer (S. 439) angezeigt wird: die Kuppe A_2 steigt, während die Kuppe A_1 sinkt. Hydrodynamisches Paradoxon. Apparat von Clement und Desormes.



85.

§. 2. Das Barometer.

1.

Eine, mit einer Skala versehene, Torricellische Röhre stellt im Verein mit dem weiteren Gefäfse die einfachste Form (Gefäfs-Barometer) eines Barometers dar, d. h. eines Apparates, welcher zur Bestimmung des Luft-Druckes dienen kann.

Um die Feststellung der Niveau-Differenz zu erleichtern, stellt man den Boden des weiteren Gefäfses aus Leder dar, so dafs der untere Quecksilber-Spiegel stets mit einer festen Elfenbein-Spitze in Berührung gebracht werden kann, bei welcher der Nullpunkt der Skala liegt.

Durch Kapillar-Erscheinungen werden für ein Gefäfs-Barometer gewisse Korrektionen bedingt, welche nicht immer mit Sicherheit zu ermitteln sind.

Diese Korrektionen lassen sich nahezu vermeiden, wenn man die offene Seite des Torricellischen Rohres nach oben biegt und somit das weitere Gefäſs ganz ersetzt.

Bei einem solchen Heber-Barometer sind die Kapillar-Korrektionen für beide Schenkel in gleicher Weise anzubringen, so daſs sich dieselben bei der Bestimmung der Höhen-Differenz fortheben.

Man stellt hier ein Kathetometer beide Male auf die höchste Kuppe des Quecksilbers ein, falls nicht auf dem Rohre selbst eine Teilung angebracht ist.

Genau genommen verhalten sich beide Quecksilber-Kuppen nicht gleich: die obere ist erfahrungsmäſsig stets etwas flacher.

Da sich bei der Füllung eines Torricellischen Rohres bei aller Vorsicht kleine Luftblasen zwischen Glas und Quecksilber ansammeln, welche später den über dem oberen Quecksilber-Spiegel gelegenen Raum ausfüllen, so muſs das Barometer ausgekocht werden.

Daſs Quecksilber und Rohr vor der Füllung mit äuſserster Sorgfalt gereinigt werden müssen, soll besonders erwähnt werden.

In neuerer Zeit hat man die Gestalt-Änderung einer geschlossenen, mit verdünnter Luft gefüllten, Röhre dazu benutzt, um das Quecksilber-Barometer zu ersetzen.

Bourdon [1]) führte eine beiderseitig geschlossene Röhre von kreisförmigem Querschnitt, an deren Enden eine Hebelübertragung einen Zeiger über einer Skala in Bewegung setzt als **Baromètre métallique** (Aneroïd-Barometer) [2]) ein.

Wenn man ein solches Barometer von Zeit zu Zeit mit einem Quecksilber-Barometer vergleicht, so kann man dasselbe auch zu wissenschaftlichen Messungen verwenden.

2.

Für alle Punkte einer Horizontal-Schicht (S. 429) des Luft-Meeres, das uns umgiebt, ist der Luft-Druck angenähert derselbe.

Für die Abhängigkeit von Erhebung und Barometerstand gilt der wichtige Satz, daſs die **Barometerstände für Erhebungen, welche eine arithmetische Reihe bilden, in geometrischer Reihe abnehmen.**

Denkt man einen vertikalen Luft-Cylinder von der Temperatur 0^0 *aus der Atmosphäre herausgeschnitten und durch Horizontal-Ebenen* $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots$ *von gleichem Abstande* (e) *zerlegt, so entsprechen den Erhebungen* $h_1 = e, h_2 = 2e, h_3 = 3e, \ldots$ *die Barometerstände* $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$

1) Comtes rendus Bd. 37.
2) νηρος = feucht, flüssig.

28*

Nimmt man e so klein an, dafs die Dichtigkeit der Luft $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots$ *zwischen je zwei Horizontal-Ebenen als konstant betrachtet werden darf, so ist, falls δ die Dichtigkeit des Quecksilbers bezeichnet, für die Erdoberfläche* E_0

$$\delta . b_0 = (d_1 + d_2 + \ldots) e = f \text{ und für } E_1, E_2, E_3 \ldots$$
$$\delta . b_1 = f - d_1 . e$$
$$\delta . b_2 = f - (d_1 + d_2) e$$
$$\delta . b_3 = f - (d_2 + d_2 + d_3) e$$

. .

. .

Demnach hat man:
$$\delta (b_0 - b_1) = d_1 . e,$$
$$\delta (b_1 - b_2) = d_2 . e,$$
$$\delta (b_2 - b_3) = d_3 . e \ldots.$$

. .

. .

und auch $\frac{b_0 - b_1}{b_1 - b_2} = \frac{d_1}{d_2}, \frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{d_2}{d_3}, \ldots\ldots$

Nach dem Boyleschen Gesetze, auf das wir noch zurückkommen, verhalten sich die Dichtigkeiten zweier Volumina desselben Gases unter sonst gleichen Umständen wie die Drucke, unter denen sie stehen, so dafs also

$$d_1 : d_2 = b_1 : b_2,\ d_2 : d_3 = b_2 : b_3, \ldots\ldots$$

zu setzen ist.

Demnach folgt

$$\frac{b_0 - b_1}{b_1 - b_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{b_2}{b_3}, \ldots\ldots$$

d. h. $b_0 : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 = \ldots\ldots$

Bezeichnet man den echten Bruch $\frac{b_1}{b_0}$ *mit* k, *so ist*

$$b_0 = k^0 . b_0,\ b_1 = k^1 . b_0,\ b_2 = k^2 . b_0,\ b_3 = k^3 . b_0, \ldots\ldots$$

Wenn man für die Erhebungen $h_p = p . e$ *und* $h_q = q . e$ *die Barometerstände* b_p *und* b_q *abliest, so hat man*

$$b_p = k^p . b_0 \text{ und } b_q = k^q . b_0, \text{ d. h.}$$
$$\frac{\log b_q - \log b_p}{\log k} = q - p.$$

Man bestimmt mit Hülfe der Konstante k demnach die Höhen-Differenz $p - q$ *aus den gemessenen Barometerständen* b_p *und* b_q.

Beobachtet man einmal zwei Barometerstände b_p und b_q für eine bekannte Differenz $p - q$, so läfst sich die Gröfse k ein für alle Mal berechnen.

Ramond fand (1811) durch Beobachtung für $-\frac{1}{\log k}$ den Wert 18393, während eine angenäherte Rechnung die Gröfse als

$$\frac{b_0 . \delta}{M . d_1} = 18392 \text{ m}$$

darzustellen gestattet, indem M den Modulus (0,4343 . . .) des zur Rechnung benutzten Logarithmen-Systems bezeichnet.

Der Barometerstand (b_0) im Niveau des Meeres beträgt 760 mm, während für eine Temperatur von 0° die Luft hier 773 mal leichter ist als Wasser, so dafs $d_1 = \frac{1}{773}$ zu setzen ist.

Perrier beobachtete (1648) auf Veranlassung Pascals auf dem Puy de Dôme zum ersten Male, dafs der Luft-Druck mit der Höhe (für den Versuch 3'' Pariser) abnimmt.

Da die Spiegel der verschiedenen Meere nicht gleich hoch sind, so müssen für die Vergleichung von Höhen Normalpunkte eingeführt werden: Der Normal-Höhenpunkt der Berliner Sternwarte liegt etwa 37 m über dem mittleren Niveau des deutschen Meeres.

Da die betrachtete Luftsäule in Wirklichkeit nicht die Temperatur 0° C. hat, so mufs darauf Rücksicht genommen werden, dafs die Dichtigkeit der Luft für t° durch $\frac{d_1}{1 + \alpha t}$ dargestellt wird, wobei $\alpha = \frac{11}{3000}$ den Ausdehnungs-Koëfficienten (Dilatation) der Luft bezeichnet.

Aufserdem spielt der Feuchtigkeits-Gehalt der Luft eine grofse Rolle.

Wenn man aus allen vorhandenen Messungen b_0 für ein bestimmtes Niveau herzustellen sucht, so findet man, dafs b_0 streng genommen keine Konstante ist, dafs sich diese Gröfse vielmehr mit Länge und Breite ändert[1].

Der Barometerstand ist im allgemeinen bei Nordostwind am höchsten und bei Südwestwind am niedrigsten, so dafs man aus den Barometer-Messungen auf bestimmte Luftströmungen und damit auf die Veränderungen des Wetters schliefsen kann.

Seewarte zu Hamburg. Die Wetterkarten der täglich erscheinenden Zeitungen.

Bei der Bestimmung des Barometerstandes hat man, abgesehen von der Kapillar-Korrektur, für welche bestimmte Tabellen[2]) existieren, folgende Korrektionen anzubringen

Wenn man bei der Temperatur t den Barometerstand b_t abgelesen hat, so mufs man darauf Rücksicht nehmen, dafs die Skalen-Einheit bei einem linearen Ausdehnungs-Koëfficienten λ bei der Temperatur t die Länge $1 + \lambda . t$ hat, dafs man also bei Temperaturen über 0° für den Barometerstand einen zu kleinen Wert erhält und $b_t . (1 + \lambda . t)$ statt b_t einzuführen hat.

Da ferner die Volumen-Einheit des Quecksilbers bei t° in $1 + q . t$ übergeht, so erhält man bei Temperaturen über 0° für

---

1) Vergl. Schoner. Poggendorffs Annalen 26.
2) Kohlrausch, Leitfaden, Tabelle 16.

den Barometerstand einen zu grofsen Wert, d. h. man hat b_t durch $\frac{b_t}{1 + q \cdot t}$ zu ersetzen.

Demnach hat man $b_t \frac{1 + \lambda \cdot t}{1 + q \cdot t}$ oder angenähert

$$b\,(1 - [q - \lambda]\; t)$$

für b_t anzusetzen.

Für q ist 0,0001815 einzusetzen, während λ für Glas den Wert 0,0000092 und für Messing den Wert 0,0000189 hat.

§. 3. Das Boylesche Gesetz.

Umschliefst man eine Gasmasse durch einen vertikal stehenden Cylinder, in welchem ein Kolben mit horizontaler Grundfläche beweglich ist, so gelangt das System bei einer gewissen Belastung des Kolbens ins Gleichgewicht: eine Verminderung der Belastung führt zu einer Vergröfserung, eine Vergröfserung der Belastung führt zu einer Verkleinerung des eingeschlossenen Gas-Volumens.

Boyle fand (1662) für diese Änderungen das Gesetz, dafs die **Dichtigkeit des Gases stets dem Drucke** proportional ist, falls keine Temperatur-Änderungen eintreten.

Um dieses später (1679) von Mariotte neu formulierte Gesetz zu beweisen, benutzt man einseitig verschlossene Glasröhren mit Quecksilberfüllung.

Eine Torricellische Röhre, welche in einem mit Quecksilber gefüllten Cylinder von vertikaler Achse auf und ab bewegt werden kann, dient zur Untersuchung von verdünnter Luft, indem man in das Vacuum derselben eine Luftblase einsteigen läfst und für verschiedene Stellungen Volumen und Druck bestimmt.

Eine heberförmige Röhre, deren längeres Ende offen ist, dient zur Untersuchung von komprimierter Luft, indem man in den kürzeren Schenkel derselben Luft bringt und im längeren Schenkel Quecksilber-Säulen von verschiedener Höhe als Belastung anwendet.

Das Boylesche Gesetz ist (1845) von Regnault in einer sehr ausgedehnten Untersuchung genauer geprüft worden, welche dessen Gültigkeit für alle Gase, solange dieselben von ihrem Condensations-Punkte weit genug entfernt sind, innerhalb gewisser Grenzen der Annäherung aufser Zweifel stellt.

Die Beobachtungen von Natterer und Cailletet haben die Regnaultschen Ergebnisse durchaus bestätigt, so dafs die strenge Gültigkeit des Gesetzes, welche man früher annahm, auch hier innerhalb der Grenzen des Thatsächlichen durch angenäherte Gültigkeit zu ersetzen ist.

Bezeichnet man Druck und Volumen beziehungsweise durch p und v, so lautet der Ausdruck des Boyleschen Gesetzes

$$v \cdot p = \text{constans}.$$

Statt dessen darf man auch sagen, dafs sich die Volumina einer

Gasmasse umgekehrt verhalten wie die Drucke, unter denen dieselbe steht.

Gemäfs dem Boyleschen Gesetze mifst man den Druck eingeschlossener Gase oder Dämpfe durch Manometer.

Man unterscheidet offene Manometer, in denen der fragliche Druck z. B. durch eine Quecksilber-Säule und geschlossene Manometer, in denen der fragliche Druck z. B. durch eine abgesperrte Luft-Masse gemessen wird.

Um die Dichtigkeit eines Gases zu bestimmen, benutzt man entweder die Methode von Dumas oder von Gay-Lussac (Hofmann).

Regnault stellte (1847) für Luft unter 45° Breite in der Höhe des Meeres-Niveaus die Dichtigkeit gegen Wasser auf $\frac{1}{773,533}$ *fest.*

1 Liter Luft wiegt 1,293 Gramm, während 1 Liter des leichsten Gases, des Wasserstoffs 0,0896 Gramm wiegt.

§. 4. Die Gay-Lussacsche Formel.

Wenn eine Gasmenge immer unter konstantem Drucke p gehalten wird, so nimmt sie bei t° C. das Volumen

$$v_{p,t} = v_{p,o}(1 + \alpha t)$$

ein, falls man ihr Volumen bei 0° C. mit $v_{p,o}$ bezeichnet.

Die Konstante α ist nach Gay-Lussac (1812) für alle Gase dieselbe (Konstanz des Ausdehnungs-Koëfficienten) und ist durch die Zahl 0,003665, d. h. angenähert durch die Zahl $\frac{1}{273}$ darstellbar.

Das Volumen eines Gases hängt von zwei Gröfsen (Druck und Temperatur) ab, so dafs der Wert desselben durch einen doppelten Index gekennzeichnet werden mufs.

Das Zeichen $v_{p,t}$ bedeutet für $p = 760$ mm und $t = 20°$ C. ein Volumen, das bei 20° C. unter 1 Atmosphäre Druck steht.

Wenn man das Volumen $v_{p,t} = v_{p,o}(1 + \alpha t)$ unter konstanter Temperatur t wiederum auf das Volumen $v_{p,o}$ reduciert, so steht dasselbe unter einem Drucke p′, so dafs also $v_{p,o} = v_{p',t}$ gesetzt werden darf. Nun gilt hier im Hinblick auf das Boylesche Gesetz die Beziehung $p' = p(1 + \alpha t)$.

Hier bedeutet p′ den Druck des Volumens $v_{p,o} = v_{p',t}$ bei t° C. und p den Druck des Volumens $v_{p,o} = v_{p',t}$ bei 0° C., d. h. man hat $p_{v,t} = p_{v,o}(1 + \alpha t)$.

Bezeichnen nun p_t und v_t zusammengehörige Werte von Druck und Volumen, welche der Temperatur t entsprechen, so ist nach den obigen Formeln $p_t \cdot v_t = p_o \cdot v_o (1 + \alpha t)$.

Den Ausdruck der letzten Formel pflegt man das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz zu nennen.

Für $v_o = v_t$, beziehungsweise für $p_o = p_t$ erhält man wieder die obigen Formeln.

Wenn man $t = T - \frac{1}{\alpha}$ setzt, so gelangt man zu der Formel

$$p_t \cdot v_t = \alpha \cdot (p_0 \cdot v_0)\ T,$$

d. h. das Produkt aus zusammengehörigen Werten von Druck und Volumen ist der Gröfse T, welche absolute Temperatur genannt wird, proportional.

Ein Thermometer nach Celsius zeigt durch die Ausdehnung oder Verkürzung des Quecksilberfadens, die man an einer Skala mifst, an, dafs gewisse Erscheinungen (Wärme-Zufuhr oder Wärme-Abfuhr) eingetreten sind, welche gleichzeitig als eine Steigerung oder Verminderung unserer Wärme-Empfindungen wahrgenommen werden können.

Der Anfangspunkt der Skala, d. h. 0° C. entspricht dem Gefrierpunkte des Wassers, während dessen Siedepunkt durch 100° C. dargestellt wird.

Für ein Thermometer nach Réaumur gelten dieselben Bezeichnungen, falls man die Zahl 100 durch 80 ersetzt.

Die Substitution $t = T - \frac{1}{\alpha} = T - 273$ *bedeutet, dafs man den Anfangspunkt (S. 149) in Richtung der Wärmeabnahme um 273 Grade verlegt.*

Wenn die Gay-Lussacsche Formel für — 273° C. noch in Geltung sein sollte, so würde am „absoluten“ Nullpunkte ($T = 0$) *kein Druck mehr vorhanden sein.*

Es ist höchst beachtenswert, dafs die Wort-Verbindung „Volumen einer Gasmenge“ überhaupt keinen Sinn hat, falls man nicht bestimmte Festsetzungen über Druck und Temperatur stillschweigend voraussetzt.

Um die Menge zweier Gase zu vergleichen, mufs man dieselben auf gleiche Temperatur und gleichen Druck reducieren.

Man wählt für die Vergleichung gewöhnlich 0° und 760 mm Quecksilber-Druck.

Bestimmt man die Dichtigkeit der Gase ein für alle Mal für eine bestimmte Temperatur und einen bestimmten Druck, d. h. für einen sogenannten Normal-Zustand, so darf man abkürzend schlechthin von der Dichtigkeit der Gase sprechen.

Man wählt hier als Einheit das Gas von geringster Dichtigkeit, den Wasserstoff, und nennt die Dichtigkeit, bezogen auf die Einheit, die Dampfdichte.

Man findet als Dampfdichte für Sauerstoff 16, für Stickstoff 14, für Chlor 35,5 etc., d. h. lauter Zahlen von relativer Einfachheit.

Das Gewicht eines Liters Wasserstoff im Normalzustande (S. 439), d. h. 0,0896 Gramm heifst nach Hofmann ein Krith.

§. 5. Diffusion und Absorption.

Auch bei den Gasen findet bei direkter Berührung oder bei Berühung durch poröse Scheidewände eine starke Diffusion statt.

Der Druck eines Gas-Gemisches wird durch das Daltonsche Gesetz bestimmt: Wenn mehrere Gase einen Raum v ausfüllen, so ist der Druck des Gemisches gleich der Summe der Einzel-Drucke, welche jedes Gas ausüben würde, falls es für sich den Raum v einnähme.

Dieses Gesetz ist für die Bestimmung des atmosphärischen Druckes von großser Wichtigkeit, namentlich in Bezug auf den Wasserdampf, welcher stets in der Luft enthalten ist.

Auch Flüssigkeiten nehmen beträchtliche Mengen von Gasen in sich auf (Absorption) und zwar ist hier nach dem Henryschen Satze das absorbierte Volumen stets unabhängig vom Druck.

Bunsen nennt die Mafs-Zahl des auf 0° und 760 mm reducierten Gas-Volumens, welches die Volumen-Einheit der Flüssigkeit aufnimmt, den Absorptions-Koëfficienten des betreffenden Systems.

Endlich nehmen auch feste Körper beträchtliche Mengen von Gasen in sich auf und zwar tritt hier zum Teil eine wirkliche Absorption, zum Teil eine Kondensation auf der Oberfläche ein, wobei die Grenzen übrigens fliefsend sind.

Als Beispiel für Absorption ist vor allem das Verhalten des Palladiums zu nennen, welches Wasserstoff begierig aufsaugt.

Als Beispiel für Kondensationen mögen die Moserschen Hauchbilder angeführt werden.

3. Die atomistische Hypothese.

Im Gegensatz zu der hier vertretenen Behandlung der physischen Erscheinungen, deren Aufgabe mit der **Beschreibung des Thatsächlichen** erfüllt ist, hat man von jeher versucht, durch Spekulationen über das Wesen der Dinge Aufschlufs zu erhalten.

Natürlich hat man in der Entwicklung der modernen Naturwissenschaft immer und immer wieder auf jene atomistischen Hypothesen zurück gegriffen, welche ursprünglich für den antiken Materialismus charakteristisch waren.

Indem man aufserdem, durch das Gefüge der Sprache verführt, die Kräfte fast zu selbständigen Wesen aufbauschte, anstatt sie als Funktionen der Bewegung anzusehen, fafste man die Welt als ein System von unteilbaren Elementen (Atomen) auf, welche gewissermafsen als Behausung (Sitz) der verselbständigten Kräfte angesehen wurden.

Indem man ferner aus den Atomen der Körper und aus den hinzu gedichteten Atomen eines gedachten Mediums, des Äthers, Körper-Moleküle [1]) und Äther-Moleküle aufbaute, glaubte man der Rätsel letztes gefunden zu haben und übersah, dafs diese Gestaltungen der produktiven Phantasie nichts aussagten, als was man selbst in sie hineingelegt oder besser hineingedichtet hatte.

Der Atomismus, welcher innerhalb der Wissenschaft als beseitigt gelten durfte [2]), ist in neuer Zeit wiederum aufgelebt, weil er für die Darstellung der Gesetze gasförmiger Körper gute Dienste zu leisten schien.

Es läfst sich auch gar nicht leugnen, dafs die atomistische Auffassung der Materie im gewissen Sinne zu einer Veranschaulichung von Vorgängen zu führen scheint, welche bei einer Beschreibung des Thatsächlichen weniger aufgeklärt erscheinen.

Diese Veranschaulichung ist aber in der That nur scheinbar vorhanden, weil eine geschärfte Analyse in der bisher gegebenen Theorie des Atomismus innere Widersprüche nachweist [3]).

So bekennt z. B. Wüllner [4]) im Hinblick auf Fechners Atom-Lehre: „Dafs das Atom nach dem vorigen selbst wieder, wenn ich so sagen darf, atomistisch gefafst werden mufs, leuchtet ein; denn nur dann ist die Verschiedenheit der physikalischen Atome fafsbar, wenn wir sie als Modifikationen einer Materie ansehen. Ob aber dann die Grundlage der physikalischen Atome, das philosophische Atom, als etwas ausgedehntes, oder ob es als einfacher, materieller Punkt aufzufassen ist, das ist eine Frage, welche lediglich der Spekulation angehört“.

In der That ist die sehr berechtigte Forderung, das **Atom wiederum atomistisch** zu fassen, ein Hinweis auf einen progressus in infinitum, welcher die Veranschaulichung, um deren willen man die Atome einst wieder erfunden hat, vollständig zu nichte macht, da es uns einmal nicht gegeben ist, Unendliches anzuschauen.

Die moderne Gas-Theorie, die man übrigens anerkennen oder verwerfen kann, ohne die fest begründete mechanische Theorie der Wärme in ihren Grundzügen irgend wie anzutasten [5]), hat den Atomismus, wie schon erwähnt, von neuem aufleben lassen.

Aus der Annahme, dafs ein Gas aus elastischen Gruppen von Atomen (Molekülen) besteht, welche in grader Linie mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten, bis sie auf ein Hindernis stofsen, hat man versucht eine Gleichung

---

1) Rammelsberg, Grundrifs der Chemie, S. 13: Ein Molekül ist die kleinste Menge eines Körpers im freien Zustande; ein Atom ist die kleinste Menge eines Elementes in dem Moleküle seiner Verbindung.

2) In Bezug auf diese Beseitigung vergl. die betreffende Arbeit von Lasswitz in Poggendorffs Annalen, Bd. 153.

3) Vergl. Lange, Geschichte des Materialismus.

4) Lehrbuch, I, S. 167.

5) G. Kirchhoff behandelt z. B. in seinen Vorlesungen die Wärme ohne Hinblick auf die kinetische Gas-Theorie und giebt nur am Schlusse einen Abrifs derselben.

$$p \cdot v = k \cdot f$$

abzuleiten, in welcher p, v und f Druck, Volumen und Energie des Gases bezeichnen, während k eine Konstante bedeutet [1]).

Fügt man nun die Annahme hinzu, dafs die Energie der absoluten Temperatur des Gases proportional ist, so gelangt man allerdings bei passender Konstanten Bestimmung (k') zur Boyle = Gay-Lussacschen Gleichung

$$p \cdot v = k' \cdot T.$$

Daraus findet sich dann für die konstante Geschwindigkeit v der Gas-Moleküle die Beziehung

$$v = 113 \sqrt{\frac{2\,T}{m}} \; \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}},$$

falls man das Molekular-Gewicht des betreffenden Gases mit m bezeichnet.

Bei 0° C. erhält man z. B. für Wasserstoff (m = 2) den Wert $v = 113 \sqrt{273} = 1874 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}$.

Unter dem Molekular-Gewichte eines Gases versteht man die Zahl, welche das Gewicht eines solchen Gas-Moleküls in seinem Verhältnisse zum Gewichte eines Wasserstoff-Moleküls angiebt.

Diese Zahlen, welche in der That als Proportionalen eine grofse Bedeutung (Verbindungs-Gewichte) haben, führen dann zu dem Satze, dafs die Dampfdichten verschiedener Gase sich wie deren Molekular-Gewichte verhalten.

Daraus folgt der Avogadrosche (1810) Satz: Gleiche Volumina verschiedener Gase enthalten unter analogen Verhältnissen die gleiche Anzahl von Molekülen.

Die Gas-Moleküle, welche aus Atomen zusammengesetzt sind, müssen, wie man zu sagen pflegt, als elastisch vorausgesetzt werden, weil sonst die Bewegung im Innern des Gases allmählich aufhören würde.

Da man sogar des öfteren von elastischen Atomen [2]) gesprochen hat, so mag ausdrücklich betont werden, dafs die kontinuierliche Erhaltung der Bewegungen uns dazu zwingt, den **Stofs je zweier Atome,** welche, als unteilbar vorausgesetzt, nicht

---

1) Grade wegen des klassischen Untersuchungs-Ganges, welche die induktiv-deduktive Methode der modernen Naturwissenschaft ausgezeichnet hervortreten läfst, ist O. E. Meyers Theorie der Gase für das Studium dieser Verhältnisse ganz besonders zu empfehlen.

2) Vergl. die Anm. auf Seite 43. Mit grofsem Rechte betonte O. E. Meyer auf der 47. Versammlung deutscher Naturforscher, dafs die kinetische Atomistik auf zwei Sätzen ruht, von denen der eine die Erhaltung der Energie der Bewegung und der andere die Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes ausdrückt. Vergl. auch O. E. Meyer, Theorie der Gase, S. 38.

Noch etwas schärfer scheint uns Lübeck (Kantor-Schlömilchs Zeitschrift 1877) die Grundlage zu formulieren, indem er statt des zweiten Meyerschen Satzes einführt, dafs eine Bewegung nur aufgehoben werden kann durch eine gleich grofse ihr entgegengesetzte.

mehr Energie an Teile abgeben können, dem **Satze von der Erhaltung der Energie** unterworfen zu denken.

Dafs dabei dieselben Gesetze gelten, welche den elastischen Stofs homogener Kugeln beherrschen, wird durch die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung der Energie annähernd erklärt, ohne dafs doch irgend ein Grund vorläge, das Oxymoron eines „elastischen Atoms“ zu schaffen [1].

Die atomistische Theorie der Materie unterscheidet die **drei Aggregat-Zustände** folgendermafsen:

1. In festen Körpern führen die Moleküle relativ kleine Schwingungen um bestimmte Gleichgewichts-Lagen aus.
2. In Flüssigkeiten von konstantem Volumen schreiten die schwingenden Moleküle fort und drehen sich, ohne jedoch durch ihre Bewegungen eine Volumen-Änderung zu erzeugen.
3. In Gasen schreiten die Moleküle mit konstanter Geschwindigkeit in grader Linie fort, bis sie auf ein Hindernis treffen, während für jeden Zusammenstofs der Satz von der Erhaltung der Energie in Geltung ist.

Für die Ableitung der Gesetze fester Körper und Flüssigkeiten von konstantem Volumen hat diese Anschauung bisher noch wenig Vorteile dargeboten.

Wenn man den Wert einer Hypothese an der Fruchtbarkeit ihrer Verwendung mifst, so steht die Sache unserer Ansicht nach für die Atomistik nicht sehr günstig, zumal auch die Chemie der Begriffe von Molekülen und Atomen vollständig entbehren kann.

Aufserdem führt die Atomistik in letzter Instanz selbst dazu, die Begriffe des Atoms wiederum atomistisch zu fassen, so dafs schliefslich [2]) doch jene kontinuierliche Raumerfüllung geschaffen wird, welche wir zu Grunde gelegt haben, weil sich unsere Empfindungen zu einem dreifach ausgedehnten Kontinuum ordnen.

Die Einführung des Volumen-Elementes, welche sich jetzt innerhalb der mathematischen Physik mehr und mehr zu vollziehen scheint, deutet im Verein mit der Konstruktion der Wirbel-Atome darauf hin, dafs man langsam zu jener Anschauung übergeht, welche unserer Ansicht nach allein erkenntnistheoretisch [3]) *zulässig ist.*

---

1) Mit vorzüglicher Klarheit sind diese Beziehungen von Lasswitz, Atomistik und Kriticismus VIII, dargelegt worden.

2) Vergl. hierzu G. Helm, Wiedemanns Annalen 1881 und Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie 1882.

3) Dafs Lasswitz in der erwähnten Studie (Atomistik und Kriticismus) zu einem entgegengesetzten Ergebnisse kommt, obwohl wir nahezu auf demselben erkenntnistheoretischen Boden stehen, scheint nur daraus erklärlich, dafs Lasswitz dem im allgemeinen sehr berechtigten Bedürfnisse einer Veranschaulichung gewisse Koncessionen macht, welche ich für unzulässig halte. Ich hoffe, diesem Punkte gelegentlich in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie einen eigenen Artikel widmen zu können.

IV. Die allgemeine Theorie der physischen Bewegungen und die Special-Gebiete der Physik.

Das Princip von der Erhaltung der Energie, welches in letzter Instanz im Verein mit dem Princip von der Konstanz der Massen die Grundlage jeder physikalischen Dynamik bildet, bedarf im gewissen Sinne einer Erläuterung, welche durch das Princip der Transformation der Energie gegeben wird.

Wenn Bewegungen, welche verschiedenen Empfindungs-Qualitäten entsprechen, in andere übergehen, so tritt statt eines Empfindungs-Komplexes von einer bestimmten Beschaffenheit ein Empfindungs-Komplex von anderer bestimmter Beschaffenheit auf.

Dafs der Satz von der Erhaltung der Energie auch für solche Bewegungs-Übergänge in Geltung ist, scheint bei der hier eintretenden Auffassung selbstverständlich, während die historische Entwicklung der physikalischen Theorieen zeigt, dafs dieser Wahrheit die Anerkennung Schritt für Schritt erkämpft werden mufste.

Als R. Mayer[1]) (1842) nachgewiesen hatte, dafs eine Änderung der Temperatur stets einer Arbeits-Leistung entspricht, da war gezeigt, dafs eine Änderung in der Wärme-Empfindung auf eine Bewegungs-Änderung zurückweist, welche in das Ganze der physischen Bewegungen hineinpafst oder dafs (in anderer Ausdrucks-Weise) neben einfachen Übertragungen von Energie auch Transformationen vorkommen, für welche gleichfalls der Satz von der Erhaltung der Energie in Geltung ist.

Als ferner (1847) Helmholtz[2]) in durchaus selbständiger Weise denselben Gedanken für die verschiedensten Empfindungs-Gebiete durchzuführen begann, da machte die Erkenntnis, dafs der Satz von der Erhaltung der Energie auch für Transformationen gilt, immer gröfsere und gröfsere Fortschritte.

Damit war die Forderung aufgestellt, jeden beobachteten Verlust an Energie als einen scheinbaren Verlust anzusehen, so dafs es sich nun darum handeln mufste, die scheinbar verlorene Energie aufzusuchen.

Dadurch treten die Special-Gebiete der Physik, welche fast zu getrennten Reichen geworden waren, von neuem in enge Beziehung.

Die physikalische Dynamik, welche ihre feste Stütze in dem Boden der apriorischen Wissenschaften sucht und findet, bildet das Fundament der allgemeinen Theorie der physischen Bewegungen, auf deren Grundlage wiederum der vielgegliederte Bau jener Special-Gebiete ersteht, welche man unter dem Namen der physikalischen und technischen Wissenschaften zusammenfafst.

---

1) Liebigs Annalen Bd. 42.
2) Über die Erhaltung der Kraft. Berlin.

Druck von M. Bruhn in Braunschweig.